

УДК 539.3

**С.А. Лурье<sup>1</sup>, Ю.О. Соляев<sup>1</sup>, М.А. Андрюнина<sup>2</sup>, Е.Д. Лыкосова<sup>1</sup>**<sup>1</sup> Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия<sup>2</sup> Национальный институт авиационных технологий, Москва, Россия

## **ОПТИМИЗАЦИЯ ДЕМПИРУЮЩИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ, СОДЕРЖАЩИХ ВОЛОКНА С ВЯЗКОУПРУГИМ ПОКРЫТИЕМ**

Исследуются демпфирующие свойства волокнистых композиционных материалов, армированных волокнами с вязкоупругими покрытиями. Показано, что для таких материалов имеет место эффект повышения диссипативных характеристик, если толщина вязкоупругих покрытий волокон очень мала. Обнаруженный эффект приводит, по существу, к дополнительному пику в зависимости эффективного модуля потерь волокнистого композита от толщины покрытия, который реализуется для тонких покрытий, когда динамический модуль упругости (т.е. жесткость композита) еще достаточно велик. При этом повышение эффективного модуля потерь композита для оптимальных значений толщин дополнительного вязкоупругого слоя столь значительно, что можно говорить о синергетическом эффекте, ибо эффективный модуль потерь многократно превышает модуль потерь вязкого покрытия.

В работе исследована зависимость эффективных вязкоупругих свойств слоистых композитов от физических параметров композита (от толщины вязких покрытий на волокнах, объемной доли волокон). В качестве примера рассмотрен плоский слоистый композитный пакет на основе эпоксидной матрицы, квазиизотропный в плоскости со слоями, армированными стеклянными волокнами с покрытием на основе полиуретана. Для теоретических расчётов привлекаются классические модели механики композиционных материалов и метод комплексных модулей. Для определения эффективных характеристик монослоя волокнистого композита рассматриваются две постановки задач – в плоскости изотропии и в перпендикулярной к ней плоскости. Эффективный объёмный модуль и модуль сдвига в трансверсальной плоскости определяются соответственно по методу трех фаз Эшелби из решения задач всестороннего растяжения (сжатия) поперек волокон и чистого сдвига в трансверсальной плоскости. Модуль сдвига вдоль волокон определяется по методу трех фаз Эшелби из решения задачи чистого сдвига вдоль волокон в цилиндрической системе координат. Эффективные модуль Юнга и коэффициент Пуассона в направлении волокон определяются совместно из решения задачи об одноосном растяжении в цилиндрической системе координат.

**Ключевые слова:** волокнистый композит, демпфирование, волокна с покрытием, метод комплексных модулей, слоистые композиты, модули потерь.

**S.A. Lurie<sup>1</sup>, Y.O. Solyaev<sup>1</sup>, M.A. Andrunina<sup>2</sup>, E.D. Lykosova<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Institute of Applied Mechanics, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup>National Institute of Aviation Technologies, Moscow, Russian Federation

## **OPTIMIZATION OF THE DAMPING PROPERTIES OF FIBROUS COMPOSITES WITH VISCOELASTIC COATING**

In this work we investigate the damping properties of fibrous composites with viscoelastic coating. It is shown that such materials have the effect of increasing the dissipative characteristics for the specific thickness of the viscoelastic coating on the fibers in a sufficiently narrow range of thicknesses value. The observed effect leads, in fact, an additional peak of the effective loss modulus fiber composite, which is implemented in the case of a fairly narrow range of variation of the thickness of the viscous coating when the dynamic elastic modulus (i.e., stiffness of the composite) is large enough. This increase in the effective loss modulus composite for the optimal values of the thickness of the additional viscoelastic layer is so significant that one can speak of a synergistic effect for the effective loss modulus which is greatly exceeds the loss modulus of the viscous coating.

We study the dependence of the effective viscoelastic properties of layered composites on the physical parameters of the composites structure (the thickness of the viscous coating on the fibers, fibers volume fraction). As an example, it is investigate in-plane isotropic laminate composite based on epoxy matrix with glass fibers coated with polyurethane. For theoretical calculations involved the classic model of the mechanics of composite materials and the method of complex modules. To determine the effective characteristics of the monolayer of fiber composite we consider two formulations of problems – in the plane of isotropy in the plane perpendicular to it. Effective bulk modulus and shear modulus in the transverse plane are defined, respectively, by the method of Eshelby solutions for the full tension (compression) across the fiber and pure shear in the transverse plane. Shear modulus of the composite is determined by the Eshelby method for the pure shear along the fiber in a cylindrical coordinate system. Effective Young's modulus and Poisson's ratio in the direction of the fibers are determined jointly by solving the problem of uniaxial tension in a cylindrical coordinate system.

**Keywords:** fiber composite, the damping, the coated fiber, the method complex modules, layered composites, coated fiber, the loss modulus.

### **Введение**

Вязкоупругие покрытия широко используются для акустического и вибрационного демпфирования [1]. В данной работе рассматриваются волокнистые композиционные материалы, в которых армирующие волокна покрыты вязкими промежуточными слоями с целью увеличения демпфирующих свойств такого комбинированного композита. Аналоги таких структур также широко известны [1, 2]. Характеристики вязкоупругого слоя в рамках линейной вязкоупругости можно оценивать в рамках метода комплексных модулей упругости. На данной круговой частоте  $\omega$  комплексный модуль определяется равенством  $E = E' + iE''$ , где мнимая часть формально определяет скорость диссипации энергии в единице объема  $\dot{U} = E''\gamma_0^2$ , где  $\gamma_0$  – амплитуда гармо-

ники деформаций, прикладываемых к вязкоупругому континууму. Нетрудно видеть, что эффективный комплексный модуль для слоистой двухфазной среды с вязкоупругими свойствами при чистом сдвиге определяется равенством  $\frac{1}{G_{eff}} = \frac{1-f}{G_1} + \frac{f}{G_2}$ , где  $f$  – объемное содержание второго слоя;  $G_1$  и  $G_2$  – комплексные модули слоев системы. Пусть первый из слоев является упругим, а второй вязкоупругим  $G_2 = a(1+i\eta)$ . Можно убедиться, что эффективный модуль потерь такой системы возрастает с ростом  $f$ , достигая максимального значения при некотором значении  $f_0$ , а затем убывает при возрастании  $f$  вплоть до единицы. Такое поведение диссипативных свойств с одним пиком диссипативных свойств известно. Показано [10], что максимальное значение эффективного модуля потерь для такой двухслойной системы достигается для достаточно больших значений толщины вязкоупругого слоя и не зависит от амплитуды модуля упругости вязкоупругого слоя  $a$ . Важно отметить, что если в такой системе первый из слоев является упругим и выполнен, например, из стекла, а второй слой является полимерной матрицей с типичными для таких материалов значениями параметров – объемного комплексного модуля  $C_2$  и комплексного модуля сдвига  $\mu_2$ , то эффективный сдвиговой модуль потерь слоистой системы при сдвиге многократно превышает модуль потерь вязкого слоя. Этот необычный синергетический эффект во многом объясняет возможность получения композитных систем, аномально высокие демпфирующие свойства которых реализуются при сохранении высоких механических свойств. Впервые на подобный эффект для композита со сферическими включениями, имеющими вязкоупругие покрытия, было указано в работе [10], где численным и аналитическим путем установлен факт наличия «второго» пика в зависимости модуля потерь от толщины покрытия для весьма малых значений толщин вязкого слоя. В данной работе мы покажем, что для волокнистой системы имеется такой же эффект, т.е. кроме пика в зависимости модуля потерь от толщины вязкоупругого покрытия волокон, реализующегося при больших толщинах покрытия, имеется второй пик, который реализуется для весьма тонких покрытий волокон.

Показано, что применение волокон с вязкоупругими покрытиями позволяет повысить диссипативные свойства композита. Принципиальным является и тот результат, что в таких системах с тонкими покрытиями волокон эффективный модуль потерь системы может более чем в пять раз превышать модуль потерь вязкоупругого слоя покрытия. Отметим, что использование достаточно толстых покрытий (традиционный путь) волокон позволяет также повысить демпфирующие свойства композитов, однако приводит к значительному уменьшению эффективных модулей упругости композиционного материала, так как вязкоупругое покрытие обычно имеет низкие жесткостные свойства.

### **1. Определение эффективных механических свойств монослоя, армированного волокнами с дополнительным покрытием**

Сначала решается задача об определении эффективных упругих свойств монослоя с волокнистыми включениями. Волокна представляются цилиндрами бесконечной длины, погружёнными в матрицу композита. Покрытие на волокнах моделируется путём введения дополнительного цилиндрического слоя вокруг волокон. Рассматриваемый композит (монослой) является трансверсально-изотропным и характеризуется пятью модулями упругости: модули Юнга и модули сдвига вдоль и поперёк волокон и коэффициент Пуассона. Для определения эффективных характеристик для волокнистого монослоя используется метод самосогласованных фаз Эшелби, позволяющий построить аналитические решения задачи усреднения.

Эффективные диссипативные характеристики (модуль потерь и динамические модуль) находятся методом комплексных модулей, в соответствии с которым в полученные решения для эффективных упругих модулей композита подставляются значения комплексных модулей. Выделяя действительную и мнимую часть, в итоге получаем значения эффективных динамических модулей упругости и модулей потерь композита, определяющих диссипативные свойства.

Далее рассматривается слоистый композит, состоящий из монослоев, армированных волокнами, имеющими вязкоупругие покрытия, и предлагается алгоритм определения оптимальных характеристик покрытий, которые обеспечивают максимальные демпфирующие свойства слоистого композита заданной структуры.

Рассмотрим сначала волокнистый однонаправленный композиционный материал (монослой) с волокнами, имеющими покрытие из вязкоупругого материала. Волокно представлено цилиндром бесконечной длины и радиусом  $R_1$ , с покрытием радиусом  $R_2$ . Вокруг такой системы находится слой матрицы с внешним радиусом  $R_3$ . Для определения эффективных свойств будем использовать метод Эшелби [1], [2]. В соответствии с этим методом будем считать, что вокруг матрицы с изолированным двухслойным включением находится «эффективная» матрица обладающего эффективными свойствами композита. Алгоритм решения, предложенный Эшелби, позволяет найти эффективные свойства композита аналитически. Для решения задачи вводится цилиндрическая система координат. Приведём основные соотношения теории упругости, которые используются в дальнейшем. Соотношения Коши в цилиндрических координатах  $(r, \theta, z)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $u_r, u_\theta, u_z$  – компоненты вектора перемещений,  $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{r\theta}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{\theta z}$  – компоненты тензора деформаций.

Запишем также уравнения равновесия в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}, \sigma_{\theta z}$  – компоненты тензора напряжений.

Закон Гука в цилиндрических координатах имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= 2\mu \varepsilon_{rr} + \lambda \Theta, \quad \sigma_{\theta\theta} = 2\mu \varepsilon_{\theta\theta} + \lambda \Theta, \quad \sigma_{zz} = 2\mu \varepsilon_{zz} + \lambda \Theta, \\ \sigma_{r\theta} &= 2\mu \varepsilon_{r\theta}, \quad \sigma_{\theta z} = 2\mu \varepsilon_{\theta z}, \quad \sigma_{rz} = 2\mu \varepsilon_{rz}, \\ \Theta &= \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}.\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь  $\lambda, \mu$  – параметры Ламе,  $\Theta$  – объёмная деформация.

Для определения эффективных характеристик используется интегральная формула Эшелби, которая представляет собой энергетическое соотношение, сформулированное для поверхности контакта матрицы и эффективной матрицы [2],

$$\int_S (\sigma_{ij}^1 u_i^0 - \sigma_{ij}^0 u_i^1) ds = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3),\tag{4}$$

где поверхность  $S$  – поверхность контакта матрицы и эффективной матрицы;  $\sigma_{ij}^0, u_i^0$  – компоненты тензора напряжений и вектора перемещений на поверхности контакта при решении однородной задачи;  $\sigma_{ij}^1, u_i^1$  – компоненты тензора напряжений и вектора перемещений на поверхности контакта при решении контактной задачи.

Метод трёх фаз Эшелби был предложен в работах [3], [4] и рассматривался в работах [2–10]. Для композита с волокнистыми включениями рассматриваются две постановки задач – в плоскости изотропии и в перпендикулярной к ней плоскости (деформирование в направлении оси волокон). Эффективный объёмный модуль и модуль сдвига в трансверсальной плоскости определяются соответственно по методу Эшелби из решения задач всестороннего растяжения (сжатия) поперек волокон и чистого сдвига в трансверсальной плоскости, которые решаются в полярных координатах. Модуль сдвига вдоль волокон определяется по методу Эшелби из решения задачи чистого сдвига вдоль волокон в цилиндрической системе координат. Эффективные модуль Юнга и коэффициент Пуассона в направлении волокон определяются из решения задачи об одноосном растяжении в цилиндрической системе координат. Эффективный коэффициент Пуассона определяется как отношение поперечной эффективной деформации к продольной при растяжении вдоль волокон.

Отметим, что согласно методу Эшелби рассматривается изолированное волокно с покрытием и эффективные свойства находятся для системы матрица–изолированное слоистое волокно. Тем не менее, как

установлено, например, в работе [10], метод самосогласованных фаз дает решение, хорошо описывающее эффективные свойства композита даже в случае высоких концентраций включений.

После получения соотношений для эффективных характеристик волокнистого композита его диссипативные характеристики предлагается определять по методу комплексных модулей.

Найдем сначала эффективные свойства волокнистого композита в плоскости трансверсальной изотропии, перпендикулярной волокнам. Рассмотрим изолированное волокно с покрытием и предположим, что поперек волокна заданы единичные радиальные деформации на бесконечности. При этом в фазах композита возникают только радиальные перемещения  $u_r^i(r)$ , которые имеют следующий вид:

$$u_r^i(r) = A_i r + \frac{B_i}{r} \quad (i = 1 \dots 4). \quad (5)$$

Здесь индексы указывают на принадлежность одной из фаз композита: 1 – перемещения во включении, 2 – перемещения в промежуточном слое, 3 – перемещения в матрице композита, 4 – слой «эффективной» матрицы, введённой в соответствие с используемым методом Эшелби.

Для исключения сингулярности в нуле следует принять  $B_1 = B_4 = 0$ . Из условия однородной единичной деформации на бесконечности следует, что  $A_4 = 1$ .

На контакте фаз ставятся условия непрерывности по радиальным перемещениям и напряжениям. Система граничных условий задачи имеет вид

$$\begin{cases} u_r^i(R_i) = u_r^{i+1}(R_i), \\ \sigma_{rr}^i(R_i) = \sigma_{rr}^{i+1}(R_i), \end{cases} \quad (i = 1 \dots 3). \quad (6)$$

В рассматриваемой постановке присутствуют радиальные и угловые деформации, которые определяются по соотношениям Коши (1):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^i(r) &= \partial u_r^i / \partial r = A_i - \frac{B_i}{r^2}, \\ \varepsilon_{\theta\theta}^i(r) &= u_r^i / r = A_i + \frac{B_i}{r^2}, \\ \theta &= \varepsilon_{rr}^i(r) + \varepsilon_{\theta\theta}^i(r) = \partial u_r^i / \partial r + u_r^i / r = 2A_i. \end{aligned}$$

В соответствии с законом Гука (3) найдем радиальные напряжения:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^i(r) &= 2\mu_i \varepsilon_{rr}^i + \lambda_i \theta = 2\mu_i \left( A_i - \frac{B_i}{r^2} \right) + 2\lambda_i A_i = 2K_i A_i - 2G_i \frac{B_i}{r^2}, \\ \sigma_{\theta\theta}^i(r) &= 2\mu_i \varepsilon_{\theta\theta}^i + \lambda_i \theta = 2\mu_i \left( A_i + \frac{B_i}{r^2} \right) + 2\lambda_i A_i = 2K_i A_i + 2G_i \frac{B_i}{r^2}, \\ \sigma_{zz}^i(r) &= 2\mu_i \varepsilon_{zz}^i + \lambda_i \theta = 2\lambda_i A_i.\end{aligned}$$

Уравнения равновесия (2) выполняются. Интегральная формула Эшелби (4) для определения эффективного объёмного модуля ставится на границе матрицы и «эффективной матрицы» и имеет вид

$$\int_0^{2\pi} \left( \sigma_{rr}^3 u_r^4 - \sigma_{rr}^4 u_r^3 + \sigma_{\theta\theta}^3 u_\theta^4 - \sigma_{\theta\theta}^4 u_\theta^3 + \sigma_{zz}^3 u_z^4 - \sigma_{zz}^4 u_z^3 \right) d\theta \Big|_{r=R_3} = 0.$$

В записанном равенстве присутствуют только радиальные перемещения, не зависящие от угловой координаты. Окончательно формула Эшелби принимает вид

$$\sigma_{rr}^3 u_r^4 - \sigma_{rr}^4 u_r^3 = 0. \quad (7)$$

Система уравнений (6),(7) включает 6 неизвестных коэффициентов, входящих в определение перемещений (5), и неизвестный эффективный объёмный модуль композита и состоит из 7 уравнений.

Формула для определения эффективного объёмного модуля следует из (7) после подстановки в него выражений для перемещений и напряжений:

$$\begin{aligned}\left( K_3 A_3 - B_3 G_3 \frac{1}{R_3^2} \right) R_3 - K_{\text{eff}} \left( A_3 R_3 + B_3 \frac{1}{R_3} \right) &= 0, \\ K_{\text{eff}} &= \frac{\left( K_3 A_3 R_3^2 - B_3 G_3 \right)}{\left( A_3 R_3^3 + B_3 R_3 \right)}.\end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $K_{23}^{\text{eff}}$  – эффективный объёмный модуль волокнистого композита в плоскости изотропии.

Далее рассмотрим чистый сдвиг в плоскости изотропии волокнистого композита. В этом случае присутствуют как радиальные, так и



угловые перемещения. Условия контакта включают в себя условия равенства угловых и радиальных перемещений  $(u_r, u_\theta)$ , а также радиальных и касательных напряжений  $(\sigma_{rr}^i, \sigma_{r\theta}^i)$ . Перемещения и напряжения находятся по формулам

$$\begin{aligned} u_r^i &= \left( -A_i 4\nu_i r^3 + B_i \frac{1}{r^3} + 4(1-\nu_i)C_i \frac{1}{r} + D_i r \right) \cos(2\theta), \\ u_\theta^i &= \left( A_i (6-4\nu_i)r^3 + B_i \frac{1}{r^3} - (2-4\nu_i)C_i \frac{1}{r} - D_i r \right) \sin(2\theta), \\ \sigma_{rr}^i &= 2 \left( -3B_i \frac{1}{r^4} - 4C_i \frac{1}{r^2} + D_i \right) G_i \cos(2\theta), \\ \sigma_{r\theta}^i &= 2 \left( 6A_i r^2 - 3B_i \frac{1}{r^4} - 2C_i \frac{1}{r^2} - D_i \right) G_i \sin(2\theta), \quad (i=1,2,3,4). \end{aligned} \quad (9)$$

В выражениях для напряжений и перемещений фазы волокна необходимо принять  $B_1 = C_1 = 0$ , чтобы исключить сингулярность в точке  $r=0$ . В фазе эффективной матрицы также считаем  $B_4 = C_4 = 0$  вследствие предположения однородности поля перемещений, а при записи напряжений следует учесть, что  $G_4 = G_{23}^{\text{eff}}$ . Из условия заданных однородных единичных деформаций на бесконечности следует, что  $A_4 = 0$  и  $D_4 = 1$ .

Условия контакта на всех граничных поверхностях слоистой структуры записываются следующим образом:

$$\begin{cases} u_r^{(i)}(R_i) = u_r^{(i+1)}(R_i), \\ u_\theta^{(i)}(R_i) = u_\theta^{(i+1)}(R_i), \\ \sigma_{rr}^{(i)}(R_i) = \sigma_{rr}^{(i+1)}(R_i), \\ \sigma_{r\theta}^{(i)}(R_i) = \sigma_{r\theta}^{(i+1)}(R_i), \end{cases} \quad i=1,2,3. \quad (10)$$

Интегральная формула Эшелби (4) для определения  $G_{23}^{\text{eff}}$  приобретает здесь следующий вид:

$$\int_{r=R_3} \left( \sigma_{rr}^3 u_r^4 - \sigma_{rr}^4 u_r^3 + \sigma_{r\theta}^3 u_\theta^4 - \sigma_{r\theta}^4 u_\theta^3 \right) dS = 0. \quad (11)$$

Подставляя в (11) приведённые выше выражения напряжений и перемещений с помощью (9) и учитывая (10), получим простое аналитическое выражение для определения эффективного модуля сдвига поперёк волокон.

По известным значениям эффективных объёмного модуля и модуля сдвига определяем эффективный модуль Юнга при растяжении поперёк волокон композита по формуле

$$E_{22}^{\text{eff}} = \frac{9K_{23}^{\text{eff}} G_{23}^{\text{eff}}}{3K_{23}^{\text{eff}} + G_{23}^{\text{eff}}}. \quad (12)$$

Для определения модуля сдвига в направлении армирующих волокон рассмотрим задачу чистого сдвига вдоль волокон композита. Нетрудно видеть, что для этого случая перемещения и напряжения, удовлетворяющие уравнениям равновесия (2), имеют вид

$$\begin{aligned} u_i &= \left( A_i r + B_i \frac{1}{r} \right) \cos(\theta), \\ \sigma_{rr}^i &= G_i \left( A_i - B_i \frac{1}{r^2} \right) \cos(\theta), \quad (i = 1 \dots 4). \end{aligned}$$

Для исключения сингулярности следует принять  $B_1 = B_4 = 0$ . Условие заданных однородных деформаций  $A_1 = 1$ .

Неизвестные коэффициенты в последних соотношениях находят­ся из условий контакта. Граничные условия для изолированной системы слоистое волокно–матрица имеют следующий вид:

$$\begin{cases} u_r^i(R_i) = u_r^{i+1}(R_i), \\ \sigma_{rr}^i(R_i) = \sigma_{rr}^{i+1}(R_i), \end{cases} \quad (i = 1 \dots 3).$$

Интегральная формула Эшелби (4) здесь используется для определения эффективного модуля сдвига  $G_{12}^{\text{eff}}$  и имеет здесь следующий вид:

$$\int_{r=R_3} \left( \sigma_{rr}^3 u_r^4 - \sigma_{rr}^4 u_r^3 \right) dS = 0.$$

Подставляя в это соотношение выражения для перемещений и напряжений, получим

$$\int_{r=R_3} \left( G_3 \left( A_3 - B_3 \frac{1}{r^2} \right) r - G_{12}^{\text{eff}} \left( A_3 r + B_3 \frac{1}{r} \right) \right) \cos^2(\theta) d\theta = 0.$$

Окончательно, после некоторых преобразований,

$$G_{12}^{\text{eff}} = \frac{(A_3 R_3^2 - B_3)}{(A_3 R_3^2 + B_3) S} G_3. \quad (13)$$

Для определения модуля Юнга в направлении армирующих волокон зададим однородную деформацию  $\varepsilon_0$  вдоль оси цилиндра. В этом случае перемещения вдоль оси цилиндра равны во всех фазах и изменяются по линейному закону, а напряжения определяются из закона Гука:

$$\begin{aligned} w_i(r) &= \varepsilon_0 z, \\ \sigma_{zz}^i &= 2\mu_i \varepsilon_{zz} + \lambda_i (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) = \\ &= 2\mu_i \varepsilon_0 + \lambda_i (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_0) = E_i \varepsilon_0 + \lambda_i \varepsilon_{rr}. \end{aligned}$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} u_i(r) &= A_i r + B_i \frac{1}{r}, \\ \sigma_{rr}^i &= \nu_i \varepsilon_0 + 2A_i (\lambda_i + G_i) - 2B_i G_i \frac{1}{r^2}, \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

где  $A_i, B_i$  – неизвестные коэффициенты;  $r$  – координата вдоль радиуса цилиндров;  $\lambda_i, G_i$  – параметры Ламе и модули сдвига в направлении вдоль волокон.

Для исключения сингулярности в нулевой точке необходимо принять в первой фазе коэффициент  $B_1 = 0$ . Во внешнем бесконечном слое эффективной матрицы поле перемещений предполагается однородным, поэтому также необходимо принять  $B_4 = 0$ .

Условия контакта в направлении растяжения (вдоль волокон) по перемещениям и напряжениям выполняются автоматически. Перемещения вдоль угла  $\theta$  отсутствуют. Поэтому необходимо записать условия контакта только в направлении радиуса цилиндров. Приравнявая радиальные перемещения и напряжения на границах контакта между

слоями ( $r = \{R_1, R_2, R_3\}$ ), получаем следующую систему граничных условий для определения неизвестных констант:

$$\begin{cases} u_r^i(R_i) = u_r^{i+1}(R_i), \\ \sigma_{rr}^i(R_i) = \sigma_{rr}^{i+1}(R_i), \end{cases} \quad (i = 1 \dots 3).$$

Эффективный модуль Юнга композита определим из условия средних напряжений в направлении волокон исходной трёхфазной среды и эквивалентной гомогенной среды:

$$E_{11}^{\text{eff}} = \sum_{i=1}^3 \frac{R_i - R_{i-1}}{R_3} (E_i + \lambda_i \varepsilon_{rr}^i). \quad (14)$$

Эффективный коэффициент Пуассона  $\nu_{\text{eff}}$  определяется в рамках рассматриваемой постановки как отношение деформации вдоль радиуса цилиндра к деформации вдоль волокон на границе  $R_3$ :

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{\partial u_3}{\partial r} \bigg/ \frac{\partial w_3}{\partial z} = \frac{A_3 R_3 + B_3 / R_3}{\varepsilon_0 \cdot R_3}. \quad (15)$$

## 2. Определение эффективных диссипативных характеристик

Эффективные диссипативные характеристики волокнистого композита будем определять по методу комплексных модулей. Для вычислений удобно определять характеристики материалов через модуль всестороннего сжатия и модуль сдвига. Полагаем, что при всестороннем нагружении демпфирования практически не возникает, то есть мнимая часть комплексного объёмного модуля принимается равной нулю. Таким образом, в полученные решения для эффективных модулей (8), (12)–(15) подставим комплексные значения для модулей сдвига волокна, матрицы и покрытия:

$$G_i = G_i' + G_i'' \quad (i = 1 \dots 3).$$

Здесь  $G_i'$  – классический модуль сдвига,  $G_i''$  – мнимый сдвиговой модуль материала (модуль потерь).

Выделяя действительную и мнимую часть решений для эффективных модулей (8), (12)–(15), получим соответственно эффективные модули упругости композита и соответствующие эффективные модули потерь.

### 3. Примеры численных вычислений и обсуждение результатов

Для численных вычислений будем использовать данные статьи [10], где выполнены расчёты диссипативных свойств композита на основе эпоксидного связующего со сферическими включениями стекла. В соответствии с [10] определим вязкоупругие свойства материалов через модуль всестороннего сжатия и модуль сдвига и примем следующие исходные параметры фаз:

Материал	Объемный модуль, ГПа	Комплексный модуль сдвига, ГПа
Стекланные волокна-включения	50	30
Вязкое полимерное покрытие из полиуретана	3	$0,02 + i 0,01$
Эпоксидная матрица	2.5	$2,5 + i 0,005$

В качестве материала вязкоупругих покрытий на волокнах традиционно используются полиуретаны горячего отверждения, например российские марки СКУ-ПФЛ-100, СКУ-ПФЛ-7, НИЦ-ПУ-5. Последний вариант обладает повышенной ударовязкостью и износостойкостью на сдвиг и применяется в бронезилетах. Кроме этого, может быть использован высокомодульный полиэтилен, на основе которого в настоящее время выполняются бронекаски с наполнителем из кевлара.

Результаты вычислений эффективных вязкоупругих свойств композита в зависимости от толщины покрытия в полулогарифмических координатах представлены на рис. 1–5. Пунктиром обозначены характеристики композита с объёмной долей волокон 30 %, штриховой линией – 40 % и сплошной линией – 50 %.

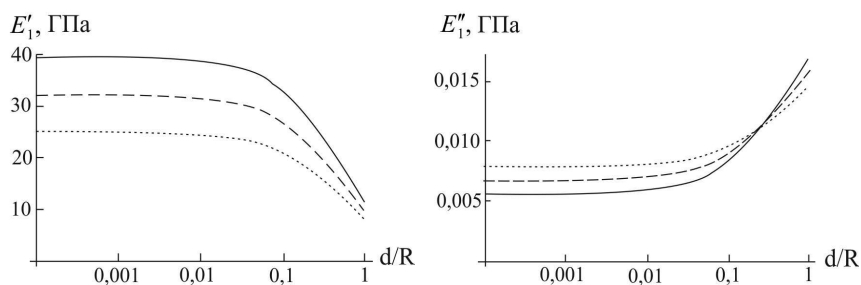


Рис. 1. Зависимость эффективного модуля Юнга в направлении волокон  $E_1^{\text{eff}}$  от толщины покрытия

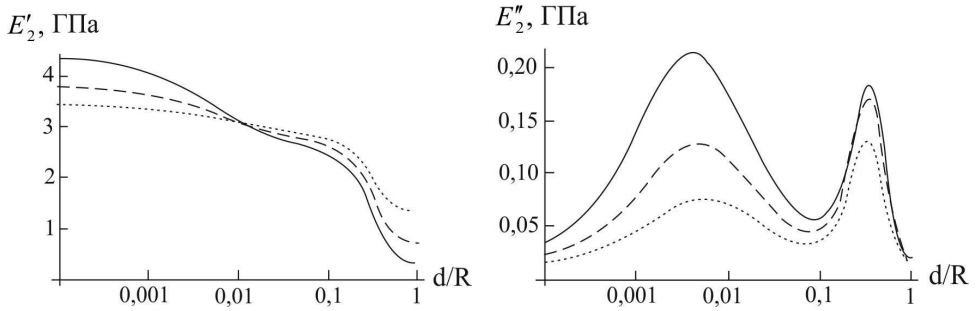


Рис. 2. Зависимость эффективного модуля Юнга в поперечном направлении  $E_2^{\text{eff}}$  от толщины покрытия

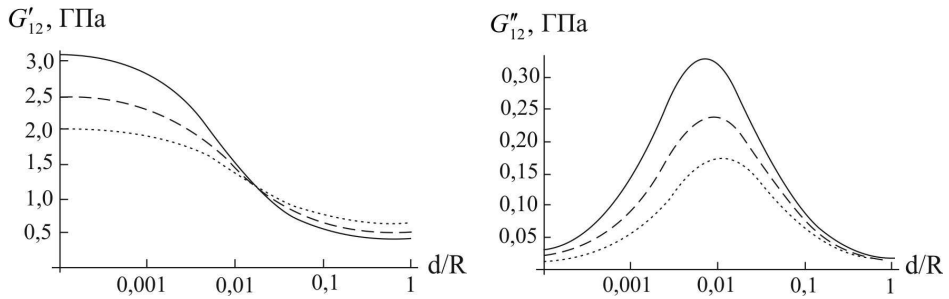


Рис. 3. Зависимость эффективного модуля сдвига в направлении вдоль волокон  $G_{12}^{\text{eff}}$  от толщины покрытия

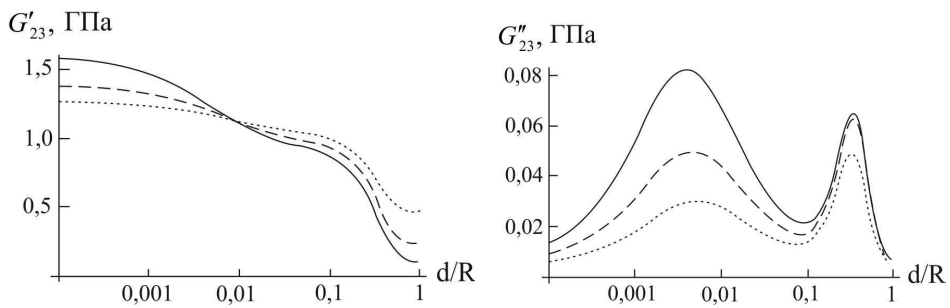


Рис. 4. Зависимость эффективного модуля сдвига в поперечном направлении  $G_{23}^{\text{eff}}$  от толщины покрытия

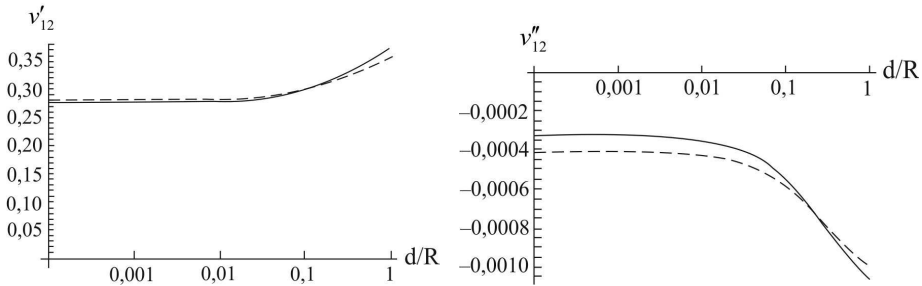


Рис. 5. Зависимость эффективного коэффициента Пуассона  $v_{12}^{eff}$  в поперечном направлении от толщины покрытия

Зависимость упругих модулей  $E_2^{eff}$  и  $G_{12}^{eff}$  содержит два выраженных пика диссипативных свойств. При этом один из пиков соответствует очень малой относительной толщине вязкого покрытия на волокнах (амплитуда этого пика увеличивается при увеличении объёмной доли волокон). Таким образом, появляется возможность получения повышенных диссипативных свойств монослоя в области малых толщин покрытия на волокнах, при которых сохраняются высокие жесткостные свойства материала. При этом происходит увеличение модуля более чем в пять раз и уменьшение модулей упругости не более чем на 15–20 %.

Коэффициент Пуассона материала практически не изменяется (см. рис. 5). Появление отрицательных мнимых значений коэффициента Пуассона (см. рис. 5) соответствует сдвигу по фазе в скоростях деформаций в продольном и поперечном направлении. Рассматриваемая модель позволяет выбрать оптимальную толщину покрытия на волокнах, при которой могут быть получены наиболее высокие демпфирующие свойства монослоя.

Отметим, что эффект второго пика в зависимости от эффективного модуля потерь ранее был установлен в работе [10] для композитов со сферическими включениями. Чтобы объяснить эффект аномального увеличения эффективного модуля потерь при столь малых толщинах вязкоупругого покрытия, следует принять во внимание, что при изменении толщины покрытия происходит смена механизма диссипации. Рассмотрим случай, когда на бесконечности к композиту приложены гармонические деформации  $\bar{\varepsilon}_0 = \bar{\varepsilon} e^{i\omega t}$  с частотой  $\omega = 1$  рад/с и амплитудой  $\bar{\varepsilon}$ :

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Такой тензор деформации соответствует чистому сдвигу. Расчеты напряженного состояния, сделанные с помощью построенного аналитического решения для плоскости изотропии, показали, что максимумам энергии диссипации для относительно толстого покрытия (первый пик) и второго пика (тонкое покрытие) соответствуют следующие тензоры деформаций в покрытии:

$$\bar{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \bar{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Причем максимуму второго пика соответствуют значительные амплитуды деформаций  $\gamma \approx 10$ , в то время как  $\alpha \approx 1$ . Учитывая замечание, сделанное во введении о высоких демпфирующих свойствах, связанных со сдвигом в слоистой полосе, можно дать объяснение аномальных эффектов увеличения демпфирующих свойств в случае тонких вязкоупругих покрытий. Эти эффекты связаны со сменой механизма диссипации с объемного на сдвиговой и значительными амплитудами деформаций сдвига.

Далее изучим диссипативные свойства плоского композитного слоистого пакета с квазиизотропными эффективными свойствами. Слоистый композит составлен из четырёх однонаправленных слоёв с углами армирования  $\varphi_i = 0^\circ, +45^\circ, -45^\circ$  и  $90^\circ$ . В качестве армирующих элементов в монослоях рассматриваются волокна с вязкоупругими покрытиями. Для определения эффективных свойств слоистого пакета и его демпфирующих характеристик воспользуемся результатами исследований, полученными для монослоя и известными соотношениями механики композитов. Физические соотношения для слоистого композита с изотропным армированием имеют вид [11]

$$\sigma_x = \bar{B}_{11}\varepsilon_x + \bar{B}_{12}\varepsilon_y, \quad \sigma_y = \bar{B}_{21}\varepsilon_x + \bar{B}_{22}\varepsilon_y, \quad \tau_x = \bar{B}_{33}\gamma_{xy}.$$

Здесь  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  – деформации слоистого композита;  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_x$  – соответствующие напряжения.

Коэффициенты в физических соотношениях имеют следующий вид:



$$\bar{B}_{pq} = \sum_1^k \bar{h}_i b_{pq}^i; \bar{h}_i = h_i / h; h = \sum_1^k h_i, \quad p, q = 1, 2, 3,$$

$$b_{11}^i = \bar{E}_1^i \cos^4 \varphi_i + 2\bar{E}_1^i \mu_{12}^i \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + \bar{E}_2^i \sin^4 \varphi_i + G_{12}^i \sin^2 2\varphi_i,$$

$$b_{12}^i = b_{21}^i = (\bar{E}_1^i + \bar{E}_2^i - 4G_{12}^i) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + \bar{E}_1^i \mu_{12}^i (\sin^4 \varphi_i + \cos^4 \varphi_i),$$

$$b_{22}^i = \bar{E}_1^i \sin^4 \varphi_i + 2\bar{E}_1^i \mu_{12}^i \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + \bar{E}_2^i \cos^4 \varphi_i + G_{12}^i \sin^2 2\varphi_i,$$

где  $h_i$  – толщина монослоя;  $h$  – общая толщина слоистого композита;  $\bar{h}$  – относительная толщина монослоя в пакете.

Эффективные модули упругости для ортотропного варианта армирования определяются по формулам [11]

$$E_x = \frac{\bar{B}_{11}\bar{B}_{22} - \bar{B}_{12}^2}{\bar{B}_{22}}; E_y = \frac{\bar{B}_{11}\bar{B}_{22} - \bar{B}_{12}^2}{\bar{B}_{11}}; G_{xy} = \bar{B}_{33}; \nu_{xy} = \frac{\bar{B}_{12}}{\bar{B}_{11}}; \nu_{yx} = \frac{\bar{B}_{12}}{\bar{B}_{22}}.$$

Для конкретного примера рассмотрим четырёхслойный пакет со слоями равной толщины (при этом относительная толщина каждого слоя составляет 0,25). В этом случае имеют место равенства [11]

$$E_x = \frac{\bar{B}_{11}\bar{B}_{22} - \bar{B}_{12}^2}{\bar{B}_{22}} = E_y = \frac{\bar{B}_{11}\bar{B}_{22} - \bar{B}_{12}^2}{\bar{B}_{11}}; \nu_{xy} = \frac{\bar{B}_{12}}{\bar{B}_{11}} = \nu_{yx} = \frac{\bar{B}_{12}}{\bar{B}_{22}}.$$

Записанные выше соотношения позволяют получить эффективные свойства композитного пакета через соответствующие характеристики монослоя.

Результаты вычислений упругих параметров слоистого композита представлены на рис. 6–8. Пунктиром обозначены характеристики композита с объёмной долей волокон 30 %, штриховой линией – 40 % и сплошной линией – 50 %.

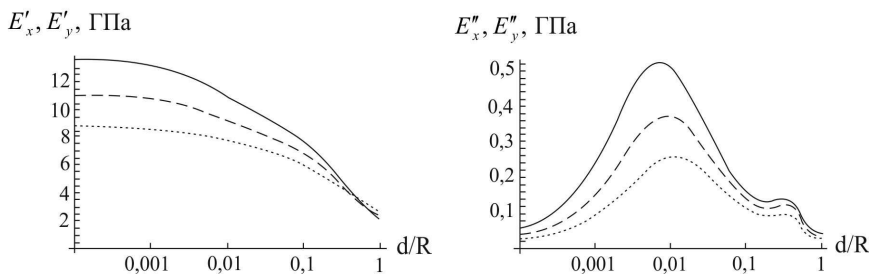


Рис. 6. Зависимость модуля Юнга и модуля потерь слоистого пакета от толщины покрытия

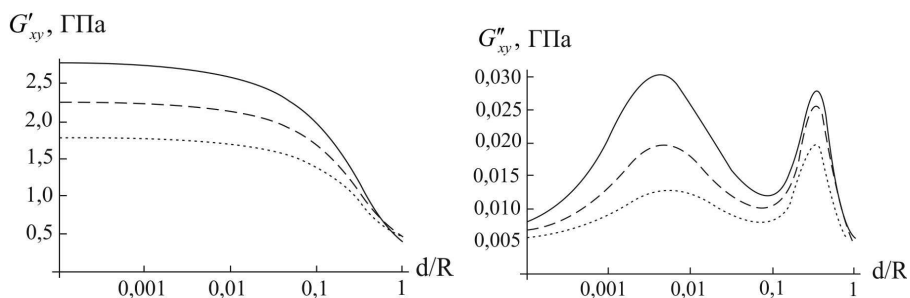


Рис. 7. Зависимость вязкоупругих сдвиговых свойств слоистого пакета от толщины покрытия

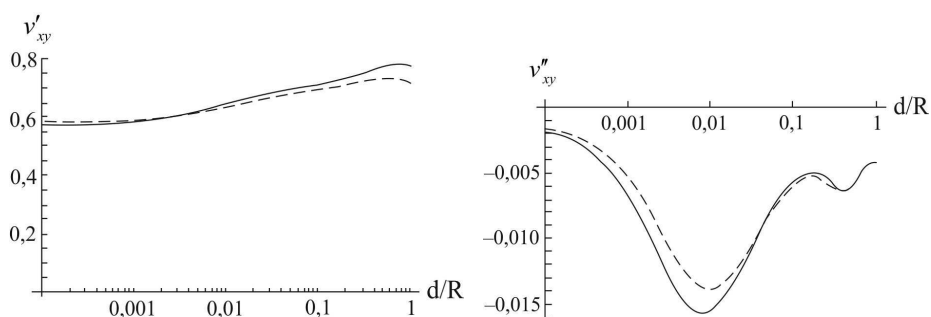


Рис. 8. Зависимость коэффициента Пуассона слоистого пакета от толщины покрытия

Отметим, что для слоистого пакета также имеет место аномальное повышение диссипативных эффективных характеристик. Важно отметить, что максимум диссипативных свойств пакета реализуется для значений толщин тонких покрытий, почти совпадающих с оптимальными значениям, найденными для монослоя. Пик модулей потерь несколько смещается в область больших толщин покрытия, что является более выгодным с технологической точки зрения. Изменение объёмного содержания включений приводит к значительному повышению амплитудных значений как диссипативных, так и жесткостных характеристик слоистого композита, при этом эффективный коэффициент Пуассона композита практически не изменяется. Важным обстоятельством является тот факт, что слоистый пакет обладает изотропией в плоскости. Вследствие этого композит позволяет демпфировать внешние нагрузки, действующие в различных направлениях.

## **Выводы**

В работе представлена модель, объясняющая эффекты проявления аномально высоких демпфирующих свойств у композитов с включениями, имеющими вязкоупругое покрытие в области малых толщин покрытий. Предложена методика, позволяющая найти оптимальную толщину вязкоупругого покрытия на армирующих волокнах слоистого композиционного материала с целью получения повышенных эффективных жесткостных и демпфирующих характеристик. Применение континуальных моделей механики композиционных материалов и метода комплексных модулей в совокупности позволяет получить аналитические выражения для определения эффективных вязкоупругих характеристик как монослоя, так и слоистого композита. На основе данных аналитических решений предлагается проводить процедуру оптимизации с целью выбора оптимальных параметров структуры композиционного материала (толщина покрытия, объемная доля волокон, углы армирования и т.д.).

Показано, что для оптимальных толщин вязкого покрытия материал приобретает повышенные демпфирующие свойства (происходит увеличение модулей потерь более чем в 5 раз), сохраняя свои жесткостные свойства. При этом эффективные модули потерь многократно превышают модули потерь вязкоупругого покрытия. Отметим, что обнаружение указанного эффекта чисто экспериментальным путём представляется маловероятным вследствие необходимости точного попадания в узкий интервал оптимальных значений толщины покрытия, пределы которого к тому же меняются в зависимости от различных параметров структуры композита. Применение представленной математической модели позволяет создать воспроизводимую и надёжную технологию повышения диссипативных свойств слоистых композитов за счёт определения допустимых (оптимальных) характеристик структуры композита.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 12–01–00273–а, 11–01–12081 офи-м) и при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг.» Госконтракты № 14.740.11.0995, 02.740.11.0790.

### **Библиографический список**

1. Christensen R.M., Lo K.H. Solutions for effective shear properties in three phase and cylinder models // *J. Mech. And Phys. Solids*. – 1979. – No. 27. – P. 315–330.
2. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 335 с.
3. Kerner E.H. The elastic and thermoelastic properties of composite media // *Proc. Phys. Soc.* – 1956. –Vol. 69 – P. 808.
4. Van der Pol C. On the rheology of concentrated dispersions // *Rheol. Acta* – 1958. –Vol. 1 – P. 198.
5. Christensen R.M. Critical evaluation for a class of micro-mechanics models // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* – 1990. – Vol. 38. – Iss. 3. – P. 379–404.
6. Herve E., Zaoui A. N-layered inclusion-based micromechanical modelling // *Int. J. Engng Sci.* – 1993. – Vol. 31, No.1 – P. 1–10.
7. Christensen R.M. Two Theoretical Elasticity Micromechanics Models // *Journal of Elasticity* – 1998. –Vol. 50. – Iss. 1 – P. 15–25.
8. Zheng Q.-S., Du D.-X. An explicit and universally applicable estimate for the effective properties of multiphase composites which accounts for inclusion distribution // *J. Mech. Phys. Solids*. – 2001. – Vol. 49. – No. 11. – P. 2765–2788.
9. Christensen R.M. Two Theoretical Elasticity Micromechanics Models // *Journal of Elasticity* – 1998. – Vol. 50. – Iss. 1 – P. 15–25.
10. Gusev A.A., Lurie S.A. Loss amplification effect in multiphase materials with viscoelastic interfaces // *Macromolecules*. – 2009. – Vol. 42. – Iss. 14. – P. 5372–5377.
11. Васильев В.В. Композиционные материалы: справочник. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.

### **References**

1. Christensen R.M., Lo K.H. Solutions for effective shear properties in three phase and cylinder models. *J. Mech. And Phys. Solids*, 1979, no. 27, pp. 315 – 330.
2. Christensen R. *Vvedenie v mehaniku kompozitov* [Introduction in the composite mechanics]. Moscow: Mir, 1982, 335 p. (Christencen R. M. *Mechanics of composite materials*. New York: John Wiley & Sons Inc., 1979. 335 p.)

3. Kerner E.H. The elastic and thermoelastic properties of composite media. *Proc. Phys. Soc.*, 1956, vol. 69, p. 808.

4. Van der Pol C. On the rheology of concentrated dispersions. *Rheol. Acta*, 1958, vol. 1, p. 198.

5. Christensen R.M. Critical evaluation for a class of micro-mechanics models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1990, vol. 38, Iss.3, pp. 379–404.

6. Herve E., Zaoui A. N-layered inclusion-based micromechanical modeling. *Int. J. Engng Sci.*, 1993, vol. 31, no.1, pp. 1–10.

7. Christensen, R.M. Two Theoretical Elasticity Micromechanics Models. *Journal of Elasticity*, 1998, vol. 50, iss. 1, pp. 15–25.

8. Zheng Q.-S., Du D.-X. An explicit and universally applicable estimate for the effective properties of multiphase composites which accounts for inclusion distribution. *J. Mech. Phys. Solids*, 2001, vol. 49, no. 11, pp. 2765–2788.

9. Christensen R.M. Two Theoretical Elasticity Micromechanics Models. *Journal of Elasticity*, 1998, vol. 50, iss. 1, pp. 15–25.

10. Gusev A.A., Lurie S.A. Loss amplification effect in multiphase materials with viscoelastic interfaces. *Macromolecules*, 2009, vol. 42, iss. 14, pp. 5372–5377.

11. Vasilev V.V. Композитсионние материали. Справочник [Composite materials. Handbook]. Moscow: Mashinostroenie, 1990, 512 p.

### Сведения об авторах

**Лурье Сергей Альбертович** (Москва, Россия) – доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией Института прикладной механики РАН (119991, г. Москва, Ленинский пр., д.32А, e-mail: salurie@mail.ru).

**Соляев Юрий Олегович** (Москва, Россия) – научный сотрудник Института прикладной механики РАН (119991 г. Москва, Ленинский пр., д.32А, e-mail: solyaev@bk.ru).

**Андриянина Марина Алексеевна** (Москва, Россия) – заведующая отделом Национального института авиационных технологий (127051, Москва, ул. Петровка, 24, e-mail: niat3.10@gin.ru).

**Лыкосова Елена Дмитриевна** (Москва, Россия) – младший научный сотрудник Института прикладной механики РАН (119991 г. Москва, Ленинский пр., д.32А, e-mail: elykosova@mail.ru).

### **About the authors**

**Lurie Sergey Albertovich** (Moscow, Russian Federation) – Doctor of Sciences, Professor, Head of Laboratory Institute of Applied Mechanics RAS, Leading Researcher CC RAS (32A, Leninsky av., Moscow, 119991, Russian Federation, e-mail: salurie@mail.ru).

**Andrunina Marina Alekseevna** (Moscow, Russian Federation) – Head of Department of National Institute of Aviation Technologies Co. (24, Petrovka str., Moscow, 127051, Russian Federation, e-mail: niat3.10@gin.ru).

**Solyaev Yuri Olegovich** (Moscow, Russian federation) – Researcher, Institute of Applied Mechanics RAS, (d.32A, Leninsky av., Moscow, 119991, Russian Federation, e-mail: solyaev@bk.ru).

**Lykosova Elena Dmitrievna** (Moscow, Russian Federation) – Researcher, Institute of Applied Mechanics RAS (d.32A, Leninsky av., Moscow, 119991, Russian Federation, e-mail: elykosova@mail.ru).

Получено 26.08.2012