УДК 539.374

Ю.И. Кадашевич, С.П. Помыткин

Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров

ЛЕСТНИЧНЫЕ МОДЕЛИ И ДЕФОРМАЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

Abstract

It is marked the stairs models of continuum give the constitutive relations with the partial differential equations. Consequences of common solution are analyzed under the active biaxial loading for particular variant of the theory. It is noted the obtained results coincide with solutions in the framework of deformation theory of plasticity with linear hardening. However it is affirmed the researched variant of theory can describe the material behaviour adequately under complex nonproportional cyclic loading with the intermediate unloadings and the neutral loading.

В работе* была высказана новая идея построения теории пластичности, основанная на обобщении лестничных моделей среды. Оказалось, что такой подход приводит к принципиально новому типу определяющих соотношений, содержащих дифференциальные уравнения в частных производных. В данной работе выбран конкретный вариант новой теории и приведен анализ следствий теории.

Согласно работе* рассмотрим следующую группу определяющих соотношений при полностью активном нагружении в двуосном случае:

$$\frac{\partial\varepsilon_1^p/\partial t}{\partial\varepsilon_2^p/\partial t}=\frac{\tau_1}{\tau_2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\tau_1}{\partial\xi}=C_1\varepsilon_1^p;\ \frac{\partial\tau_2}{\partial\xi}=C_1\varepsilon_2^p;\ C_1=\text{const}, \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\tau_1&=\tau(\xi)\cdot\cos\omega(\xi,t)\\ \tau_2&=\tau(\xi)\cdot\sin\omega(\xi,t)\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}&\varepsilon_1^p(\xi,0)=0;\ \tau_1(x,t)=\sigma_1,\\ &\varepsilon_2^p(\xi,0)=0;\ \tau_2(x,t)=\sigma_2,\end{aligned} \tag{4}$$

$$\left\langle\varepsilon_1^p\right\rangle=\int_0^x\varepsilon_1^p(\xi,t)\,d\xi;\qquad \left\langle\varepsilon_2^p\right\rangle=\int_0^x\varepsilon_2^p(\xi,t)\,d\xi. \tag{5}$$

---

* Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. О реологических моделях неупругости конструкционных материалов // Машины и аппараты целлюлозно-бумажного производства: Межвуз. сб. науч. тр./ СПбГТУРП. СПб., 1994. - С.3-5.

Здесь $\varepsilon_1^p, \varepsilon_2^p$ - локальные пластические деформации; σ_1, σ_2 - составляющие макроскопического тензора напряжений; τ_1, τ_2 - составляющие тензора сухого трения; $\langle\cdot\rangle$ - знак осреднения; $\xi = x$ - точка, в которой реализуются равенства (4).

Можно показать, что исходная система соотношений (1) - (5) имеет решение в самом общем случае

$$\omega(\xi,t) = \frac{g(t)}{\tau(\xi)} + F(\xi), \tag{6}$$

где функции $g(t)$ и $F(\xi)$ подлежат специальному определению.

При полностью активном нагружении, как уже было указано, существует точка $\xi = x$, в которой $\tau_1 = \sigma_1, \tau_2 = \sigma_2$. Не нарушая общности, можно принять, что $\xi = x = t$, тогда

$$\omega(t,t) = \frac{g(t)}{\tau(t)} + F(t). \tag{7}$$

Функция $\omega(t,t)$ находится из условий, что

$$\tau(t) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\ ; \qquad \cos\omega(t,t) = \frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}.$$

Легко проверить, что, если $\omega(t,t) = \varphi(t)$, то

$$\left.\begin{aligned} \omega(\xi,t) &= [g(t) - g(\xi)]/\tau(\xi) + \varphi(\xi) \\ \omega(0,t) &= [g(t) - g(0)]/\tau(0) + \varphi(0) \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Отметим, что если функцию $\varphi(t)$ определяет история нагружения, то функция $g(t)$ свободна. она может быть определена из различных условий, например:

а) $$g(t) = \varphi(t)\cdot\tau(0). \tag{9}$$

Легко проверить, что эта гипотеза эквивалентна требованию, что $\omega(0,t) = \omega(t,t)$, то есть направление течения при $\xi = 0$ и $\xi = t$ одинаково.

В этом случае, если σ_i - интенсивность напряжений, то

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^p &= \sigma_1 - \tau(0)\cdot\sigma_1/\sigma_i, \\ \varepsilon_2^p &= \sigma_2 - \tau(0)\cdot\sigma_2/\sigma_i. \end{aligned} \tag{10}$$

Нетрудно заметить, что это решение тождественно совпадает с решением по классической деформационной теории пластичности с линейным упрочнением в зоне полностью активного нагружения.

Важной особенностью нового варианта теории является следующий факт. Классическая деформационная теория пластичности имеет ограниченную область применения. Теория не способна описать поведение материала при нагружении с промежуточными разгрузками, а также при круговых траекториях нагружения ($\sigma_i = const$). Приведенный же вариант теории не имеет ограничений при задании истории нагружения. Например, при нагружении по кругу он дает сразу устанавливающийся предельный цикл в пространстве пластических деформаций. При треугольных нагружениях с промежуточными разгрузками теория описывает вполне реальное поведение предельных кривых пластического деформирования.

Центральной особенностью новой теории является то обстоятельство, что граничное условие при полностью активном нагружении записывается в виде

$$\tau_1(t,t) = \sigma_1; \qquad \tau_2(t,t) = \sigma_2,$$

а при промежуточных разгрузках - в форме

$$\sigma_1 - \sigma_0 = \tau\cos\omega - \tau; \qquad \sigma_2 = \tau\sin\omega$$

(при условии, что $\sigma_0 = \tau$ есть условие при прямом нагружении в направлении σ_1).

Кроме предположения (9) были изучены еще две гипотезы:

б) $$g = B\varphi^{\frac{1}{n}};$$

в) $$g = A\left[\varphi + B(1 - \exp(-\alpha\varphi))\right].$$

Эти гипотезы существенно уточняют поведение материала при крутовом и треугольном нагружении, лучше отвечают опытным данным.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 01-01-00229).

Получено 15.02.2001