

УДК 531/534:[57+61]

**С.В. Нигматуллина, А.А. Селянинов**Пермский национальный исследовательский  
политехнический университет, Пермь, Россия**СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ ИМПЛАНТАТА  
СТРЕМЕНИ ПОРШНЕВОГО ТИПА**

Слух является одним из чувств, с помощью которых мы познаём окружающий мир. Нарушение слуха вследствие травм или патологии отрицательно сказывается на качестве жизни, поскольку человек не может выполнять коммуникативные функции. Отосклероз – одно из частых заболеваний. Хирургическое лечение – стапедопластика. Данный вид операции относится к микрохирургическим операциям. Методика данной операции известна с 1958 года. При стапедопластике одним из самых уязвимых звукопроводящих звеньев системы слуховых косточек является стремя, которое заменяется стержневым протезом поршневого типа. Для определения собственных частот имплантата стремени применяется метод конечных элементов. Получено дифференциальное уравнение продольных колебаний стержня. Собственные частоты протеза значительно выше звукового диапазона и попадают в сверхвысокочастотный МГц-диапазон. С целью уменьшения влияния излучения мобильных телефонов и сигнализации автомобилей на слуховую систему человека вводится критерий вывода первых собственных частот протеза из МГц-диапазона, поэтому материал и форма протеза определяются из условия минимума первой собственной частоты. Протез моделируется в пакете инженерной программы. Выбирались формы, соответствующие продольным колебаниям, которые обеспечивают проводимость слуха из среднего уха во внутреннее ухо. Рассматривались собственные частоты однородного стержня из различных материалов. По результатам лучшими материалами являются тефлон и золото. Для определения собственных частот произведено сравнение аналитического решения и приближенного, полученного при помощи метода конечных элементов (МКЭ). Результаты сравнения показали правильность метода реализации решения в программе и возможность усложнения расчетов.

**Ключевые слова:** стапедопластика, форма стержневого протеза, сверхвысокие собственные частоты, тефлон.

**S.V. Nigmatullina, A.A. Selyaninov**

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

**THE EIGENFREQUENCIES THE IMPLANT  
STAPES PISTON TYPE**

Hearing is one of the senses, through which we learn about the world. Hearing impairment due to injury or disease affects the quality of life. The patient is unable to perform communicative functions. Otosclerosis – one of the most common diseases. Treatment is surgery to stapedioplasty. Technique of the operation has been known since 1958. When stapedioplasty one of the most vulnerable sections of conductive auditory ossicles is the stirrup, which is replaced by the prosthesis piston type rod. This type

of operation is to microsurgery. To determine the natural frequencies of the method of finite elements. The differential equation of longitudinal vibrations of the rod. The natural frequencies of the prosthesis is much higher sound range and fall into the super-high-MHz range. In order to reduce the effect of radiation of mobile phones and car alarms in the auditory system of the person introduced the criterion of first natural frequencies of the output of the graft-MHz range, so the material and shape of the prosthesis are determined by minimizing the first natural frequency. The prosthesis is modeled in engineering software package. Form is selected, the corresponding longitudinal vibrations that provide conductivity ear from the middle ear to the inner ear. Considered the natural frequencies of a homogeneous rod of different materials. According to the results of the best materials are teflon and gold. To determine the natural frequencies of a comparison of analytical and approximate solutions obtained using the finite element method.

**Keywords:** stapedioplasty, shape of the rod prosthesis, ultra-high eigenfrequencies, teflon.

## **Введение**

Без возможности слышать человек теряет возможность коммуникации и восприятия окружающего мира. Слух – это способность воспринимать звуковые колебания частотой из определенного диапазона. Человеческое ухо воспринимает звуковые колебания частотой от 5 до 20 кГц. Основную роль при передаче звука от внешней ушной раковины к внутреннему уху играют косточки среднего уха (молоточек, наковальня, стремечко) (рис. 1) [7]. Во время вибрации слуховые косточки отрабатывают сложную кинематику движения. В зависимости от величины звукового давления стремя двигается вперед и назад, вращается относительно продольной оси и поворачивает подножную пластинку – границу между средним и внутренним ухом. Эти движения вызывают вибрацию жидкости, которой заполнено внутреннее ухо. Вибрация жидкости улавливается эпителиальным образованием – кортиевым органом, являющимся частью спирали улитки [3, 5].

Существуют заболевания, вызванные механическим повреждением или ограниченной подвижностью цепи косточек, которые могут привести к полной потере слуха. Частым заболеванием является отосклероз.

Отосклероз – заболевание костной капсулы лабиринта, которое приводит к снижению подвижности основания стремени в овальном окне внутреннего уха и, как следствие, к нарушению звукопроводимости и тугоухости. В ряде случаев отосклеротический процесс поражает костный лабиринт внутреннего уха. Нормальная кость замещается губчатой, затем плотной костью, отличающейся по своему строению от нормальной [6]. Очень часто при этом затвердевают связки основания стремени, оно становится неподвижным, что влечет за собой снижение слуха. Заболевание начинается исподволь, без всякой видимой причины. Вначале постепенно снижается слух и появляется шум в одном ухе, а затем в другом.

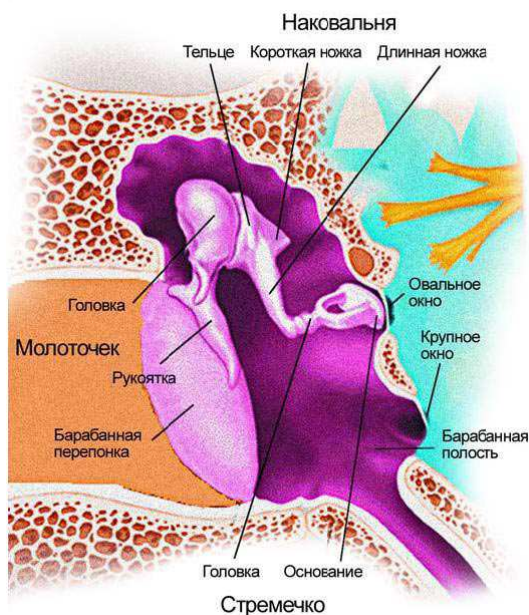


Рис. 1. Косточки среднего уха человека

Во многих случаях значительное улучшение слуха достигается с помощью хирургической операции. Операционный микроскоп, ювелирные методики операций, специальные хирургические инструменты – все это позволило вывести на новый, более высокий уровень хирургическое лечение заболеваний уха. Распространение получили операции стапедэктомии.

Стапедэктомия – хирургическая операция по удалению стремени или его части. Важную роль в передаче звука в среднем ухе после стапедэктомии играет материал и форма протеза. Слух появляется сразу же после операции: больного привозят в операционную глухим, а в палату он возвращается слышащим. В качестве материалов для протезов применяются тефлон, золото, платина, титан, нержавеющая сталь или гомотрансплантаты. Одно из условий хорошей работы протеза – это отсутствие резонанса. Использование NiTi-протезов для стапедопластики – относительно новый метод (1993), показавший превосходные результаты в Германии и других странах Европы. NiTi-протез представляет собой проволочку, изготовленную из сплава с памятью формы. Он объединяет свойства хорошей биосовместимости и оссеоинте-

грации. За счет изящной формы отмечены хорошие механические свойства для передачи звука, а благодаря изгибу на конце петли протеза отсутствует вероятность некроза длиной ножки наковальни. Минимальный размер поршня (0,4 мм) позволяет ввести его в стапедотомическое отверстие в основании стремени при достаточно сложных анатомических ситуациях, например нависании канала лицевого нерва или тотальном заполнении ниши окна преддверия отосклеротическим очагом.

Оригинальную методику стапедопластики полиэтиленовым протезом в настоящее время применяют крайне редко из-за опасности возникновения фистулы лабиринта и ампутации конца наковальни. За рубежом широко применяют протезы из стальной проволоки, одновременно производят закрытие преддверия губкой, веной или клетчаткой в виде стержня, вводимого в открытое преддверие. Эта операция получила название поршневой стапедопластики.

Целью исследования является проведение частотного анализа протезов поршневого типа, выделения из спектра первых частот продольных колебаний и сравнение результатов с аналитическим решением.

### 1. Аналитическое решение

Рассмотрим собственные колебания слуховых косточек на примере продольных колебаний стержня постоянного сечения (рис. 2) и найдем частоты этих колебаний.

При продольных колебаниях каждый элементарный участок стержня длиной  $dx$  попеременно испытывает растяжение и сжатие, оставаясь плоским. Поскольку стержень относительно тонок, инерциальные силы в поперечном направлении, вызванные попеременным увеличением и уменьшением высоты сечения, пренебрежимо малы и можно считать, что инерционные силы в стержне направлены вдоль его продольной оси. Связь напряжений и перемещений, обусловленных только осевыми силами при малых колебаниях, определяется законом Гука [4]:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1)$$

где  $\sigma_x, \varepsilon_x, E, u$  – напряжение, деформация, модуль упругости и перемещение соответственно, причем координатная ось направлена вдоль оси стержня.

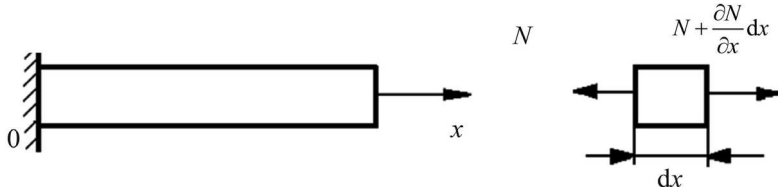


Рис. 2. Расчетная схема стержневого протеза стремени

Составим дифференциальное уравнение продольных колебаний стержня. Рассмотрим для этого элементарный участок стержня между поперечными сечениями, расположенными на расстоянии  $dx$ . На левой грани участка  $dx$  действует растягивающая сила  $N = EA \frac{\partial u}{\partial x}$ , где  $A$  – площадь сечения стержня, на правой грани кроме силы  $N$  имеется ее приращение  $N + \frac{\partial N}{\partial x} dx$ . Применяя второй закон Ньютона, получим

$$\rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность материала стержня.

Дифференциальное уравнение продольных колебаний стержня принимает вид

$$\rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

где  $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ .

Частное решение этого дифференциального уравнения ищем в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от аргумента  $x$ , а другая – только от аргумента  $t$ :

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (4)$$

Подставив выражение (4) в выражение (3), получим  $a^2 X''T = XT''$ . После преобразования получаем два уравнения:

$$\ddot{T} + p^2 T = 0; \quad X'' + \frac{p^2}{a^2} X = 0. \quad (5)$$

Первое уравнение имеет решение вида

$$T = B \sin(pt + \alpha),$$

указывающее на колебательный характер процесса. Из выражения (5) видно, что пока неизвестная величина  $p$  имеет смысл частоты свободных колебаний.

Второе уравнение из (5) имеет решение вида

$$X = C \sin\left(\frac{px}{a}\right) + D \cos\left(\frac{px}{a}\right) \quad (6)$$

и определяет собственную форму колебаний.

Частотное уравнение, определяющее величину  $p$ , составляется путем использования граничных условий. Это уравнение всегда трансцендентное и имеет бесконечное число корней. Таким образом, число собственных частот бесконечно, причем каждому значению частоты  $p_n$  соответствуют своя функция  $T_n(t)$ , определяемая зависимостью (5), и своя функция  $X_n(x)$ , определяемая зависимостью (6).

Решение (4) является лишь частным и не дает полного описания движения. Полное решение получается путем наложения всех частных решений:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t).$$

Функции  $X_n(x)$  называются собственными функциями задачи и описывают собственные формы колебаний.

В случае если стержень закреплен одним концом, краевые условия имеют вид

$$x = 0: X = 0 \quad x = l: X' = 0. \quad (7)$$

Определим собственные частоты консольного стержня. Подставляя поочередно условия (7) в решение (6), получаем

$$D = 0; \quad C \frac{p}{a} \cos\left(\frac{pl}{a}\right) = 0.$$

Условие  $C \neq 0$  приводит к частотному уравнению

$$\cos \frac{pl}{a} = 0; \quad \frac{pl}{a} = \frac{2n-1}{2} \pi.$$

Частота свободных колебаний, соответствующая  $n$ -й главной форме,

$$p_n = \frac{2n-1}{2} a \pi = \frac{2n-1}{2l} \pi \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (8)$$

Для проведения расчетов необходимы характеристики материалов (табл. 1), результаты аналитического решения задачи представлены в табл. 2.

Таблица 1

Характеристики материалов

| Материал          | $\rho$ , кг/м <sup>3</sup> | $E$ , 10 <sup>9</sup> Па |
|-------------------|----------------------------|--------------------------|
| Тефлон            | 920                        | 5,5                      |
| Золото            | 19,3–10 <sup>3</sup>       | 79                       |
| Платина           | 21,5–10 <sup>3</sup>       | 160                      |
| Титан             | 4,5–10 <sup>3</sup>        | 116                      |
| Нержавеющая сталь | (7,7–7,9)–10 <sup>3</sup>  | 195–205                  |

Таблица 2

Собственные частоты протеза стремени в виде однородного стержня

| Материал    | $p_1$ , 10 <sup>6</sup> с <sup>-1</sup> | $p_2$ , 10 <sup>6</sup> с <sup>-1</sup> | $p_3$ , 10 <sup>6</sup> с <sup>-1</sup> | $p_4$ , 10 <sup>6</sup> с <sup>-1</sup> |
|-------------|---|---|---|---|
| Кость       | 0,6                                     | 1,9                                     | 3,2                                     | 4,5                                     |
| Тефлон      | 1,1                                     | 3,2                                     | 5,4                                     | 7,6                                     |
| Золото      | 0,9                                     | 2,7                                     | 4,5                                     | 6,3                                     |
| Платина     | 1,2                                     | 3,6                                     | 6,1                                     | 8,5                                     |
| Титан       | 2,2                                     | 6,8                                     | 11,3                                    | 15,9                                    |
| Нерж. сталь | 2,2                                     | 6,8                                     | 11,4                                    | 15,9                                    |

Данные вычисления показывают, что собственные частоты стержневых протезов выше 100 кГц – за пределом звукового диапазона. Причем уже вторая частота для титана и нержавеющей стали попадает в МГц-диапазон, а четвёртая находится в нем для всех применяемых материалов. Собственные частоты – сверхвысокочастотные. По критерию минимума первой частоты лучшими материалами для стержневых протезов стремени являются золото и тефлон.

Применяемая форма протеза представляет собой однородный стержень постоянного или переменного сечения с головкой для крепления к наковальне.

## 2. Конечно-элементная реализация задачи

В теоретической механике механическая система с  $n$  степенями свободы имеет  $n$  собственных частот, соответствующих  $n$  видам нормальных колебаний, так что перемещение каждой точки системы при свободных колебаниях представляется в виде геометрической суммы перемещений, которые получила бы точка при каждом из нормальных колебаний. При одном только нормальном колебании каждая точка системы совершает гармоническое колебание. Таким образом, нормальным колебанием материальных точек называется такое свободное движение, при котором каждая точка совершает простое гармоническое колебание, причем частоты колебаний всех точек одинаковы и все точки колеблются в одной фазе.

Используя метод конечных элементов, дискретные уравнения движения тела можно представить в виде матричного уравнения [8]

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{P\}, \quad (9)$$

в котором  $\{\delta\}$  – вектор узловых перемещений для всего тела;  $\{\dot{\delta}\}$ ,  $\{\ddot{\delta}\}$  – векторы ускорений и скоростей для точек тела;  $[K]$ ,  $[C]$ ,  $[M]$  – «глобальные» матрицы жесткости, демпфирования и масс для всего тела;  $\{P\}$  – вектор эквивалентных узловых сил для тела.

При отсутствии внешних сил уравнение (9) можно записать в виде

$$[K]\{\delta\} = -[M]\{\ddot{\delta}\}. \quad (10)$$

Уравнение (10) типично для всех задач колебаний с конечным числом степеней свободы. При собственных колебаниях все точки движутся в фазе, поэтому мы можем записать  $\{\delta\} = \{\delta_0\} \sin \omega t$ , откуда  $\{\ddot{\delta}\} = -\omega^2 \{\delta_0\} \sin \omega t$ .

Подставляя результат в (10), получаем следующее уравнение:

$$([K] - \omega^2[M])\{\delta_0\} = 0. \quad (11)$$

Это уравнение является типичным для задач на собственные значения. Если матрицы  $[K]$  и  $[M]$  имеют размер  $n \times n$ , то мы будем иметь  $n$  различных значений угловой частоты  $\omega$ , которым будет удовлетворять уравнение (11), и они рассматриваются как собственные частоты тела.



Каждая из этих частот будет связана с конкретной формой или «модой»  $\{\delta_0\}$ , в которой установлены отношения различных узловых смещений, но неизвестны их величины [1].

С целью сравнения решения МКЭ с аналитическим произведен частотный трехмерный анализ стержня, являющегося протезом стержни из тефлона. Расчет производился в инженерно-расчетной программе SolidWorks. В качестве материала использовался политетрафторэтилен (тефлон). Размеры модели стержня представлены в табл. 3, свойства тефлона – в табл. 4 [2].

Таблица 3

Характеристика стержня

| Параметры | Численные данные (мм) |
|-----------|-----------------------|
| Длина     | 3,5                   |
| Радиус    | 0,39                  |

Таблица 4

Характеристика материала

| Свойства                            | Численные данные |
|-------------------------------------|------------------|
| Модуль Юнга, $E$ , $10^9$ Па        | 5,5              |
| Коэффициент Пуассона, $\nu$         | 0,46             |
| Плотность, $\rho$ , $\text{кг/м}^3$ | 920              |

Получены собственные частоты стержня как упругого материала. Из большого спектра форм и соответствующих им частот нас интересуют именно продольные колебания. По формам колебаний удалось выбрать те, которые соответствуют продольным. На рис. 3 приведены четыре первых моды, частоты которых соответствуют первым четырем собственным частотам продольных колебаний.

На рис. 4 приведено сравнение аналитического и численного решений для первых четырех собственных частот продольных колебаний стержневого имплантата поршневого типа.

Сравнение результатов аналитического и численного решений показало незначительное расхождение значений собственных частот, поэтому оба подхода можно использовать для частотного анализа стержневого имплантата. Первые частоты для имплантата поршневого

типа превышают 170 кГц, т.е. далеко выходят за пределы звукового диапазона. Одна из низших частот, соответствующая 4-й моде, уже входит в МГц-диапазон.

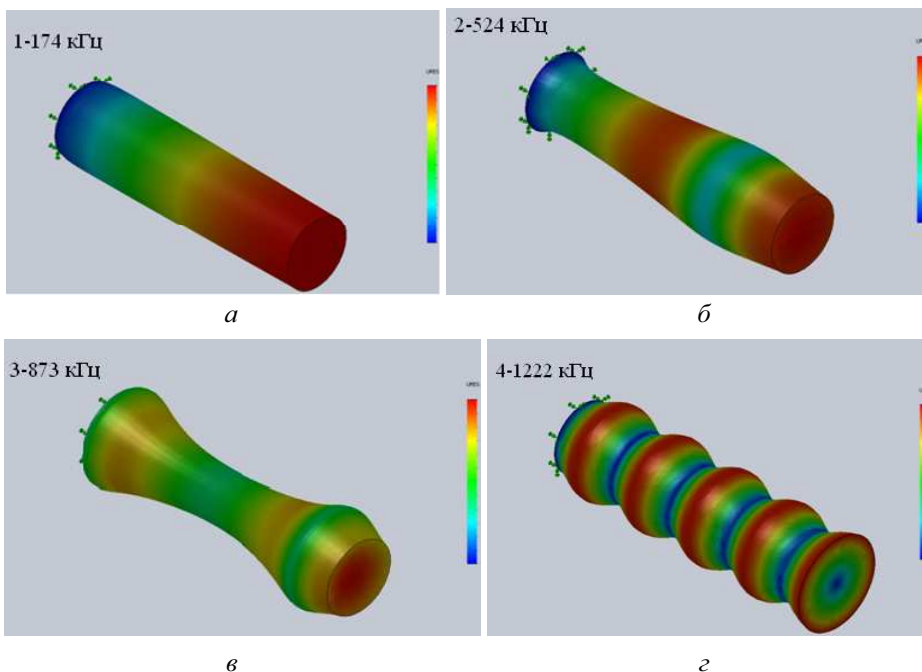


Рис. 3. Собственные формы стержня из тефлона в результате продольных колебаний



Рис. 4. График сравнения данных для тефлона: — аналитическое решение (кГц); — численное решение (кГц)

Бытовая электронная техника (сотовые телефоны, сигнализация автомобиля и т.п.) работает в этом диапазоне частот, поэтому представляет интерес дальнейший анализ по выводу собственных частот имплантата из МГц-диапазона. Исходя из проведенного частотного анализа в качестве критерия качества имплантата поршневого типа можно принять минимум первой собственной частоты. Так как в МГц-диапазоне остается целый ряд собственных частот имплантата, нас интересует дальнейший анализ резонансных явлений в имплантате при использовании сотовых телефонов.

### **Выводы**

1. Произведен анализ собственных частот имплантата поршневого типа, применяемого в стапедопластике на основе аналитического и численного решений. Выбраны интересующие нас продольные колебания. Низшие частоты лежат в диапазоне свыше 170 кГц и уже с 4-й частоты уходят в МГц-диапазон.

2. Введен критерий уменьшения негативного влияния внешних излучений на поведение имплантата в МГц-диапазоне. Исходя из частотного анализа можно выбрать для критерия качества имплантата условие минимума первой собственной частоты.

### **Библиографический список**

1. Бегун П.И., Шукейло Ю.А. Биомеханика. – СПб.: Политехника, 2000. – 463 с.

2. Бородулина Т.С., Селянинов А.А., Подгаец Р.М. Выбор параметров протеза стремени при стапедопластике на основе собственных частот //Российский журнал биомеханики. – 2009. – Т. 13, № 4 (46). – С. 42–53

3. Биофизика / Ю.А. Владимиров, Д.И. Роцупкин, А.Я. Потапенко, А.И. Деев. – М.: Медицина, 1983. – 272 с.

4. Вульштейн Х. Слухоулучшающие операции. – М.: Медицина, 1972. – 426 с.

5. Ремизов А.Н. Краткий курс медицинской и биологической физики: лекции и семинары / под ред. проф. А.Н. Ремизова; Рос. гос. мед. ун-т. – М., 2001. – 383 с.

6. Рудня П.Г. Атлас оперативной оториноларингологии. – М.: Медицина, 1983.

7. Rosowski J.J. Mechanism of sound conduction in normal and diseased ears // *The Function and Mechanics of Normal, Diseased and Reconstructed Middle Ear*. – Hague: Kugler Publications, 2000. – P. 137–145.

8. Колебания линейных систем / под ред. В.В. Болотина. – Т. 1. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.

### References

1. Begun P.I., Shukeylo Y.A. Biomechanika [Biomechanics]. St. Petersburg: Politechnics, 2000, 463 p.

2. Borodulina T.S., Selyaninov A.A., Podgaets R.M. Vibor parametrov proteza stremeni pri stapedoplastike na osnove sobstvennich chastot [Choice of parameters of prosthesis appliance of stirrup at the stapedioplasty arts on the basis of the natural frequencies]. *Russian journal of biomechanics*, 2009, no 4 (46), pp. 42–53.

3. Vladimirov Y.A., Rotchupkin D.I., Potapenko A.Y., Deev A.I. Biofizika [Biophysics]. Mocsow: Medicine, 1983, 272 p.

4. Vulshtein H. Sluhouluchshayutchie operazii [To the operations on the improvement of hearing]. Mocsow: Medicine, 1972, 426 p.

5. Remizov, A.N. Kratkiy kurs medicinskoj i biologicheskoj fiziki. Lektsii i seminary [Short course of medical and biological physics. Lectures and seminars]. Russian State Medical University, 2001. 383 p.

6. Rudnya P.G. Atlas operativnoi otorinolaringologii [Atlas of operative otorhinolaryngology]. Mocsow: Medicine, 1983.

7. Rosowski J.J. Mechanism of sound conduction in normal and diseased ears *The Function and Mechanics of Normal, Diseased and Reconstructed Middle Ear*. Hague: Kugler Publications, 2000, pp. 137–145.

8. Kolebaniya lineynyh sistem [Vibrations of the linear systems]. Ed. V.V. Bolotin, vol. 1. Moscow: Mashinostroenie, 1978, 352 p.

### Об авторах

**Нигматуллина Саня Вадимовна** (Пермь, Россия) – магистрант кафедры теоретической механики Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: sonya.nigmatullina@mail.ru).

**Селянинов Александр Анатольевич** (Пермь, Россия) – доктор технических наук, профессор Пермского национального исследова-

тельского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: luba@theormech.pstu.ac.ru).

### **About the authors**

**Nigmatullina Saniya Vadimovna** (Perm, Russian Federation) – graduate student, department of Theoretical Mechanics Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: sonya.nigmatullina@mail.ru).

**Selyaninov Aleksandr Anatolyevich** (Perm, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Professor of Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: luba@theormech.pstu.ac.ru).

Получено 25.08.2012