

УДК 539.3

А.Г. ПЕЛЕВИН, А.Л. СВИСТКОВ  
Институт механики сплошных сред УрО РАН

### АЛГОРИТМ ПОИСКА КОНСТАНТ ДЛЯ МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ РЕЗИНЫ\*

Рассмотрена модель механического поведения резины. Для построения системы уравнений используется схема механического поведения материала, точки которой соединены упругими, вязкими, пластическими и трансмиссионными элементами. В работе предложен пошаговый алгоритм получения констант модели. Константы в определяющих уравнениях, определенные на предыдущих шагах, не меняются на следующих. Используемые в работе эксперименты (циклические нагружения с релаксацией и ползучестью) позволяют получить большой объем информации о механических свойствах резины в рамках одного эксперимента.

В основе модели использован подход, основанный на аддитивном разложении тензора скоростей деформации среды на тензоры скоростей деформации отдельных элементов схемы [1]. Каждый элемент схемы, представленной на рис. 1, может быть заменен соответствующими ему определяющими тензорными уравнениями из нелинейной теории упругости, теории нелинейных вязких жидкостей, теории пластического течения материала в условиях конечных деформаций среды. Схема показывает способ объединения определяющих уравнений в общую систему. Детали алгоритма построения определяющих уравнений из отдельных групп элементов (упругих, вязких, пластических, трансмиссионных) описаны в работе [2].

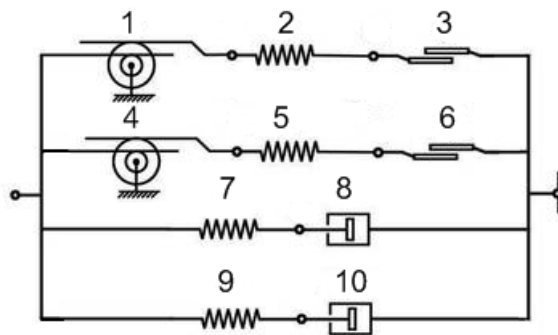


Рис. 1. Схема механического поведения материала

Для определения констант в рассматриваемой модели использованы эксперименты с пятью образцами. Каждый из них деформировался следующим образом. На первом цикле осуществлялось растяжение образца с постоянной скоростью  $\dot{\lambda} = 1/60 \text{ с}^{-1}$ . После этого, в течение 60 минут, наблюдали процесс релаксации напряжений при фиксированной деформации среды. Далее осуществлялась

\* Работа выполнена при финансовом содействии с грантами президента поддержки ведущих научных школ № НШ-3717.2008.1, РФФИ и Министерства промышленности, инноваций и науки Пермского края (грант 07-08-96017).

разгрузка материала с постоянной скоростью деформирования  $\dot{\lambda} = -1/60 \text{ с}^{-1}$  и фиксировалась ползучесть следующих циклов деформирования. Отличие новых циклов от первого состояло в том, что релаксация напряжений наблюдалась в течение 30 минут вместо 60 минут и максимальная кратность удлинения была меньше той, которая была на первом цикле. Значения максимальных кратностей удлинений, достигаемых на циклах, указаны в таблице.

Максимальные кратности удлинений, достигаемые на циклах

Номер образца	1-й цикл	2-й цикл	3-й цикл	4-й цикл	5-й цикл	6-й цикл	7-й цикл
1	1,5	1,25	1,5	–			
2	1,75	1,25	1,5	1,75	–		
3	2	1,25	1,5	1,75	2	–	
4	2,25	1,25	1,5	1,75	2	2,25	–
5	2,5	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5

Эксперименты предложенного типа дают большое количество информации о механических свойствах материала. На одном образце в одном эксперименте получают данные о размягчении среды на первом цикле деформирования (эффект Маллинза), о вязкоупругих свойствах, о процессах релаксации и ползучести. Определение констант модели можно осуществить по шагам, используя для нахождения новых констант информацию, полученную на предыдущих шагах.

**Поиск констант. Первый шаг.** Для начала рассмотрим простую ситуацию, когда объемная плотность свободной энергии материала  $\omega$  является функцией только кратностей удлинений второго элемента:

$$\omega = \omega_2 = c_1^{(2)} \left( \sum_{i=1}^3 (\lambda_i^{(2)})^2 - 3 \right) + c_2^{(2)} \left( \sum_{i=1}^3 \left( \frac{1}{\lambda_i^{(2)}} \right)^2 - 3 \right).$$

Это означает, что все элементы с четвертого по десятый никак не влияют на механическое поведение среды. Накопление пластических деформаций происходит только на первом цикле деформирования. На всех последующих циклах материал ведет себя как упругий. Сдвинем экспериментальные данные так, чтобы все циклы, кроме первого, выходили из начала координат (рис. 2). Преобразованные экспериментальные данные позволяют определить упругие свойства второго элемента.

Найдем константы  $c_1^{(2)}$ ,  $c_2^{(2)}$  упругого элемента и значения передаточного числа  $\nu_1$  первого трансмиссионного. Будем считать, что для каждого образца передаточное число  $\nu_1$  имеет свое значение, в то время как константы  $c_1^{(2)}$ ,  $c_2^{(2)}$  являются общими для всех образцов. Для нахождения констант будем использовать только точки на экспериментальных кривых, которые получаются после завершения релаксационных процессов. Это равновесные точки. Считаем, что релаксационные процессы полностью завершились. Теоретическая кривая должна пройти через них. При этом во внимание будем принимать только точки, у которых кратности удлинений меньше половины от максимальной на первом цикле деформирования. На рис. 2 они обозначены жирными точками. Речь о прохождении теоретической кривой через остальные равновесные точки пойдет позже.

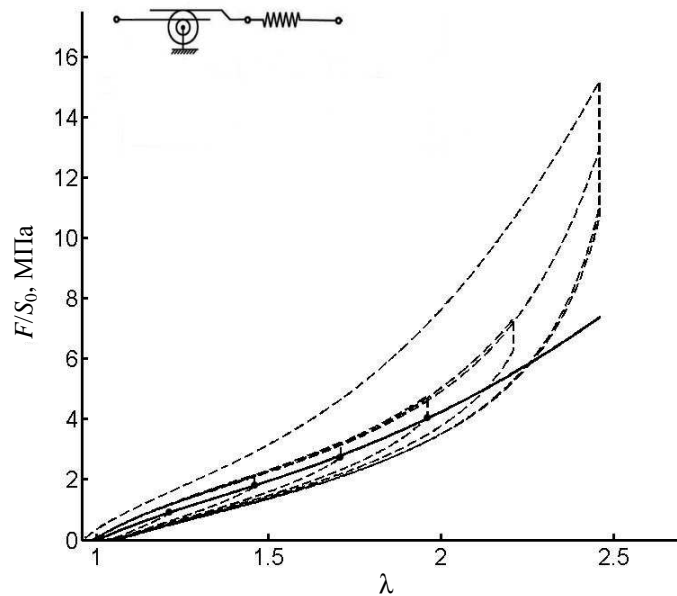


Рис. 2. Экспериментальные данные, полученные при испытании пятого образца (приведенные со сдвигом по оси  $\lambda$ ), и теоретическая кривая, определенная на первом шаге поиска констант

Процесс нахождения значений рассматриваемых величин осуществляли следующим образом. Для третьего образца определяли значения переменных  $c_1^{(2)}$ ,  $c_2^{(2)}$  и  $\nu_1$ . Для остальных образцов находили только значения переменных  $\nu_1$ , используя для описания свойств упругого элемента найденные значения констант  $c_1^{(2)}$ ,  $c_2^{(2)}$ . Третий образец выбран в качестве основного для определения упругих свойств, поскольку он занимает промежуточное значение по уровню максимальных деформаций, достигаемых в эксперименте. Поэтому можно ожидать, что мы получим некоторые средние значения.

**Второй шаг.** Используя значения передаточного числа первого трансмиссионного элемента  $\nu_1$ , найденные для разных образцов, представим параметр  $\nu_1$  в виде функции от максимальных деформаций за всю предшествующую историю деформирования среды  $\nu_1 = \nu_0^{(1)} + \nu_1^{(1)} \exp(-\nu_2^{(1)} \max I_V)$ , где инвариант  $I_V$  вычисляется по формуле

$$I_V = \sqrt{3\text{tr}(\mathbf{V}^2) - \text{tr}(\mathbf{V})^2}.$$

Находим еще три константы в модели:  $\nu_0^{(1)}$ ,  $\nu_1^{(1)}$ ,  $\nu_2^{(1)}$ .

По нашему мнению, первый упругий элемент должен моделировать связь между структурными напряжениями в активной части связующего эластомерного нанокompозита и макроскопическими напряжениями материала. Естественно, что напряжение зависит от процесса разлома агрегатов на части при растяжении резины. В модели этот процесс будет учитываться путем уменьшения передаточного числа первого трансмиссионного элемента.

**Третий шаг.** Учет в модели накопление необратимых деформаций. Усложним рассматриваемую схему механического поведения, включив в нее пластический элемент с номером три. Свойства этого элемента определяются выбором зависимости для коэффициента пластичности  $k_3$ . Для ее нахождения используем (в отличие от предыдущих шагов) реальные, а не смещенные кривые зависимости растягивающей силы от кратности удлинения для исследуемых образцов:

$k_3 = k_0^{(3)} + k_1^{(3)} \exp(-k_2^{(3)} \max I_T)$ , где  $I_T = \sqrt{\text{dev} \mathbf{T} \cdot \text{dev} \mathbf{T}}$ , а  $\mathbf{T}$  – тензор напряжений Коши, действующих в материале.

Подберем значения констант  $k_0^{(3)}, k_1^{(3)}, k_2^{(3)}$  таким образом, чтобы получить в модели точное описание величин остаточных кратностей удлинений (получаемых после завершения процесса ползучести) для всех рассматриваемых образцов.

**Четвертый шаг.** При построении математической модели механического поведения резины будем использовать гипотезу о том, что в материале при деформировании происходит образование высокопрочных волокон. Эти волокна состоят из ориентированного полимера и образуются в результате сползания полимерных цепей из слоев около частиц наполнителя в зазоры между агрегатами частиц. Считаем, что волокна в материале образуются в результате пластического течения материала при растяжении и сохраняют свои упругие свойства для любого растяжения, меньшего максимального. На этом шаге опишем упругие свойства уже сформированных волокон (т.е. считаем что, волокна уже образовались в результате первого нагружения) элементами с номерами 4, 5 (рис. 3). Потенциал свободной среды запишем в виде суммы  $\omega = \omega_2 + \omega_5$ , в которой

$$\omega_5 = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi_5 < 0, \\ c_5 \xi_5, & \text{если } \xi_5 \geq 0, \end{cases} \quad \text{где } \xi_5 = c_5 (\lambda_1^{(5)} - 1)(\lambda_2^{(5)} - 1)(\lambda_3^{(5)} - 1).$$

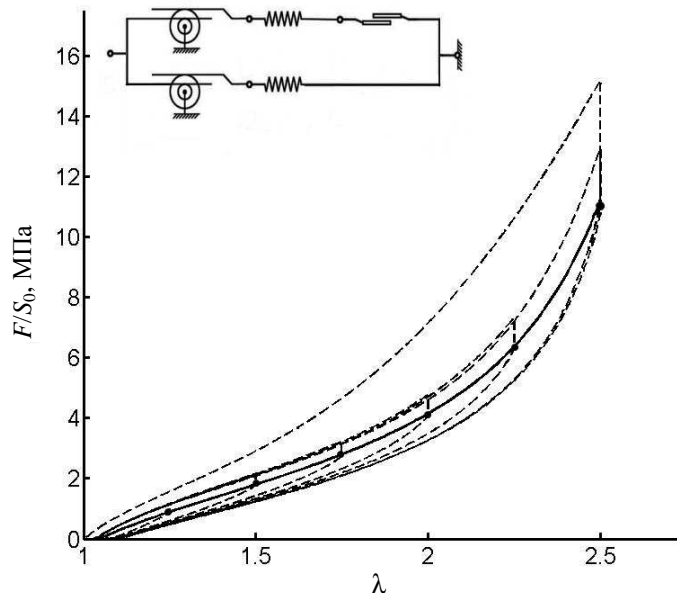


Рис. 3. Экспериментальные данные (пунктирная линия), полученные при испытании пятого образца, и теоретическая кривая (сплошная линия), определенная на четвертом шаге поиска констант

Для подбора константы  $c_5$  5-го упругого элемента и передаточного числа  $\nu_4$  4-го трансмиссионного элемента используем все точки на экспериментальной кривой, получаемые после завершения релаксационных процессов.

**Пятый шаг.** Добавим в модель шестой пластический элемент, описывающий процесс формирования волокон в результате движения полимерных цепей из слоев в зазоры между включениями. Свойства этого элемента определяются выбором функции  $\kappa_6$ . Для ее нахождения используем точки на экспериментальной кривой, соответствующие моментам завершения релаксационных процессов для первых циклов деформирования у всех образцов (рис. 4). Определим пластические свойства шестого элемента следующим образом:  $\kappa_6 = \kappa_0^{(6)} + \kappa_1^{(6)} \exp(-\kappa_2^{(6)} \max I_T)$ . Подберем значения констант  $\kappa_0^{(6)}$ ,  $\kappa_1^{(6)}$ ,  $\kappa_2^{(6)}$  таким образом, чтобы расчетная кривая нагрузки первого цикла прошла по выбранным точкам.

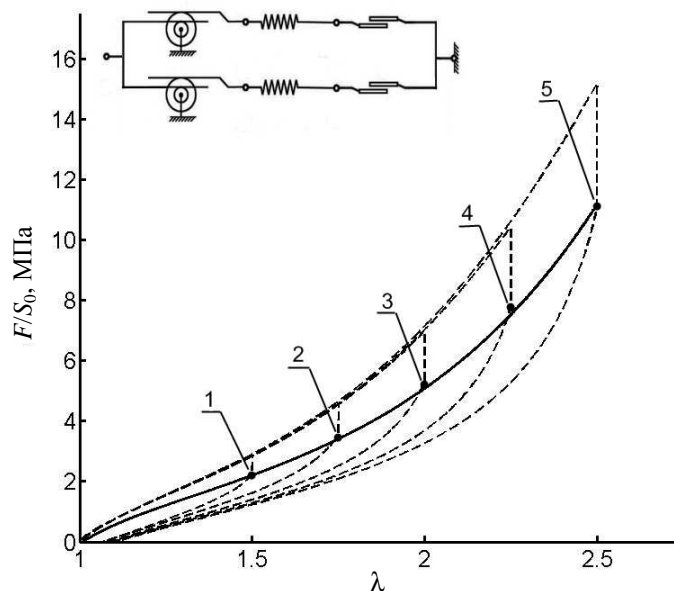


Рис. 4. Экспериментальные данные первых циклов деформирования образцов (пунктирные линии) и теоретическая кривая растяжения материала (сплошная линия). Цифры на графике соответствуют номерам образцов и показывают точки, получаемые после первого растяжения и завершения релаксационных процессов

**Шестой шаг.** Включим в модель элементы, позволяющие описать вязкоупругое поведение материала. Опишем особенности вязкоупругого поведения материала с помощью седьмого упругого и восьмого вязкого элементов (рис. 5). Потенциал свободной энергии среды представим в виде суммы  $\omega = \omega_2 + \omega_5 + \omega_7$ , в которой последнее слагаемое имеет вид  $\omega_7 = c_1^{(7)} \left( \sum_{i=1}^3 (\lambda_i^{(7)})^2 - 3 \right)$ . Свойства вязкого элемента определим с помощью следующей функции вязкости:  $\eta_8 = \eta_1^{(8)} \exp(\eta_2^{(8)} I_V)$ . Константы  $c_1^{(7)}$ ,  $\eta_1^{(8)}$ ,  $\eta_2^{(8)}$  подбираем таким образом, чтобы теоретическая кривая совпала

с экспериментальными данными на участках растяжения материала для всех циклов деформирования, кроме первого.

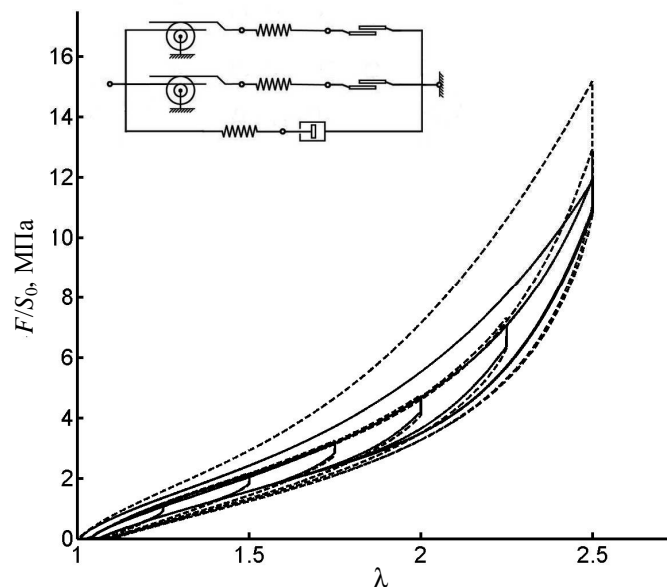


Рис. 5. Экспериментальные данные, полученные при испытании пятого образца, и теоретическая кривая, определенная на седьмом шаге поиска констант

**Седьмой шаг.** На предыдущем шаге речь шла о моделировании быстрых процессов. Теперь необходимо уточнить теоретические расчеты с целью удовлетворительного описания процесса релаксации напряжений. Для этого необходимо, чтобы численное значение вязкости во время релаксации было значительно больше вязкости материала во время нагрузки и разгрузки. Рассмотрим этот процесс отдельно. На время забудем об уже найденном выражении для  $\eta_8$ . Для каждого образца имеем несколько участков релаксации напряжений при деформировании образцов (рис. 6). Во время релаксации растяжения образца остаются неизменными, меняются только кратности удлинений седьмого упругого элемента. Значения вязкости  $\eta_8$  аппроксимируем формулой  $\eta_8 = \eta_3^{(8)} \exp(b I_{V_7})$ , где

$I_{V_7} = \sqrt{3\text{tr}(\mathbf{V}_7^2) - \text{tr}(\mathbf{V}_7)^2}$ . Значение параметра  $b$  зависит от тензора растяжений образца. Для каждой кратности растяжения материала нетрудно определить ее значение. После этого опишем зависимость ее от деформаций с помощью математическое выражения

$$b = \frac{\eta_4^{(8)}}{\exp(-\eta_5^{(8)} I_V)}. \text{ Функция вязкости принимает вид } \eta_8 = \eta_3^{(8)} \exp\left(\frac{\eta_4^{(8)} I_{V_7}}{\exp(-\eta_5^{(8)} I_V)}\right), \text{ где}$$

$\eta_3^{(8)}, \eta_4^{(8)}, \eta_5^{(8)}$  найденные на данном шаге константы.

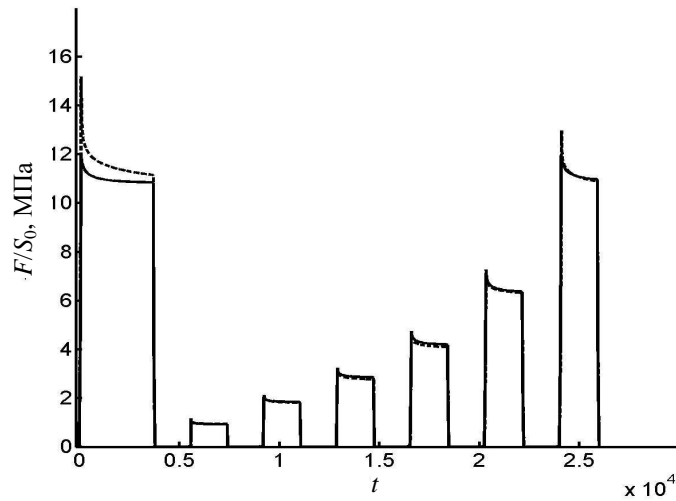


Рис. 6. Экспериментальные данные, полученные при испытании пятого образца, и теоретическая кривая, определенная на седьмом шаге поиска констант

**Восьмой шаг.** Объединим описание быстрых и медленных времен релаксации. Медленные времена релаксаций мы находили в предыдущем шаге только для режима релаксации. Для нагрузки и разгрузки значение вязкости 8-го вязкого элемента значительно меняется. Добавим к математическому выражению вязкости  $\eta_8$ , определенному для быстрых процессов, вязкость для медленных процессов, умноженную на выражение  $\exp(-\eta_6^{(8)} I_D)$ , для зависимости от скорости деформирования всего образца. В итоге получим

$$\eta_8 = \eta_1^{(8)} \exp(\eta_2^{(8)} I_V) + \eta_3^{(8)} \exp\left(\frac{\eta_4^{(8)} I_{V9}}{\exp(-\eta_5^{(8)} I_V)}\right) \exp(-\eta_6^{(8)} I_D),$$

где  $I_D = \sqrt{3\text{tr}(\mathbf{D}_4^2) - \text{tr}(\mathbf{D}_4)^2}$ .

При быстрых процессах выражение  $\exp(-\eta_6^{(8)} I_D)$  близко к нулю. В результате ранее найденная теоретическая кривая для быстрых процессов практически не изменится. Другая ситуация возникнет при моделировании релаксации напряжений. В этих процессах выражение  $\exp(-\eta_6^{(8)} I_D)$  будет равно единице, и значение найденной вязкости для медленных процессов полностью определяет особенности релаксации напряжений. Константу  $\eta_6^{(8)}$  необходимо определить таким образом, чтобы правильно воспроизвести поведение материала в промежуточных условиях. К сожалению, необходимых экспериментальных данных было недостаточно. Поэтому константа  $\eta_6^{(8)}$  выбрана нами большой. Но однозначно определить ее по имеющимся экспериментам мы не смогли.

**Девятый шаг.** Определим вязкоупругие свойства образца при первом нагружении материала. Для этого добавим в модель 9-й упругий и 10-й вязкий элементы. Потенциал свободной энергии среды представим в виде суммы:

$\omega = \omega_2 + \omega_5 + \omega_7 + \omega_9$ , в которой  $\omega_9 = c_1^{(9)} \left( \sum_{i=1}^3 (\lambda_i^{(9)})^2 - 3 \right)$ , а вязкость 10-го элемента запишем в виде  $\eta_{10} = \eta_1^{(10)} \exp(\eta_2^{(10)} I_V) \exp\left( \eta_3^{(10)} \frac{I_V - \max I_V}{\max I_V} \right)$ .

Используя данные первого нагружения определим значения констант  $c_1^{(10)}$ ,  $\eta_1^{(10)}$ ,  $\eta_2^{(10)}$ . Константу  $\eta_3^{(10)}$  найдем таким образом, чтобы для всех циклов деформирования, кроме первого, никакого вклада в поведение материала 9-й упругий элемент не вносил. Исключение составляет только небольшая область в окрестности максимальных значений кратностей удлинений, достигнутых на первом цикле (рис. 7).

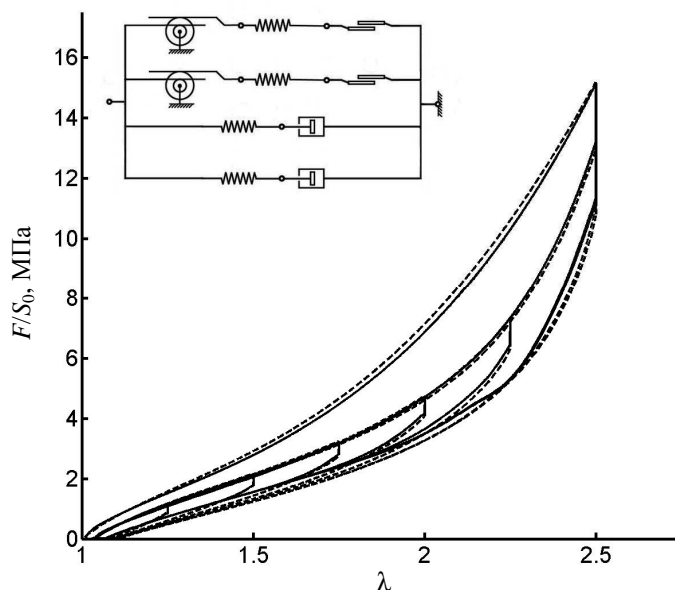


Рис. 7. Экспериментальные данные, полученные при испытании пятого образца, и теоретическая кривая, определенная на одиннадцатом шаге поиска констант

**Выводы.** Система определяющих уравнений учитывает особенности поведения материала на структурном уровне среды. Предложен метод поиска констант модели по шагам для описания вязкоупругих свойств резин. Полученные теоретические результаты достаточно точно описывают поведение резины.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Palmov V. A. Comparison of different approaches in viscoelastoplasticity for large strain // ZAMM. – 2000. – V.~80. – P. – 801–806.
2. Svistkov A. L., Lauke B., Heinrich G. Modeling of viscoelastic properties and softening of rubber materials // Proceedings of 5th European conference “Constitutive models for rubbers”. – Paris, 2007. – P. 113–118.

Получено 01.05.2009.