УДК 539.3

Р.С. Новокшанов, А.А. Роговой

Институт механики сплошных сред УрО РАН

О ПОСТРОЕНИИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

Abstract

The approach to construct the constitutive equations of relaxation type with necessary corotational derivatives has been formulated based on the connections between different forms of the stress tensor and the objective derivatives.

Формы тензора напряжений. Коротационные производные

Общая теория определяющих уравнений базируется на законах термодинамики, принципах инвариантности и дополнительных предположениях, аксиомах и неравенствах. Законы термодинамики определяют общую структуру уравнений состояния и ограничения, налагаемые на термодинамические параметры. Принципы инвариантности представляют собой постулаты независимости определяющих соотношений от жесткого движения актуальной конфигурации и некоторых преобразований начальной конфигурации, учитывающих симметрию свойств среды. Дополнительные предположения, аксиомы и неравенства позволяют учесть известный из практики или эксперимента характер поведения материала в тех или иных условиях его работы и накладывают ограничения на уравнения состояния с целью исключения результатов, противоречащих физическому смыслу.

Для обеспечения объективности (материальной независимости от системы отсчета) эволюционных определяющих уравнений используют ту или иную коротационную производную. В ряде работ, например, в [1], критерием выбора типа коротационной производной объявляется физичность получающихся результатов (объективность подменяется субъективностью). Авторы других работ необходимую коротационную производную согласовывают с той или иной мерой или тензором деформаций, исходя из энергетического смысла. Но такой выбор, как показал Бровко [2], не единственен.

Цель настоящей работы - предложить подход к построению уравнений состояния для сред релаксационного типа, обеспечивающий необходимую коротационную производную, опираясь, в основном, только на принцип материальной независимости от системы отсчета (принцип объективности, индифферентности). Для описания поведения среды при конечных деформациях обычно используются понятия начальной и текущей (актуальной) конфигураций [3,4]. Первая определяется радиус-вектором **r**, вторая - **R**. Каждый из этих радиус-векторов является функцией обобщенных координат $q^i, i=1,2,3$. В каждой из конфигураций вводится локальный базис, как производная от соответствующего радиус-вектора по обобщенным координатам, строится взаимный базис, определяются операторы Гамильтона $\nabla = \mathbf{r}^i \dfrac{\partial}{\partial q^i}$ - для начальной и $\tilde{\nabla} = \mathbf{R}^i \dfrac{\partial}{\partial q^i}$ - для текущей конфигураций, вводится фундаментальная для кинематики величина - градиент места

$$\mathbf{F} = (\nabla \mathbf{R})^T = \mathbf{R}_i \mathbf{r}^i \tag{1}$$

и обратная ему величина

$$\mathbf{F}^{-1} = (\tilde{\nabla} \mathbf{r})^T = \mathbf{r}_i \mathbf{R}^i . \tag{2}$$

Из последних выражений легко определить $\mathbf{R}_i$ и $\mathbf{R}^i$:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i\cdot\mathbf{F}^T, \qquad \mathbf{R}^i = \mathbf{r}^i\cdot\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-T}\cdot\mathbf{r}^i . \tag{3}$$

Применяя к $\mathbf{F}$ полярное разложение $\mathbf{F} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{U}$, где $\mathbf{R}$-ортогональный тензор (это устоявшееся обозначение и из контекста понятно о радиус-векторе или о тензоре идет речь), а $\mathbf{U}$ - правый симметричный положительно определенный тензор чистой (без вращений) деформации, соотношения (3) можно переписать в виде

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}\cdot\tilde{\mathbf{r}}_i = \tilde{\mathbf{r}}_i\cdot\mathbf{R}^T, \qquad \mathbf{R}^i = \tilde{\mathbf{r}}^i\cdot\mathbf{R}^T = \mathbf{R}\cdot\tilde{\mathbf{r}}^i, \tag{4}$$

где

$$\tilde{\mathbf{r}}_i = \mathbf{U}\cdot\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i\cdot\mathbf{U}, \qquad \tilde{\mathbf{r}}^i = \mathbf{r}^i\cdot\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\cdot\tilde{\mathbf{r}}^i. \tag{5}$$

Тензор напряжений Коши, как любой тензор второго ранга, имеет четыре формы координатного представления в базисе текущей конфигурации:

$$\mathbf{T} = T^{ij}\,\mathbf{R}_i\mathbf{R}_j = T_{ij}\,\mathbf{R}^i\mathbf{R}^j = T^i_{\ j}\,\mathbf{R}_i\mathbf{R}^j = T_i^{\ j}\,\mathbf{R}^i\mathbf{R}_j .$$

Используя здесь для базисных векторов соотношения (3) и (4), приходим к представлению тензора $\mathbf{T}$ через тензоры $\mathbf{T}_1 \div \mathbf{T}_7$:

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{R}\cdot\mathbf{T}_1\cdot\mathbf{R}^T = \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}_2\cdot\mathbf{F}^T = \mathbf{F}^{-T}\cdot\mathbf{T}_3\cdot\mathbf{F}^{-1} = \\ &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}_4\cdot\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-T}\cdot\mathbf{T}_5\cdot\mathbf{F}^T = J^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}_6\cdot\mathbf{F}^T = J^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}_7 .\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь J -третий главный инвариант градиента места $\mathbf{F}$,

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{R}^T\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{R} = T^{ij}\,\tilde{\mathbf{r}}_i\tilde{\mathbf{r}}_j = T_{ij}\,\tilde{\mathbf{r}}^i\tilde{\mathbf{r}}^j = T^i_{\ j}\,\tilde{\mathbf{r}}_i\tilde{\mathbf{r}}^j = T_i^{\ j}\,\tilde{\mathbf{r}}^i\tilde{\mathbf{r}}_j$$

- вращательная форма тензора напряжений (повернутый тензор) [3],

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{F}^{-T} = T^{ij}\,\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j$$

- верхняя конвективная форма тензора напряжений (энергетический тензор) [3],

$$\mathbf{T}_3 = \mathbf{F}^T\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{F} = T_{ij}\,\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j$$

- нижняя конвективная форма,

$$\mathbf{T}_4 = \mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{F} = T^i_{\ j}\,\mathbf{r}_i\mathbf{r}^j$$

- правая и

$$\mathbf{T}_5 = \mathbf{F}^T\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{F}^{-T} = T_i^{\ j}\mathbf{r}^i\mathbf{r}_j$$

- левая конвективные формы тензора напряжений [5],

$$\mathbf{T}_6 = J\ \mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{T}\ \cdot\mathbf{F}^{-T} = J\ T^{ij}\,\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j = J\,\mathbf{T}_2$$

- второй (симметричный) тензор Пиола - Кирхгоффа и

$$\mathbf{T}_7 = J\ \mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{T} = J\ T^{ij}\,\mathbf{r}_i\mathbf{R}_j$$

- первый (антисимметричный) тензор Пиола - Кирхгоффа. Конечно, каждый из этих тензоров, например $\mathbf{T}_2$, может быть записан во взаимном и смешанном базисах, но ковариантные и смешанные составляющие тензора $\mathbf{T}_2$ при этом, естественно, не будут совпадать с ковариантными и смешанными составляющими тензора $\mathbf{T}$.

Выписанные выше тензоры примечательны тем, что с их помощью легко строятся коротационные производные, необходимые для объективности (материальной независимости от системы отсчета) эволюционных определяющих уравнений. Так R-производная (известная еще как производная Зарембы, Грина - Нагди, Грина - МакИнниса, Диенеса)

$$\mathbf{T}^R = \dot{\mathbf{T}} - \omega\cdot\mathbf{T} + \mathbf{T}\cdot\omega = \mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{T}}_1\cdot\mathbf{R}^T, \tag{8}$$

производная Олдройда

$$\mathbf{T}^{Ol} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{l}\cdot\mathbf{T} - \mathbf{T}\cdot\mathbf{l}^T = \mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{T}}_2\cdot\mathbf{F}^T = \dot{T}^{ij}\,\mathbf{R}_i\,\mathbf{R}_j, \qquad \dot{\mathbf{T}}_2 = \dot{T}^{ij}\,\mathbf{r}_i\,\mathbf{r}_j, \tag{9}$$

производная Коттер-Ривлина

$$\mathbf{T}^{CR} = \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{l}^T\cdot\mathbf{T} + \mathbf{T}\cdot\mathbf{l} = \mathbf{F}^{-T}\cdot\dot{\mathbf{T}}_3\cdot\mathbf{F}^{-1} = \dot{T}_{ij}\,\mathbf{R}^i\,\mathbf{R}^j, \qquad \dot{\mathbf{T}}_3 = \dot{T}_{ij}\,\mathbf{r}^i\,\mathbf{r}^j, \tag{10}$$

левая конвективная производная

$$\mathbf{T}^L = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{l}\cdot\mathbf{T} + \mathbf{T}\cdot\mathbf{l} = \mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{T}}_4\cdot\mathbf{F}^{-1} = \dot{T}^i{}_j\,\mathbf{R}_i\,\mathbf{R}^j, \qquad \dot{\mathbf{T}}_4 = \dot{T}^i{}_j\,\mathbf{r}_i\,\mathbf{r}^j, \tag{11}$$

правая конвективная производная

$$\mathbf{T}^{Rt} = \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{l}^T\cdot\mathbf{T} - \mathbf{T}\cdot\mathbf{l}^T = \mathbf{F}^{-T}\cdot\dot{\mathbf{T}}_5\cdot\mathbf{F}^{-1} = \dot{T}_i{}^j\,\mathbf{R}^i\,\mathbf{R}_j, \qquad \dot{\mathbf{T}}_5 = \dot{T}_i{}^j\,\mathbf{r}^i\,\mathbf{r}_j, \tag{12}$$

производная Яуманна

$$\mathbf{T}^J = \frac{1}{2}(\mathbf{T}^{Ol} + \mathbf{T}^{CR}) = \frac{1}{2}(\mathbf{T}^L + \mathbf{T}^{Rt}) = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{w}\cdot\mathbf{T} + \mathbf{T}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{T}}_1\cdot\mathbf{R}^T, \tag{13}$$

производная Труcделла

$$\mathbf{T}^{Tr} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{l}\cdot\mathbf{T} - \mathbf{T}\cdot\mathbf{l}^T + \mathbf{T}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{l} = J^{-1}\,\mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{T}}_6\cdot\mathbf{F}^T = \dot{T}^{ij}\,\mathbf{R}_i\,\mathbf{R}_j + \mathbf{T}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{l}, \tag{14}$$

производная Хилла

$$\mathbf{T}^H = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{l}\cdot\mathbf{T} + \mathbf{T}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{l} = J^{-1}\,\mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{T}}_7.$$

Здесь

$$\omega = \dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{R}^T, \qquad \mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{F}^{-1} = (\tilde{\nabla}\,\dot{\mathbf{R}})^T = (\tilde{\nabla}\,\mathbf{v})^T = \omega + \mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U}^{-1}\cdot\mathbf{R}^T, \tag{15}$$

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{l} - \mathbf{l}^T) = \omega + \frac{1}{2}\mathbf{R}\cdot(\dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U}^{-1} - \mathbf{U}^{-1}\cdot\dot{\mathbf{U}})\cdot\mathbf{R}^T$$

и $\mathbf{v}$ - скорость перемещения.

Известны и другие коротационные производные [2, 6], а их общая форма имеет вид [6]

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{T}^{Ol} + a_1\,\mathbf{D}\cdot\mathbf{T} + a_2\,\mathbf{T}\cdot\mathbf{D} + a_3\,\mathbf{T}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{l},$$

где $\mathbf{D} = (\mathbf{l} + \mathbf{l}^T)/2$ - тензор деформации скорости. Придавая коэффициентам a_1, a_2 и a_3 определенные числовые значения, получаем все, выписанные выше, коротационные производные (за исключением R-производной) и множество других.

Легко определяются также производные N-го порядка:

$$\mathbf{T}^{\overbrace{R\ldots R}^{N}} = \mathbf{R}\cdot\overset{N}{\mathbf{T}_1}\cdot\mathbf{R}^T, \qquad \mathbf{T}^{\overbrace{Ol\ldots Ol}^{N}} = \mathbf{F}\cdot\overset{N}{\mathbf{T}_2}\cdot\mathbf{F}^T, \qquad \mathbf{T}^{\overbrace{CR\ldots CR}^{N}} = \mathbf{F}^{-T}\cdot\overset{N}{\mathbf{T}_3}\cdot\mathbf{F}^{-1},$$

$$\mathbf{T}^{\overbrace{L\ldots L}^{N}} = \mathbf{F}\cdot\overset{N}{\mathbf{T}_4}\cdot\mathbf{F}^{-1}, \qquad \mathbf{T}^{\overbrace{Rt\ldots Rt}^{N}} = \mathbf{F}^{-T}\cdot\overset{N}{\mathbf{T}_5}\cdot\mathbf{F}^T, \qquad \mathbf{T}^{\overbrace{Tr\ldots Tr}^{N}} = J^{-1}\,\mathbf{F}\cdot\overset{N}{\mathbf{T}_6}\cdot\mathbf{F}^T,$$

$$\mathbf{T}^{\overbrace{H\ldots H}^{N}} = J^{-1}\,\mathbf{F}\cdot\overset{N}{\mathbf{T}_7}. \tag{16}$$

Здесь $\overset{N}{\mathbf{T}}_i$ - N-ая производная по времени тензора $\mathbf{T}_i$.

Определяющее уравнение релаксационного типа

Общую форму определяющего соотношения релаксационного типа N-го порядка можно представить в виде [5]

$$\mathbf{\Phi}_1(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}, \ldots, \overset{M}{\mathbf{F}}, \mathbf{T}, \dot{\mathbf{T}}, \ldots, \overset{N}{\mathbf{T}}) = 0, \tag{17}$$

где $\mathbf{\Phi}_1$ - скалярная, векторная или тензорная функция. Исходя из принципа объективности (материальной независимости от системы отсчета), формализацией которого в данном случае будет соотношение (полагая $\mathbf{\Phi}_1$ тензорной функцией)

$$\mathbf{\Phi}_1(\mathbf{F}', \dot{\mathbf{F}}', \ldots, \overset{M}{\mathbf{F}}', \mathbf{T}', \dot{\mathbf{T}}', \ldots, \overset{N}{\mathbf{T}}') = \mathbf{\Phi}_1'(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}, \ldots, \overset{M}{\mathbf{F}}, \mathbf{T}, \dot{\mathbf{T}}, \ldots, \overset{N}{\mathbf{T}}) = 0,$$

где $\mathbf{F}' = \mathbf{O}\cdot\mathbf{F}$, $\mathbf{T}' = \mathbf{O}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{O}^T$, $\mathbf{\Phi}_1' = \mathbf{O}\cdot\mathbf{\Phi}_1\cdot\mathbf{O}^T$ и $\mathbf{O}$ - любой ортогональный тензор, получаем, положив $\mathbf{O} = \mathbf{R}^T$, используя полярное разложение градиента места $\mathbf{F} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{U}$ и учитывая соотношение (7),

$$\mathbf{\Phi}_1\left(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \ldots, \overset{M}{\mathbf{U}}, \mathbf{T}_1, \dot{\mathbf{T}}_1, \ldots, \overset{N}{\mathbf{T}}_1\right) = 0. \tag{18}$$

Таким образом, для выполнения принципа объективности аргументами в определяющем уравнении (17) могут быть только чистая деформация $\mathbf{U}$ и повернутый тензор напряжений $\mathbf{T}_1$. Из соотношений (6) вытекает связь между $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_i$ $i = 2 \div 6$:

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{U}\cdot\mathbf{T}_2\cdot\mathbf{U} = \mathbf{U}^{-1}\cdot\mathbf{T}_3\cdot\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{T}_4\cdot\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\cdot\mathbf{T}_5\cdot\mathbf{U} = J^{-1}\,\mathbf{U}\cdot\mathbf{T}_6\cdot\mathbf{U}, \tag{19}$$

и тогда определяющее уравнение (18) может быть представлено в эквивалентных формах

$$\mathbf{\Phi}_i(\{\mathbf{U}\}, \{\mathbf{T}_i\}) = 0, \qquad i = 1 \div 6, \tag{20}$$

где $\{\mathbf{U}\} = \mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \ldots, \overset{M}{\mathbf{U}}$; $\{\mathbf{T}_i\} = \mathbf{T}_i, \dot{\mathbf{T}}_i, \ldots, \overset{N}{\mathbf{T}}_i$.

Рассмотрим некоторые частные случаи использования выражения (20) для построения определяющих уравнений.

Конкретизируя тензорные функции $\mathbf{\Phi}_i$ в соотношении (20) для материала дифференциального типа зависимостью

$$\mathbf{\Phi}_i(\{\mathbf{U}\}, \{\mathbf{T}_i\}) = \widetilde{\mathbf{g}}_i(\{\mathbf{U}\}) - \mathbf{T}_i = 0,$$

где $\widetilde{\mathbf{g}}_i(\{\mathbf{U}\})$ - отклик материала на чистую деформацию, приходим к следующим определяющим соотношениям:

$$\mathbf{T}_i = \widetilde{\mathbf{g}}_i(\{\mathbf{U}\}).$$

Тогда тензор истинных напряжений, с учётом выражений (6), запишется как

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{R}\cdot\widetilde{\mathbf{g}}_1(\{\mathbf{U}\})\cdot\mathbf{R}^T = \mathbf{F}\cdot\widetilde{\mathbf{g}}_2\cdot\mathbf{F}^T = \mathbf{F}^{-T}\cdot\widetilde{\mathbf{g}}_3\cdot\mathbf{F}^{-1} = \\ &= \mathbf{F}\cdot\widetilde{\mathbf{g}}_4\cdot\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-T}\cdot\widetilde{\mathbf{g}}_5\cdot\mathbf{F}^T = J^{-1}\,\mathbf{F}\cdot\widetilde{\mathbf{g}}_6\cdot\mathbf{F}^T.\end{aligned} \tag{21}$$

Любое из этих уравнений удовлетворяет аксиоме Нолла [7] и функции $\widetilde{\mathbf{g}}_i(\{\mathbf{U}\})$ связаны между собой соотношением типа (19)

$$\widetilde{\mathbf{g}}_1 = \mathbf{U}\cdot\widetilde{\mathbf{g}}_2\cdot\mathbf{U} = \mathbf{U}^{-1}\cdot\widetilde{\mathbf{g}}_3\cdot\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}\cdot\widetilde{\mathbf{g}}_4\cdot\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\cdot\widetilde{\mathbf{g}}_5\cdot\mathbf{U} = J^{-1}\,\mathbf{U}\cdot\widetilde{\mathbf{g}}_6\cdot\mathbf{U}.$$

Заметим, что простой физический смысл имеют функции $\widetilde{\mathbf{g}}_1$ и $\widetilde{\mathbf{g}}_6$. Первая определяет истинные (усилие, отнесенное к текущей площади), а вторая условные (усилие, отнесенное к начальной площади) напряжения при отсутствии вращения. Поэтому экспериментально легче определять их.

Конкретизируя тензорные функции $\mathbf{\Phi}_i$ в соотношении (20) зависимостью

$$\mathbf{\Phi}_i(\{\mathbf{U}\}, \{\mathbf{T}_i\}) = \widetilde{\mathbf{G}}_i(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) - \mathbf{T}_i - \lambda \dot{\mathbf{T}}_i = 0,$$

приходим к следующим соотношениям:

$$\mathbf{T}_i + \lambda \dot{\mathbf{T}}_i = \widetilde{\mathbf{G}}_i(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}). \tag{22}$$

Переходя с помощью зависимостей (6) и (8) - (14) к истинным напряжениям, получаем уравнения состояния с согласованными объективными производными (здесь термин "объективные" преобретает второй смысл: коротационная производная не назначается, что делается во многих случаях, а получается естественным образом):

$$\mathbf{T} + \lambda \mathbf{T}^R = \mathbf{R} \cdot \widetilde{\mathbf{G}}_1 \cdot \mathbf{R}^T, \qquad \mathbf{T} + \lambda \mathbf{T}^{Ol} = \mathbf{F} \cdot \widetilde{\mathbf{G}}_2 \cdot \mathbf{F}^T, \qquad \mathbf{T} + \lambda \mathbf{T}^{CR} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \widetilde{\mathbf{G}}_3 \cdot \mathbf{F}^{-1},$$

$$\mathbf{T} + \lambda \mathbf{T}^L = \mathbf{F} \cdot \widetilde{\mathbf{G}}_4 \cdot \mathbf{F}^{-1}, \qquad \mathbf{T} + \lambda \mathbf{T}^{Rt} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \widetilde{\mathbf{G}}_5 \cdot \mathbf{F}^T, \qquad \mathbf{T} + \lambda \mathbf{T}^{Tr} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \widetilde{\mathbf{G}}_6 \cdot \mathbf{F}^T.$$

Как уже отмечалось выше, $\mathbf{T}_1$ - это истинные напряжения при отсутствии вращения. Полагая в соотношении (22)

$$\widetilde{\mathbf{G}}_1 = \frac{1}{2} \mu \, (\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}}),$$

что соответствует тензору деформации скорости $\mathbf{D}$ при $\mathbf{R}$, тождественно равном единичному тензору (см. (15)), приходим в терминах истинных напряжений к определяющему соотношению

$$\mathbf{T} + \lambda \mathbf{T}^R = \mu \mathbf{D}, \tag{23}$$

где μ - коэффициент вязкости. Это хорошо известное уравнение для среды Максвелла, обобщенное на конечные деформации [8]. Необходимый тип коротационной производной здесь, что до сих пор является предметом обсуждения многих работ, выявился автоматически.

На рисунке приведены результаты решения уравнения Максвелла для задачи простого сдвига. Уравнение (23) обезразмеривалось:

$$\widetilde{\mathbf{T}} + \widetilde{\mathbf{T}}^R = \widetilde{\mathbf{D}}.$$

Здесь $\widetilde{\mathbf{D}} = \lambda \mathbf{D}$ - безразмерный тензор деформации скорости, $\widetilde{\mathbf{T}} = \lambda \mathbf{T} / \mu$ - безразмерный тензор истинных напряжений, $\widetilde{\mathbf{T}}^R = \lambda^2 \mathbf{T}^R / \mu$ и введено безразмерное время (в единицах времени релаксации) $\widetilde{t} = t / \lambda$. Для сравнения на этом же рисунке показаны кривые напряжений, полученные при использовании в соотношении (23) обыкновенной временной и яумановской производных.

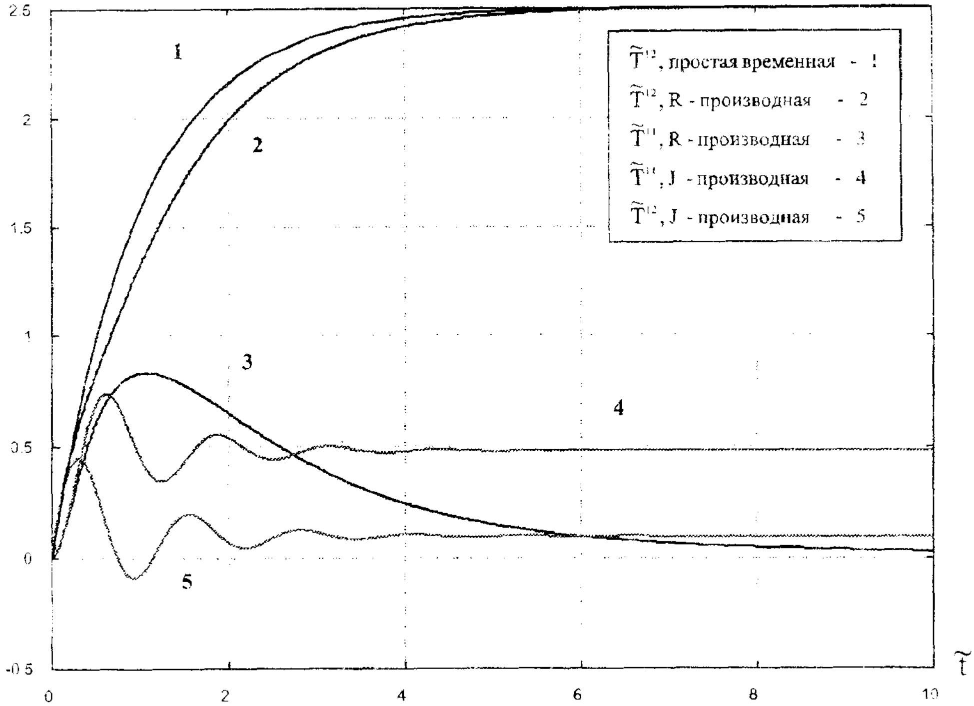

Рис. Обезразмеренное уравнение Максвелла с простой производной, R- и J-объективными производными в задаче простого сдвига (приведены ненулевые компоненты тензора напряжений)

Компонента T^{12} при использовании R-производной практически совпадает с решением классического уравнения Максвелла. Но при этом, в отличие от обычной производной, возникают нормальные напряжения, отвечающие экспериментальным данным [9], известным в литературе как эффект Вейссенберга. Осцилляции, характерные для яуманновской производной, описаны, например, в [10, 11]. Использование производных Олдройда и Коттер - Ривлина приводит к симметричной относительно нуля линейной зависимости компонент T^{11}, что противоречит смыслу вязкоупругого материала (нет релаксации напряжений). Компоненты же T^{12} в этих случаях совпадают с решением уравнения Максвелла для простой производной.

Модифицированное уравнение Максвелла [5] также вытекает из (20), полагая

$$\mathbf{\Phi}_1(\{\mathbf{U}\},\{\mathbf{T}_1\}) = \tilde{\mathbf{G}}_1(\mathbf{U},\dot{\mathbf{U}}) - \mathbf{T}_1 - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overset{k}{\mathbf{T}}_1 = 0$$

и представляя $\tilde{\mathbf{G}}_1$ в виде

$$\tilde{\mathbf{G}}_1 = \tilde{\mathbf{G}}_0 + \sum_{k=1}^{m} \beta_k \overset{k}{\tilde{\mathbf{G}}}_0 ,$$

где

$$\tilde{\mathbf{G}}_0 = \frac{1}{2}\mu\,(\dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\cdot\dot{\mathbf{U}}),$$

а $\overset{k}{\mathbf{T}}_1$ и $\overset{k}{\tilde{\mathbf{G}}}_0$ - k-ые производные по времени от соответствующих тензоров. В терминах истинных напряжений, учитывая выражения (16), получаем

$$\mathbf{T}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,\mathbf{T}^{\overbrace{R...R}^{k}}=\mu\,(\mathbf{D}+\sum_{k=1}^{m}\beta_k\,\mathbf{D}^{\overbrace{R...R}^{k}}).$$

Таким образом, для определяющего уравнения релаксационного типа использование тензоров напряжений $\mathbf{T}_1 \div \mathbf{T}_6$ (6) автоматически приводит к согласованным коротационным производным (8) - (14) в эволюционных уравнениях состояния.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ-ГФЕН № 01-01-96494.

Библиографический список

1. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации. - М.: Наука, 1986. – 232 с.
2. Бровко Г.Л. Некоторые подходы к построению определяющих соотношений пластичности при больших деформациях // Упругость и неупругость: Сб. научн. тр. - М.: МГУ, 1987. - С. 68-81.
3. Лурье А.И. Теория упругости. - М.: Наука, 1970. - 940 с.
4. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. - М.: Наука, 1980. - 512с.
5. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. - М.: Мир, 1978. - 312 с.
6. Szabo L., Balla M. Comparison of some stress rates // Int. J. Solids Structures. - 1989. - N. 25. - C. 279-297.
7. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. - М.: Мир, 1975. - 592 с.
8. Левитас В.И. Большие упруго-пластические деформации материалов при высоком давлении. - Киев: Наук. Думка, 1987. - 232 с.
9. Мидлман С. Течение полимеров. - М.: Мир, 1971. - 258 с.
10. Lucchesi M., Podio-Guidugli P. Materials with elastic range and the possibility of stress oscillation in pure shear // Comput. Plast., Swansea. - 1987. - P. 71-80.
11. Dienes J.K. On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies // Acta Mechanics. - 1979. -. Vol. 32. - N 2, - P. 217-232.

Получено 15.02.2001