УДК 539.3:678.4

А.А. Адамов

Институт механики сплошных сред УрО РАН

ОБ ОДНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ СООТНОШЕНИЙ НАПРЯЖЕНИЕ - ДЕФОРМАЦИЯ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ ГИПЕРУПРУГИХ НЕСЖИМАЕМЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Abstract

In this work new general forms of the relation between the stress tensor and deformation measure tensors have been developed in the context of the model for a hyperelastic incompressible isotropic body, which involves representation of potential in terms of invariants of Cauchy-Green or Finger deformation measure tensors. The main difference from the previous approaches is the use of the mean physical stress as Lagrangian multiplier.

Принятые обозначения [1, 2]

$i, j = 1,2,3$ - индексы, применяется суммирование по "немому" индексу;

C_0, C_t - конфигурации недеформированного и деформированного состояний;

q^i - материальные координаты точки сплошной среды в C_0;

$\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(q^1, q^2, q^3\right)$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}\left(q^1, q^2, q^3\right)$ - вектор-радиусы точки в C_0 и C_t;

$\mathbf{r}_i = \partial\mathbf{r}/\partial q^i$, $\mathbf{r}^i$; $\mathbf{R}_i = \partial\mathbf{R}/\partial q^i$, $\mathbf{R}^i$ - основной и взаимный векторные базисы в C_0 и C_t;

$\mathbf{g} = \mathbf{r}^i\mathbf{r}_i$, $\mathbf{G} = \mathbf{R}^i\mathbf{R}_i$ - метрические тензоры в C_0 и C_t;

$\mathbf{G}^\times = \mathbf{r}^i\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j\mathbf{r}^j$, $\mathbf{m} = \left(\mathbf{G}^\times\right)^{-1} = \mathbf{r}_i\mathbf{R}^i \cdot \mathbf{R}^j\mathbf{r}_j$ - мера деформаций Коши - Грина и обратный к ней тензор;

$\mathbf{g}^\times = \mathbf{R}^i\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j\mathbf{R}^j$, $\mathbf{M} = \left(\mathbf{g}^\times\right)^{-1} = \mathbf{R}_i\mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j\mathbf{R}_j$ - меры деформаций Альманзи и Фингера;

I_i - главные инварианты $\mathbf{G}^\times$ и $\mathbf{M}$;

$\mathbf{T} = t^{ij}\mathbf{R}_i\mathbf{R}_j$ - симметричный тензор напряжений Коши;

$\mathbf{Q} = \mathbf{r}_i\mathbf{R}^i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}^j\mathbf{r}_j = t^{ij}\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j$ - "энергетический" тензор напряжений.

Для изотропного несжимаемого тела при бесконечно малых изотермических деформациях связь тензора напряжений с тензором деформаций $\mathbf{e}$ вместе с условием несжимаемости, записанным через первый инвариант $\mathbf{e}$, имеет вид

$$\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{e} + p\mathbf{g}; I_1(\mathbf{e}) = 0. \tag{1}$$

Закон Гука при этом содержит только одну физическую константу - модуль сдвига $\mu > 0$, множитель Лагранжа p является функцией координат материальной точки и определяется при решении конкретной краевой задачи. В C_0 тензор напряжений является шаровым и не зависит явным образом от модуля сдвига.

При конечных изотермических деформациях применяют модель гиперупругого изотропного тела, определяемую заданием потенциала W, выраженного через 3 независимых инварианта деформации. В часто встречающемся случае использования главных инвариантов меры деформаций Коши - Грина (равных главным инвариантам меры Фингера) условием несжимаемости является связь $I_3 = 1$, тензор напряжений Коши с точностью до неопределенного множителя Лагранжа p_1 можно записать в форме Фингера [1]:

$$\mathbf{T} = 2\psi_1\mathbf{M} + 2\psi_2\mathbf{M}^2 + p_1\mathbf{G}, \tag{2}$$

где $\psi_1(I_1, I_2)$ и $\psi_2(I_1, I_2)$ - обобщенные модули несжимаемого гиперупругого изотропного тела, определяемые формулами

$$\psi_1 = \frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial W}{\partial I_2}; \quad \psi_2 = -\frac{\partial W}{\partial I_2} \tag{3}$$

и связанные соотношением

$$\frac{\partial}{\partial I_2}(\psi_1 + I_1\psi_2) = -\frac{\partial\psi_2}{\partial I_1}.$$

В конфигурации C_0 тензор напряжений (2) также является шаровым [2], но зависящим от обобщенных модулей, что свидетельствует о различии физического смысла множителей Лагранжа в (1) и (2):

$$\mathbf{T} = \left(2\psi_1^{(0)} + 2\psi_2^{(0)} + p_1\right)\mathbf{g}.$$

В последней формуле $\psi_1^{(0)} = \psi_1(3,3)$; $\psi_2^{(0)} = \psi_2(3,3)$.

Преобразование формы соотношений напряжение – деформация

Среднее физическое напряжение p в конфигурации C_t для (2) определяется выражением

$$3p = I_1(\mathbf{T}) = \mathbf{T}\cdot\mathbf{G} = 2\psi_1 I_1(\mathbf{M}) + 2\psi_2 I_1(\mathbf{M}^2) + 3p_1 = 2\psi_1 I_1 + 2\psi_2(I_1^2 - 2I_2) + 3p_1.$$

Выразив отсюда p_1 и подставив в (2), получим новую форму представления тензора напряжений, идентичную закону Гука (1) по физическому смыслу множителя Лагранжа,

$$\mathbf{T} = 2\psi_1\left(\mathbf{M} - \frac{I_1}{3}\mathbf{G}\right) + 2\psi_2\left(\mathbf{M}^2 - \frac{I_1^2 - 2I_2}{3}\mathbf{G}\right) + p\mathbf{G}. \tag{4}$$

Аналогичную процедуру преобразования можно выполнить и для других форм представления тензора напряжений в несжимаемых гиперупругих телах. Например, применение теоремы Гамильтона - Кэли [2] в (2) для вычисления $\mathbf{M}^2$ приводит к другой, также широко применяемой, форме представления тензора напряжений

$$\mathbf{T} = 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\mathbf{M} - 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{g}^{\times} + p_2\mathbf{G}, \tag{5}$$

где множитель Лагранжа $p_2 = p_1 - 2\psi_2 I_2$.

Преобразование (5) к форме со средним физическим напряжением в качестве множителя Лагранжа дает

$$\mathbf{T} = 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\left(\mathbf{M} - \frac{I_1}{3}\mathbf{G}\right) - 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\left(\mathbf{g}^{\times} - \frac{I_2}{3}\mathbf{G}\right) + p\mathbf{G}. \tag{6}$$

Не представляет труда переход от (4,6) к другим мерам напряженного состояния. Для "энергетического" тензора напряжений, совпадающего для несжимаемого тела с тензором напряжений Пиолы - Кирхгофа 2-го рода [2], имеем соответственно

$$\mathbf{Q} = 2\psi_1\left(\mathbf{g} - \frac{I_1}{3}\mathbf{m}\right) + 2\psi_2\left(\mathbf{G}^{\times} - \frac{I_1^2 - 2I_2}{3}\mathbf{m}\right) + p\mathbf{m}; \tag{7}$$

$$\mathbf{Q} = 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\left(\mathbf{g} - \frac{I_1}{3}\mathbf{m}\right) - 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\left(\mathbf{m}^2 - \frac{I_2}{3}\mathbf{m}\right) + p\mathbf{m}. \tag{8}$$

Заметим, что при задании W в виде функции от инвариантов Пенна [3] $\Gamma_1 = I_1 I_3^{-1/3}$; $\Gamma_2 = I_1 I_3^{-2/3}$; $\Gamma_3 = 1$ или функции главных относительных удлинений λ_i, множитель Лагранжа также имеет смысл среднего физического напряжения.

Использование полученных представлений

Полученные представления (4, 6-8) обладают полезным преимуществом по сравнению с исходными уравнениями (2, 5). Приведем 2 примера.

Благодаря совпадению физического смысла множителей Лагранжа переход от конечных деформаций к малым позволяет в пошаговой процедуре метода конечных элементов получить линеаризованную матрицу жесткости, совпадающую с соответствующей матрицей жесткости для упругого несжимаемого тела при малых деформациях. Аналогична ситуация при рассмотрении эффектов 2-го порядка [1-2].

Появляется возможность эмпирического обобщения упругих моделей на случай изотермического вязкоупругого поведения путем символической замены упругих постоянных операторными выражениями в представлении "энергетического" тензора напряжений (7-8). Такая процедура широко применяется в линейной теории вязкоупругости [3]. Получаемые при этом модели инвариантны к преобразованиям системы координат, так как тензор $\mathbf{Q}$ определен в векторном базисе конфигурации C_0. Простейшая легко идентифицируемая модель вязкоупругого несжимаемого изотропного материала на основе потенциала Трелоара (упругое "неогуково тело", $W = \mu(I_1 - 3)/2$) построена в [4] путем замены упругой постоянной μ, имеющей смысл модуля сдвига при малых деформациях, интегральным оператором наследственной теории вязкоупругости $\overline{\mu}$,

$$\mathbf{Q}(t) = \overline{\mu}\left[\mathbf{g}\frac{I_1(t)}{3}\mathbf{m}(t)\right] + p\,\mathbf{m}(t); \quad \overline{\mu}\, f(t) \equiv \int_0^t R_\mu(t-\tau)\,df(\tau),$$

где $R_\mu(t)$ - положительная монотонно убывающая функция релаксации.

Библиографический список

1. Лурье А.И. Теория упругости. - М.: Наука, 1970. - 940 с.
2. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. - М.: Наука, 1980. - 512 с.
3. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. - М.: Наука, 1977. - 384 с.
4. Penn R.W. Volume changes accompanying the extension of rubber // Trans. Soc. Rheol. - 1970. - Vol. 14. - P. 509-517.
5. Адамов А.А. Об идентификации модели наследственной вязкоупругости при конечных деформациях // Структурная механика неоднородных сред: Сб. науч. тр. / Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. - С. 8-11.

Получено 12.02.2001