

В.А. Пальмов *, Е. Штайн **

* Санкт-Петербургский государственный технический университет

** Ганноверский университет

РАЗЛОЖЕНИЕ КОНЕЧНОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ НА УПРУГУЮ И ПЛАСТИЧЕСКУЮ СОСТАВЛЯЮЩИЕ

Abstract

Constitutive equations of elastoplastic material with Prandtl rheological model is under consideration. Different methods of decompositions of elastoplastic strain an elastic and plastic parts are used. Thermodynamical analysis of constitutive equations and direct calculations of elastic and plastic strains are presented for different decompositions.

Мы будем исследовать упругопластический материал с простейшей реологической моделью - моделью Прандтля.

Прандтль (1924) представил двумерные уравнения такого материала, основанные на аддитивном разложении тензора скоростей деформации на упругую и пластическую части в соответствии с уравнением

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{el} + \dot{\epsilon}_p.$$

Рейсс (1930) обобщил разложение Прандтля на трехмерное напряженное состояние. Однако оба ученых ограничились геометрически линейной теорией и предположили, что упругая составляющая ϵ_{el} вычисляется по линейному закону Гука, а пластическая ϵ_p по теории течения жестко-пластического материала [1].

В работе рассматриваются различные варианты обобщения концепции Прандтля - Рейсса на случай геометрически и физически нелинейной теории деформируемого тела.

Наиболее очевидным представляется аддитивное разложение какого-нибудь из тензоров деформации нелинейной механики

$$\epsilon = \epsilon_{el} + \epsilon_p.$$

Здесь в качестве ϵ может выступать либо тензор Коши - Грина, либо тензор деформации Альманси, или Фингера, или, наконец, тензор Генки. Еще более привлекательным представляется аддитивное разложение тензора скоростей деформаций

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{el} + \mathbf{D}_p,$$

поскольку в линейной теории тензор \mathbf{D} превращается в точности в $\dot{\epsilon}$. Этот подход использовался в работе [2] и ранее в [3]. В так называемой вычислительной пластичности [4,5,6] широко используется мультипликативное разложение градиента движения Ли,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{el} \cdot \mathbf{F}_p,$$

а иногда и альтернативное тоже мультипликативное разложение [7] градиента

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_p \cdot \mathbf{F}_{el}.$$

Комбинация каждого из разложений с соответствующими обобщениями теорий упругости и пластичности приводит к определяющим уравнениям теории конечных упругопластических деформаций. Главная цель предлагаемой работы состоит в анализе термодинамической состоятельности этих уравнений и в вычислении и сравнении с их помощью упругих и, особенно, пластических деформаций. Следует отметить, что в применении к вязко-упругому материалу многие из сформулированных вопросов рассматривались в работе [8].

Предлагаемая статья устроена следующим образом. Раздел 2 посвящен рассмотрению основных положений нелинейной кинематики, динамики и термодинамики деформируемых тел. Третий раздел отведен рассмотрению механики, а четвертый - термодинамики материала Прандтля. Мы проводим здесь термодинамический анализ упомянутых выше определяющих уравнений упругопластичности и показываем, что далеко не все из них термодинамически состоятельны. В разделе пятом представлено единое уравнение, предназначенное для определения упругой деформации материала Прандтля без упрочнения. Оно не зависит от метода разложения. Некоторые кинематические свойства типичных разложений упругопластической деформации рассмотрены и сравнены в разделе шестом. Специальная однородная деформация – трехосное растяжение и сдвиг в одной из координатных плоскостей рассмотрена в седьмом разделе. Точные аналитические выражения пластических деформаций приведены и сравнены в разделе 8. Конкретные численные расчеты для случая упругости Муни и ассоциативной пластичности Мизеса выполнены в девятом разделе. Показано, что второе мультипликативное разложение градиента движения и аддитивное разложение тензора скоростей деформации приводят, при прочих одинаковых условиях, к одинаковым значениям деформации пластического сдвига, тогда как первое мультипликативное разложение градиента – к существенно большим значениям последнего. Следует также отметить, что для трех упомянутых разложений деформации пластические растяжения вдоль осей оказались соответственно одинаковыми. В десятом разделе представлены заключение по работе и комментарии к ее продолжению и использованию.

Воспоминания о законах и формулах нелинейной механики деформируемых твердых тел

Для упрощения восприятия последующего материала статьи мы воспроизводим в этом разделе основные положения нелинейной механики деформируемых тел. В качестве главных источников информации приняты книги А.И. Лурье [9], Трусделла [10] а также А. Хана и С. Хуанга [11].

Как обычно, мы описываем движение континуума отображением (рис.1)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R}, t), \quad (1)$$

где \mathbf{R} и \mathbf{r} - это начальные и актуальные положения типичной материальной точки, t - время.

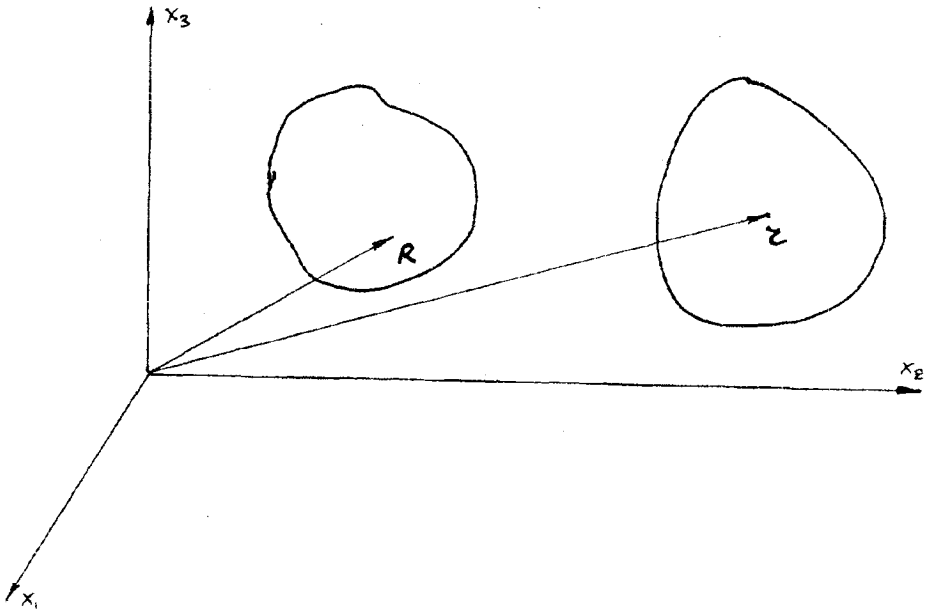


Рис. 1. Начальная и актуальная конфигурации

Мы вводим градиент движения следующим образом:

$$\mathbf{F} = (\nabla \mathbf{r})^T, \quad (2)$$

где ∇ - оператор Гамильтона в начальной конфигурации, а символ $()^T$ обозначает операцию тензорного транспонирования.

Ниже будут использоваться меры деформации Коши - Грина и Фингера. Они выражаются следующим образом:

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \quad \Phi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T, \quad (3)$$

причем точкой обозначена операция скалярного умножения.

Приводим ниже хорошо известные формулы и уравнения континуальной механики деформируемых тел:

$$\dot{\mathbf{F}} = (\mathbf{D} - \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{F}, \quad (4)$$

$$\dot{\mathbf{G}} = 2\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}, \quad (5)$$

$$\dot{\Phi} = \Phi \cdot (\mathbf{D} + \mathbf{\Omega}) + (\mathbf{D} - \mathbf{\Omega}) \cdot \Phi, \quad (6)$$

причем \mathbf{D} и $\mathbf{\Omega}$ - тензор скоростей деформации и спин.

$$\mathbf{D} = (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1})^S, \quad \mathbf{\Omega} = -(\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1})^A. \quad (7)$$

Символы $()^S$ и $()^A$ обозначают операции вычисления симметричной и антисимметричной частей тензора второго ранга, стоящего в скобке.

Определяющее уравнение, описывающее изотермические процессы в идеальном упругом материале, имеет общий вид

$$\tau = 2\rho\mathbf{F} \cdot \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}^T, \quad \Psi = \Psi(\mathbf{G}), \quad (8)$$

где τ - тензор напряжений Коши, Ψ - свободная энергия, ρ - массовая плотность материала.

Определяющее уравнение для несжимаемых изотермических деформационных процессов в жестко-пластическом материале принимаем таким :

$$D = \mu \Theta(\mathbf{s}), \quad \Psi = 0, \quad (9)$$

где $\Theta(\mathbf{s})$ - девиаторная тензорная функция девиатора напряжений \mathbf{s} , а μ неизвестная скалярная функция пространственных координат и времени, подчиненная условиям

$$\begin{cases} \mathbf{s} : \mathbf{s} < 2\tau_s^2, & \mu = 0, \\ \mathbf{s} : \mathbf{s} = 2\tau_s^2, & \mu \geq 0, \end{cases} \quad (10)$$

Здесь двоеточие обозначает двойное скалярное произведение тензоров. Условие

$$\mathbf{s} : \mathbf{s} = 2\tau_s^2 \quad (11)$$

называется условием пластического течения Мизеса, а τ_s - предел текучести.

Общезвестно и общепринято, что определяющее уравнение любого материала должно удовлетворять второму закону термодинамики, записываемому в форме диссипативного неравенства

$$\tau : \mathbf{D} - \rho \dot{\Psi} \geq 0. \quad (12)$$

Оно должно выполняться для любого термодинамического процесса в этом материале.

Непосредственная проверка показывает, что для упругого материала с определяющим уравнением (8) неравенство (12) выполняется со знаком равенства,

$$\tau : \mathbf{D} - \rho \dot{\Psi} = 0. \quad (13)$$

В соответствии с определением Трусделла [10] это означает, что любой изотермический процесс в упругом материале является обратимым.

Для идеального пластического материала с определяющим уравнением (9), (10) второй закон термодинамики приводит к ограничению

$$\mathbf{s} : \Theta(\mathbf{s}) \geq 0. \quad (14)$$

Мы будем предполагать, что нелинейная функция $\Theta(\mathbf{s})$ сконструирована таким образом, чтобы неравенство (14) выполнялось при произвольном девиаторе напряжений. Легко увидеть, что при выборе

$$\Theta(\mathbf{s}) = \mathbf{s}. \quad (15)$$

неравенство (14) действительно выполняется всегда.

Механика упругопластического материала Прандтля

Реологическая модель материала Прандтля представлена на рис.2. Она представляет собой последовательное соединение упругого и пластического

реологических элементов. Так что, легко можно записать динамические и энергетические условия соединения

$$\tau = \tau_{el} = \tau_p, \tag{16}$$

$$\Psi = \Psi_{el}, \tag{17}$$

где τ_{el} - тензор напряжений для упругого элемента, а τ_p - для пластического.



Рис.2. Реологическая модель материала Прандтля

Кинематические условия соединения элементов могут быть взяты в формах, представленных во введении. Однако, прежде, чем сделать это, мы намерены привести некоторые рассуждения.

Введем так называемые упругие кинематические величины

$$\mathbf{F}_{el}, \mathbf{G}_{el}, \Phi_{el}, \mathbf{D}_{el}, \Omega_{el} \tag{18}$$

и предположим, что они удовлетворяют уравнениям (3), (4), (5) и (6) механики деформируемых тел. В соответствии с общей идеологией метода реологических моделей вычисляем упругие напряжения по формуле (8)

$$\tau_{el} = 2\rho \mathbf{F}_{el} \cdot \frac{\partial \Psi_{el}}{\partial \mathbf{G}_{el}} \cdot \mathbf{F}_{el}^T, \quad \Psi_{el} = \Psi_{el}(\mathbf{G}_{el}). \tag{19}$$

Аналогичным образом вводим так называемые пластические кинематические величины

$$\mathbf{F}_p, \mathbf{G}_p, \Phi_p, \mathbf{D}_p, \Omega_p \tag{20}$$

и полагаем, что они удовлетворяют кинематическим уравнениям (3), (4), (5) и (6).

Наконец, нам следует написать уравнения чистой пластичности, подобные уравнениям (9) и (10).

Мы используем три возможности:

1. Классическое определяющее уравнение пластичности

$$\mathbf{D}_p = \mu \Theta(\mathbf{s}_p), \quad \begin{cases} \mathbf{s}_p : \mathbf{s}_p < 2\tau_s^2, & \mu = 0, \\ \mathbf{s}_p : \mathbf{s}_p = 2\tau_s^2, & \mu > 0. \end{cases} \tag{21}$$

2. Обобщенное определяющее уравнение пластичности

$$\mathbf{D} - \mathbf{D}_{el} = \mu \Theta(\mathbf{s}_p), \tag{22}$$

причем μ определяется по (21).

3. Обобщенное определяющее уравнение пластичности с кинематическим упрочнением. Здесь мы рассматриваем более сложную реологическую модель, показанную на рис.3.



Рис. 3. Реологическая модель материала Прандтля с кинематическим упрочнением

Она отличается от модели Прандтля появлением второго упругого элемента, соединенного параллельно пластическому. Этот элемент выполняет функцию кинематического упрочнения, зависящего от пластической деформации. Уравнение текучести для пластического элемента берем в обобщенной форме (22), тогда как силовое и энергетическое условие (16) и (17) заменяются следующими:

$$\tau = \tau_{el} = \tau_p + \tau_h, \quad \Psi = \Psi_{el}(\mathbf{G}_{el}) + \Psi_h(\mathbf{G}_p), \quad (23)$$

причем напряжение упрочнения τ_h определяется формулой теории упругости

$$\tau_h = 2\rho \mathbf{F}_p \cdot \frac{\partial \Psi_h}{\partial \mathbf{F}_p} \cdot \mathbf{F}_p^T. \quad (24)$$

Замечание 1. Следует дать хотя бы некоторый краткий комментарий к уравнениям пластичности (21), (22) и (23). Наиболее приемлемым является классическое уравнение (21), ибо оно буквально воспроизводит уравнение (9). Очень искусственным представляется уравнение (22). Однако, если его игнорировать, то мы встретимся ниже с ситуацией, когда популярные в литературе мультипликативные разложения градиента движения придется безоговорочно отвергнуть после термодинамического анализа получающихся определяющих уравнений упругопластичности. Определяющее уравнение (23) отличается от (22) наличием кинематического упрочнения s_p , зависящего от полной пластической деформации.

Замечание 2. Мы встречаем величину ρ в уравнениях (8), (19) и (24). Это массовая плотность материала, и мы должны согласиться с тем, что она является известной функцией полной меры деформации G .

$$\rho = \rho_0 / \sqrt{[G]}, \quad (25)$$

Замечание 3. Мы не ввели выше координаты упругих и пластических положений \mathbf{r}_{el} и \mathbf{r}_p в соответствии с уравнениями, аналогичными (2),

$$\mathbf{F}_{el} = (\nabla \mathbf{r}_{el})^T, \quad \mathbf{F}_p = (\nabla \mathbf{r}_p)^T,$$

поскольку мы не верим в их существование в общем случае. Линейная теория упругопластичности дает прекрасные примеры отсутствия упругих и пластических перемещений даже в геометрически линейной теории. Что и говорить о нелинейной!

Более того, необходимые и достаточные условия существования решений и в односвязном объеме имеют вид

$$\nabla \times \mathbf{F}_{el}^T = 0, \quad \nabla \times \mathbf{F}_p^T = 0.$$

Никто и никогда не доказал, что они выполняются в общем виде!

Напомним теперь кинематические условия соединения элементов в модели Прандтля:

1. Аддитивное разложение тензора скоростей деформации

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{el} + \mathbf{D}_p. \quad (26)$$

2. Наиболее популярное мультипликативное разложение градиента движения

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{el} \cdot \mathbf{F}_p. \quad (27)$$

3. Менее популярное мультипликативное разложение того же градиента движения

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_p \cdot \mathbf{F}_{el}. \quad (28)$$

4. Аддитивное разложение какого-нибудь из тензоров деформации

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{el} + \boldsymbol{\varepsilon}_p. \quad (29)$$

Комбинация любого из этих разложений с представленными выше определяющими уравнениями упругости и пластичности приводит к определяющим уравнениям упругопластического материала Прандтля. Таким образом, мы имеем двенадцать различных определяющих уравнений. Однако далеко не все они термодинамически состоятельны, т.е. удовлетворяют ограничению второго закона термодинамики (12).

Термодинамика упругопластического материала Прандтля

Необходимо и достаточно проверить, удовлетворяют ли представленные в предыдущем разделе определяющие уравнения неравенству (12). Исключим из него $\boldsymbol{\tau}$ и $\dot{\Psi}$ с помощью первого динамического условия (15) и энергетического условия (17). Получим

$$\boldsymbol{\tau}_{el} : \mathbf{D} - \rho \dot{\Psi}_{el} \geq 0.$$

Однако уравнение для упругого элемента (13) дает равенство

$$\boldsymbol{\tau}_{el} : \mathbf{D}_{el} - \rho \dot{\Psi}_{el} = 0$$

и позволяет упростить предыдущее неравенство.

Результат таков:

$$\boldsymbol{\tau}_{el} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}_{el}) \geq 0. \quad (30)$$

Рассмотрим теперь по отдельности определяющие уравнения пластичности (21), (22) и (23).

1. Классическое определяющее уравнение (21).

Добавляя величину $\boldsymbol{\tau}_p : \mathbf{D}_p$ и вычитая равную ей величину $\boldsymbol{\tau}_{el} : \mathbf{D}_p$ в правой части неравенства (30), получим

$$\mathbf{s}_p : \Theta(\mathbf{s}_p) \mu + \boldsymbol{\tau}_{el} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}_{el} - \mathbf{D}_p) \geq 0. \quad (31)$$

В силу неравенства (14) первое слагаемое здесь неотрицательно. Поэтому достаточным условием выполнения условия (31) является требование аддитивного разложения тензора скоростей деформации (26). Однако невозможно доказать, что условие (26) является также и необходимым. Можно лишь показать, что при использовании разложений, иных кроме (26), условие (31) может не выполняться, а при некоторых дополнительных ограничениях может даже и выполняться. Все это продемонстрировано в работе [12].

Таким образом, доказана теорема 1: определяющие уравнения упругопластического материала Прандтля являются безусловно термодинамически состоятельными только при использовании аддитивного разложения тензора скоростей деформации, если одновременно используются классические определяющие уравнения упругости и жестко-пластичности.

2. Обобщенное определяющее уравнение (22).

Подстановка выражений (22) в (30) приводит к неравенству

$$\mathbf{s}_p : \Theta(\mathbf{s}_p) \dot{\mu} \geq 0,$$

которое выполняется в силу (14) для любых значений \mathbf{s}_p .

Таким образом, доказана теорема 2: любое из рассмотренных и не рассмотренных разложений упругопластической деформации приводит к термодинамически состоятельным определяющим уравнениям материала Прандтля при использовании обобщенного уравнения пластичности и классического определяющего уравнения упругости.

3. Обобщенное определяющее уравнение пластичности с кинематическим упрочнением.

Подстановка определяющего уравнения (22), (23) в (12) приводит к следующему неравенству:

$$(\mathbf{s}_p) : \Theta(\mathbf{s}_p) \dot{\mu} + \mathbf{s}_h : (\mathbf{D} - \mathbf{D}_{el} - \mathbf{D}_p) \geq 0, \quad (31)$$

В этом неравенстве тензор \mathbf{s}_h , в силу (24), зависит от градиента \mathbf{F}_p . Но от этого градиента не зависят остальные члены неравенства (31). Следовательно, \mathbf{s}_h может принять значения, никак не зависящие от них. Но \mathbf{s}_h входит линейно, и тогда по теореме о линейных неравенствах (см. [10]) имеем следующие необходимые и достаточные условия выполнения (32):

$$\mathbf{s}_p : \Theta(\mathbf{s}_p) \dot{\mu} \geq 0, \quad \text{Dev}(\mathbf{D} - \mathbf{D}_{el} - \mathbf{D}_p) = 0. \quad (32)$$

Первое неравенство выполняется заведомо в силу (14), тогда как второе соотношение лишь слегка отличается от (26). Это различие связано с принятым ранее условием несжимаемости пластической деформации. Если провести рассуждение с использованием формул сжимаемой пластичности, то мы придем сразу к (26). Можно поступить иначе и постулировать дополнительно, что объемная деформация является чисто упругой, т. е.

$$\mathbf{E} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}_{el}) = 0.$$

Добавляя слагаемое

$$\frac{1}{3} \mathbf{E} \mathbf{E} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}_{el}) = 0$$

к обеим частям второго уравнения (32), немедленно приходим к (26).

Таким образом, доказана теорема 3: для обобщенного определяющего уравнения пластичности с кинематическим упрочнением определяющее уравнение материала Прандтля является безусловно термодинамически состоятельным только и только при использовании аддитивного разложения тензора скоростей деформации.

Результаты проведенных рассмотрений представлены в таблице. Знак плюс приписан термодинамически состоятельным комбинациям определяющих уравнений и разложений деформации.

Замечание 1. Аддитивное разложение тензора скоростей деформации является наиболее универсальным, ибо оно совместимо с любым определяющим уравнением в том смысле, что дает термодинамически состоятельные определяющие уравнения.

Термодинамическая состоятельность определяющих уравнений материала Прандтля для различных комбинаций разложений деформаций и уравнений пластического течения

| Определяющее уравнение чистой пластичности | Разложение деформации | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $\mathbf{D} = \mathbf{D}_{el} + \mathbf{D}_p$ | $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{el} \cdot \mathbf{F}_p$ | $\mathbf{F} = \mathbf{F}_p \cdot \mathbf{F}_{el}$ | $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{el} + \boldsymbol{\varepsilon}_p$ |
| $\mathbf{D}_p = \mu \Theta(\mathbf{s}_{el})$ | + | - | - | - |
| $\mathbf{D} - \mathbf{D}_{el} = \mu \Theta(\mathbf{s}_{el})$ | + | + | + | + |
| $\mathbf{D} - \mathbf{D}_{el} = \mu \Theta(\mathbf{s}_{el} - \mathbf{s}_h)$ | + | - | - | - |

Дифференциальные уравнения для определения упругой деформации

Обращаем внимание только на вторую строку таблицы.

Во-первых, мы воспроизводим уравнения (22) и (21) для описания пластичности:

$$\mathbf{D} - \mathbf{D}_{el} = \mu \Theta(\mathbf{s}_p), \tag{22}$$

$$\begin{cases} \mathbf{s}_p : \mathbf{s}_p < 2\tau_s^2, & \mu = 0, \\ \mathbf{s}_p : \mathbf{s}_p = 2\tau_s^2, & \mu \geq 0. \end{cases} \tag{21}$$

Во-вторых, мы воспроизводим силовые условия (16) соединения элементов в модели Прандтля:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{el} = \boldsymbol{\tau}_p.$$

В-третьих, мы воспроизводим уравнение упругости (19):

$$\boldsymbol{\tau}_{el} = 2\rho \mathbf{F}_{el} \cdot \frac{\partial \Psi_{el}}{\partial \mathbf{G}_{el}} \cdot \mathbf{F}_{el}^T.$$

Наконец, мы воспроизводим кинематические уравнения типа (3) и (4):

$$\mathbf{G}_{el} = \mathbf{F}_{el}^T \cdot \mathbf{F}_{el}, \tag{33}$$

$$\mathbf{F}_{el} = (\mathbf{D}_{el} - \boldsymbol{\Omega}_{el}) \cdot \mathbf{F}_{el}. \tag{34}$$

Благодаря уравнению (16) можно привести уравнения (22) и (21) к следующему виду:

$$\mathbf{D} - \mathbf{D}_{el} = \mu \Theta(\mathbf{s}_{el}), \quad (35)$$

$$\begin{cases} \mathbf{s}_{el} : \mathbf{s}_{el} < 2\tau_s^2, & \mu = 0, \\ \mathbf{s}_{el} : \mathbf{s}_{el} = 2\tau_s^2, & \mu \geq 0. \end{cases} \quad (36)$$

Уравнения (35), (36), (19), (33) и (34) образуют полную систему уравнений для определения упругих кинематических величин, как функций времени. Представляющие непосредственный интерес напряжения могут быть вычислены после этого по уравнению (19). Таким образом, упомянутая система уравнений играет роль определяющего уравнения.

Замечание 1. Между прочим, легко показать, что точно такой же вид имеет определяющее уравнение для материала Прандтля, составленного путем комбинации классического описания пластичности (21) и аддитивного разложения тензора скоростей деформации (26). Действительно, прямой подстановкой скорости пластической деформации \mathbf{D}_p из (26) в уравнение пластичности (21) мы немедленно приходим к главному уравнению (35), тогда как остальные уравнения имеют идентичный стандартный вид.

Замечание 2. Интересно отметить, что это определяющее уравнение не зависит от метода разложения упругопластической деформации на упругую и пластическую. Следствием этого является то, что упругая деформация и другие кинематические величины, ее описывающие, оказываются в точности одинаковыми для всех разложений.

Замечание 3. Пластические деформации будут отличаться для различных разложений. Целью настоящей статьи является обнаружение этого различия аналитически и численно.

Замечание 4. Обратим теперь внимание на упрочняющийся упругопластический материал Прандтля. Повторяя рассуждения, приведенные выше, приходим к заключению, что изменится только уравнение (35). Оно станет таким:

$$\mathbf{D} - \mathbf{D}_{el} = \mu \Theta(\mathbf{s}_{el} - \mathbf{s}_h), \quad (37)$$

где \mathbf{s}_h - напряжение упрочнения,

$$\mathbf{s}_h = \text{Dev } \boldsymbol{\tau}_h.$$

Из (37) видно, что теперь задача определения упругой деформации не отделяется.

Главное преимущество наиболее популярного мультипликативного разложения деформации

Под эти названием имеется в виду разложение (27)

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{el} \cdot \mathbf{F}_p.$$

Вычислим величину $\mathbf{D} - \mathbf{D}_{el}$, которая фигурирует в уравнении (22). Для этой цели продифференцируем уравнение (27) по времени (речь идет о материальной производной). Получим

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{F}}_{el} \cdot \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_{el} \cdot \dot{\mathbf{F}}_p.$$

Умножение этого равенства на обратный градиент F дает

$$\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{F}}_{el} \cdot \mathbf{F}_{el}^{-1} + \mathbf{F}_{el} \cdot \dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}_{el}^{-1}.$$

Вычисляя симметричную и антисимметричную части, получим

$$\mathbf{D} - \mathbf{D}_{el} = (\mathbf{F}_{el} \cdot \dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}_{el}^{-1})^s = \mathbf{D}_p^*, \quad (38)$$

$$\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}_{el} = (\mathbf{F}_{el} \cdot \dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1} \cdot \mathbf{F}_{el}^{-1})^a = \mathbf{\Omega}_p^*. \quad (39)$$

Таким образом, величина $\mathbf{D} - \mathbf{D}_{el}$ легко вычисляется для разложения (27). В этом можно усмотреть главное преимущество разложения (27). Но ведь еще проще вычисляется названная разность для аддитивного разложения тензора скоростей деформации (26)

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{el} + \mathbf{D}_p.$$

Это просто \mathbf{D}_p ,

$$\mathbf{D} - \mathbf{D}_{el} = \mathbf{D}_p \quad !.$$

Значительно сложнее вычисление $\mathbf{D} - \mathbf{D}_{el}$ для второго мультипликативного разложения (28):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_p \cdot \mathbf{F}_{el}.$$

По аналогии с первым мультипликативным разложением легко получаем уравнение

$$\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1} + \mathbf{F}_p \cdot (\dot{\mathbf{F}}_{el} \cdot \mathbf{F}_{el}^{-1}) \cdot \mathbf{F}_p^{-1},$$

и, наконец, главный результат

$$\mathbf{D} - \mathbf{D}_{el} = \mathbf{D}_p - \mathbf{D}_{el} + (\mathbf{F}_p \cdot \dot{\mathbf{F}}_{el} \cdot \mathbf{F}_{el}^{-1} \cdot \mathbf{F}_p^{-1})^s = \mathbf{D}_p^{**}, \quad (40)$$

$$\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}_{el} = \mathbf{\Omega}_p - \mathbf{\Omega}_{el} - (\mathbf{F}_p \cdot \dot{\mathbf{F}}_{el} \cdot \mathbf{F}_{el}^{-1} \cdot \mathbf{F}_p^{-1})^a = \mathbf{\Omega}_p^{**}. \quad (41)$$

Действительно, вычисление в этом случае оказалось сложнее. Еще сложнее будет вычисление $\mathbf{D} - \mathbf{D}_{el}$ в случае разложения (29).

Замечание 1. Величины \mathbf{D}_p^* и \mathbf{D}_p^{**} используются в качестве скоростей деформации в теориях мультипликативных разложений.

Плоский сдвиг и трехосное растяжение образца из материала Прандтля

Рассматриваем специальный вид движения (1). Для этого вводим ортогональную декартову систему координат и используем разложения

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}_k x_k, \quad \mathbf{R} = \mathbf{i}_l X_l, \quad (42)$$

где \mathbf{i}_k - ортогональные нормированные базисные векторы

$$\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_l = \delta_{kl} \quad k, l=1,2,3,$$

а x_k и X_l - декартовы координаты некоторой материальной точки в актуальном и начальном состоянии. Отмечаем вдобавок, что в (42) и ниже используется соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющимся индексам. Объявляем, наконец, наше предположение о том, что базисные векторы не изменяются ни во времени, ни в пространстве, т.е.

$$\dot{\mathbf{i}}_k = \text{const}. \quad (43)$$

Таким образом, движение (1) имеет теперь следующее представление:

$$x_k = x_k(X_1, X_2, X_3, t), \quad k=1,2,3. \quad (44)$$

Рассматриваем плоский сдвиг и трехосное растяжение:

$$x_1 = X_1\varphi + X_2\rho, \quad x_2 = X_2\delta, \quad x_3 = X_3\omega, \quad (45)$$

где ρ - сдвиг, а φ , δ и ω характеризуют удлинения. Все они являются функциями только времени. Преобразование (45) является аффинным.

Градиент движения (2) для движения (45) имеет представление

$$\mathbf{F} = \mathbf{i}_1\mathbf{i}_1\varphi + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_2\delta + \mathbf{i}_3\mathbf{i}_3\omega + \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\rho. \quad (46)$$

Для определения тензора скоростей деформации и спина используем уравнение (7). Получаем

$$\mathbf{D} = \mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 \frac{\dot{\delta}}{\delta} + \mathbf{i}_3\mathbf{i}_3 \frac{\dot{\omega}}{\omega} + (\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1) \frac{\dot{\rho}}{2\delta} \left(\frac{\rho}{\varphi} \right), \quad (47)$$

$$\mathbf{\Omega} = (\mathbf{i}_2\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2) \frac{\dot{\rho}}{2\delta} \left(\frac{\rho}{\varphi} \right). \quad (48)$$

Наконец, по формуле (3) вычисляем тензор Фингера

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{i}_1\mathbf{i}_1(\varphi^2 + \rho^2) + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_2\delta^2 + \mathbf{i}_3\mathbf{i}_3\omega^2 + (\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1)\rho\delta. \quad (49)$$

Будем разыскивать кинематические величины, характеризующие упругие и пластические деформации в таком же виде, как и (46), (47), (48) и (49). Ограничимся ниже только тремя разложениями упругопластической деформации.

1. Аддитивное разложение тензора скоростей деформации (26).

Используя (47) и его аналоги для упругой и пластической деформации, получаем следующие условия соединения:

$$\frac{\dot{\varphi}}{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_{el}}{\varphi} + \frac{\dot{\varphi}_p}{\varphi_p}, \quad \frac{\dot{\delta}}{\delta} = \frac{\dot{\delta}_{el}}{\delta_{el}} + \frac{\dot{\delta}_p}{\delta_p}, \quad \frac{\dot{\omega}}{\omega} = \frac{\dot{\omega}_{el}}{\omega_{el}} + \frac{\dot{\omega}_p}{\omega_p}. \quad (50)$$

$$\frac{\dot{\rho}}{2\delta} \left(\frac{\rho}{\varphi} \right) = \frac{\dot{\rho}_{el}}{2\delta_{el}} \left(\frac{\rho_{el}}{\varphi_{el}} \right) + \frac{\dot{\rho}_p}{2\delta_p} \left(\frac{\rho_p}{\varphi_p} \right). \quad (51)$$

Первые три уравнения легко интегрируются, что дает три уравнения

$$\varphi = \varphi_{el}\varphi_p, \quad \delta = \delta_{el}\delta_p, \quad \omega = \omega_{el}\omega_p. \quad (52)$$

Сопоставляя (48) и (51) легко находим уравнение для разложения спина

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_{el} + \mathbf{\Omega}_p. \quad (53)$$

2. Наиболее популярное мультипликативное разложение (27).

Используя (46) и их аналоги для упругих и пластических движений, находим следующие уравнения соединения:

$$\varphi = \varphi_{el}\varphi_p, \quad \delta = \delta_{el}\delta_p, \quad \omega = \omega_{el}\omega_p, \quad (54)$$

$$\rho = \rho_{el}\delta_p + \varphi_{el}\rho_p. \quad (55)$$

Легко видеть, что первые три разложения для удлинений в точности совпадают с (52), тогда как четвертое (55) сильно отличается от (51).

3. Непопулярное мультипликативное разложение (28).

Снова используя (46) и его аналоги, находим:

$$\varphi = \varphi_{el}\varphi_p, \quad s = \delta_{el}\delta_p, \quad \omega = \omega_{el}\omega_p, \quad (56)$$

$$\rho = \rho_p\delta_{el} + \varphi_p\rho_{el}.$$

Опять замечаем, что первые три разложения для удлинений в точности совпадают с (52), тогда как четвертое - (56) - отличается как от (51), так и от (55).

Все полученные уравнения будут использованы в следующем разделе.

Прогрессивная деформация образца из материала Прандтля

Вообразим, что к образцу приложена некоторая нагрузка, и представим, что она возрастает. Можно отметить две стадии деформирования образца:

1. На первой стадии поведение образца является чисто упругим, поскольку предел текучести еще не достигнут, и пластические деформации вообще отсутствуют ($\dot{\mu} = 0$). Можно представить себе, что эта стадия очень коротка во времени - одно мгновение - и состояние текучести достигается мгновенно. Обозначим удлинения и сдвиг в конце этой стадии символом звездочка.

Получаем уравнения

$$\varphi = \varphi_{el}^*, \quad \delta = \delta_{el}^*, \quad \omega = \omega_{el}^*, \quad \rho = \rho_{el}^* \quad (57)$$

2. Вторая стадия. Полагаем, что после достижения предела текучести напряжения не будут изменяться во времени. В соответствии с законом Гука будут постоянными и упругие деформации, а значит и упругие удлинения, и сдвиг. В результате тензор скоростей упругих деформаций оказывается равным нулю в полном соответствии с уравнением (47), примененным к упругим удлинениям и сдвигам. Таким образом, уравнения (35) и (36), реализующие процесс деформирования, принимают вид

$$\mathbf{D} = \mu \Theta(\mathbf{s}_{el}^*), \quad (58)$$

$$\mathbf{s}_{el}^* : \mathbf{s}_{el}^* = 2\tau_s^2. \quad (59)$$

Положим, что тензор Θ имеет ту же структуру, что и тензор \mathbf{D} , определенный формулой (47). Мы докажем это ниже для случая упругости Муни и ассоциативной пластичности Мизеса. Принятое предположение позволяет переписать (58) в координатной форме

$$\frac{\varphi}{\varphi} = \mu \Theta_{11}, \quad \frac{\delta}{\delta} = \mu \Theta_{22}, \quad \frac{\omega}{\omega} = \mu \Theta_{33}, \quad \frac{\varphi}{2\delta} \left(\frac{\rho}{\varphi} \right) = \mu \Theta_{12}. \quad (60)$$

Эти уравнения легко интегрируются, поскольку координаты тензора Θ являются постоянными, зависящими от постоянных упругих напряжений. Принимая условия (57) в качестве начальных условий для второй стадии деформирования, получим

$$\varphi = \varphi_{el}^* e^{\mu \Theta_{11}}, \quad \delta = \delta_{el}^* e^{\mu \Theta_{22}}, \quad \omega = \omega_{el}^* e^{\mu \Theta_{33}}, \quad (61)$$

$$\rho = \rho_{el}^* e^{\mu \Theta_{12}} + \delta_{el}^* \frac{2\Theta_{12}}{\Theta_{22} - \Theta_{11}} (e^{\mu \Theta_{22}} - e^{\mu \Theta_{11}}). \quad (62)$$

Подставляя выражение (61) в (52), получим представления пластических удлинений

$$\varphi_p = e^{\mu \Theta_{11}}, \quad \delta_p = e^{\mu \Theta_{22}}, \quad \omega_p = e^{\mu \Theta_{33}}. \quad (63)$$

Обращаем внимание на то, что эти представления удлинений справедливы для трех рассмотренных ранее разложений упругопластических деформаций. Только сдвиги различаются для этих разложений

1. Для аддитивного разложения тензора скоростей деформации (26) по (51) находим

$$\rho_p = \frac{2\Theta_{12}}{\Theta_{22} - \Theta_{11}} (e^{\mu \Theta_{22}} - e^{\mu \Theta_{11}}). \quad (64)$$

2. Для наиболее популярного мультипликативного разложения (27) по (55) находим

$$\rho_p = \frac{1}{\varphi_{el}^*} \left(\delta_{el}^* \frac{2\Theta_{12}}{\Theta_{22} - \Theta_{11}} - \rho_{el}^* \right) (e^{2\Theta_{22}} - e^{2\Theta_{11}}). \quad (65)$$

3. Для непопулярного мультипликативного разложения (28) находим ρ_p по (56). Результат в точности совпадает с (64)!

Чтобы охарактеризовать различие между значениями пластических сдвигов, вводим отношение значения ρ_p по (65) к значению ρ_p по (64)

$$\eta = \frac{\delta_{el}^*}{\varphi_{el}^*} - \frac{\rho_{el}^*}{\varphi_{el}^*} \frac{\Theta_{22} - \Theta_{11}}{2\Theta_{12}}. \quad (66)$$

Вычисление коэффициента η для примера, в котором упругость представлена по Муни, а ассоциированная пластичность по Мизесу

Полагая, что свободная энергия представлена потенциалом Муни,

$$\Psi_{el} = \frac{A}{2\rho_0} (\mathbf{E} : \mathbf{G}_{el} - 3),$$

где A - упругий модуль.

Уравнение упругости принимает вид (см. [8])

$$\tau_{el} = -p\mathbf{E} + A\Phi_{el}.$$

Девiatorная часть такова:

$$\mathbf{s}_{el} = A \text{Dev } \Phi_{el}. \quad (67)$$

Прямое вычисление с помощью (49) приводит к следующим значениям координат девiatorа напряжений:

$$\begin{aligned} s_{11} &= A(\varphi_{el}^2 - \rho_{el}^2 - \chi_{el}), \\ s_{22} &= A(\delta_{el}^2 - \chi_{el}), \\ s_{33} &= A(\omega_{el}^2 - \chi_{el}), \\ s_{12} &= A\rho_{el}\delta_{el}, \\ \chi_{el} &= \frac{1}{3}(\varphi_{el}^2 + \rho_{el}^2 + \delta_{el}^2 + \omega_{el}^2). \end{aligned} \quad (68)$$

Напомним, что потенциал Муни определяет некоторый несжимаемый материал, так что имеем

$$\varphi_{el}\delta_{el}\omega_{el} = 1. \quad (69)$$

Подставляя координаты тензора \mathbf{s} по (68) в (59), мы выразим условие текучести Мизеса через предельные удлинения и сдвиг. Получаем

$$(\varphi_{el}^2 + \rho_{el}^2)^2 + \delta_{el}^4 + \omega_{el}^4 + 2\rho_{el}^2\delta_{el}^2 - \frac{1}{3}(\varphi_{el}^2 + \rho_{el}^2 + \delta_{el}^2 + \omega_{el}^2)^2 = 2\left(\frac{\tau_s}{A}\right)^2. \quad (70)$$

Строго говоря, здесь должны стоять величины φ_{el} , ρ_{el} и т. д. со звездочкой. Такие величины были введены, как предельные значения упругих удлинений и сдвига, при которых соответствующие напряжения удовлетворяют условию текучести. А это как

раз то, что записано в (70). Однако мы пренебрегаем значком звездочка в целях упрощения и, надеясь на то, что это не приведет к непониманию читателя.

Решая это уравнение относительно упругого сдвига, получим удивительно простой результат

$$\rho_{el}^2 = \frac{\omega_{el}^2}{2} - \varphi_{el}^2 - \delta_{el}^2 \pm \sqrt{3 \left(\frac{\tau_s}{A} \right)^2 + \frac{3}{\omega_{el}^2} - \frac{3}{4} \omega_{el}^4}. \quad (71)$$

Мы обещали выше вернуться к вопросу о том, что тензор Θ имеет ту же структуру, что тензор скоростей деформаций (конечно, для рассматриваемого движения (45)).

Если положить

$$\Theta(\mathbf{s}) = \mathbf{s}, \quad (72)$$

то мы приходим к так называемому ассоциативному закону пластического течения, соответствующему критерию текучести Мизеса. Сопоставляя (68) и (47) убеждаемся, что подобие структур Θ и \mathbf{D} имеет место.

Можно принять, что Θ изотропная тензорная функция \mathbf{s}

$$\Theta(\mathbf{s}) = \text{Dev}(\mathbf{s} + \alpha \mathbf{s}^2),$$

где α - заданная функция инвариантов \mathbf{s} . Прямое вычисление показывает, что $\text{Dev} \mathbf{s}^2$ имеет ту же самую тензорную структуру, что и \mathbf{s} , по крайней мере, для \mathbf{s} данных формулой (68). Так что, и в этом случае подобие структур Θ и \mathbf{D} также имеет место.

Используем полученное выражение (71) и (68) для явного представления коэффициента η по (66). На первом шаге используем (72) и (68). Получим

$$\eta = \frac{\rho_{el}^2 + \varphi_{el}^2 + \delta_{el}^2}{2\varphi_{el}\delta_{el}}.$$

Подставляя сюда ρ_{el}^2 по (71), получаем с учетом условия несжимаемости следующее простейшее выражение:

$$\eta = \frac{\omega_{el}}{2} \left(\frac{\omega_{el}^2}{2} \pm \sqrt{3 \left(\frac{\tau_s}{A} \right)^2 + \frac{3}{\omega_{el}^2} - \frac{3}{4} \omega_{el}^4} \right). \quad (73)$$

Проведенные рассуждения имеют смысл только в том случае, когда выражение ρ_{el}^2 по (71) оказывается положительным. Это дает следующее неравенство для η :

$$\eta > \frac{1}{2} \left(\frac{\delta_{el}}{\varphi_{el}} + \frac{\varphi_{el}}{\delta_{el}} \right). \quad (74)$$

Результаты вычислений коэффициента η , как функции ω_{el} для различных значений отношения τ_s / A представлены на рис.4. Они показывают, что η может принять большие значения, например, 10 или даже 100 и более. Такую же тенденцию демонстрирует также неравенство (74).

Таким образом, мы можем заключить, что наиболее популярное мультипликативное разложение градиента движения приводит к значительно большему пластическому сдвигу, чем это дают аддитивное разложение тензора скоростей и непопулярное мультипликативное разложение градиента движения.

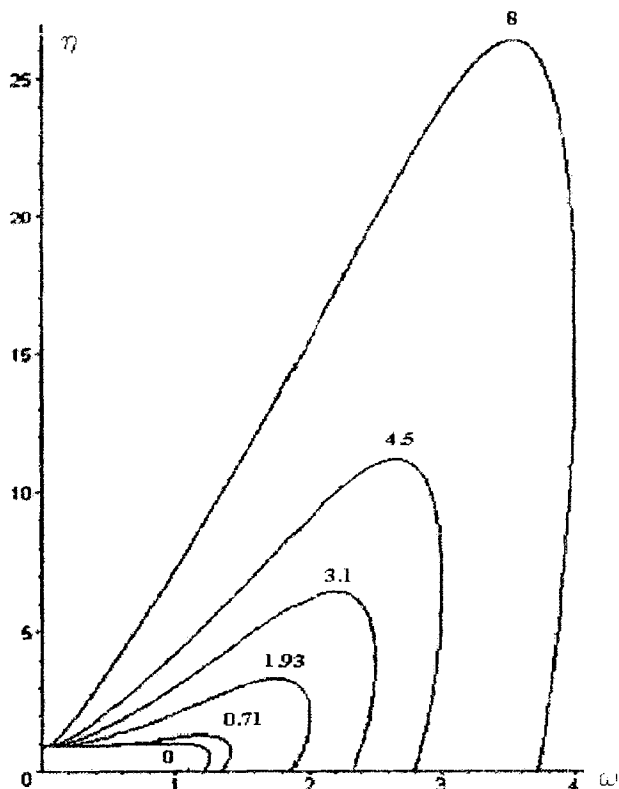


Рис. 4. Зависимость коэффициента η от упругого удлинения ω_e при различных значениях отношения τ_0 / A . Эти значения указаны числами около соответствующих кривых

Заключение

1. Определяющие уравнения упругопластического материала с реологической моделью Прандтля составлены с использованием различных разложений упругопластической деформации на упругую и пластическую части.

Классические определяющие уравнения использованы для описания упругости, а также классическое и обобщенные уравнения для описания пластичности. Все эти рассмотрения проведены в форме, пригодной для использования при конечных деформациях.

2. Только термодинамически состоятельные определяющие уравнения выбраны для внимательного анализа.

3. Точные решения построены для однородного плоского сдвига и трехосного растяжения упругопластического материала.

4. Эти решения использованы для вычисления упругих и пластических деформаций для разных видов разложения полной деформации на упругую и пластическую.

5. Аддитивное разложение тензора скоростей деформации

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{el} + \mathbf{D}_p$$

и мультипликативное разложение градиента движения

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_p \cdot \mathbf{F}_{el}$$

дают совпадающие результаты для пластических удлинений и сдвигов.

6. Мультипликативное разложение

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{el} \cdot \mathbf{F}_p$$

приводит к тем же, что и для других разложений, пластическим удлинениям и существенно большим значениям пластического сдвига.

7. Это различие в пластическом сдвиге может быть использовано для выбора подходящего метода разложения деформации для некоторого данного материала по экспериментальным данным.

8. Обращаем внимание на то существенное обстоятельство, что упругая деформация оказывается одинаковой для всех рассмотренных разложений упругопластической деформации.

Библиографический список

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности / ГИТТЛ. Москва, 1956.
2. Palmov V.A. Vibration of elastoplastic bodies. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.
3. В.А. Пальмов; Колебания упруго-пластических тел. М.: Наука, 1976. - 328 с.
4. Simo J.C. A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and multiplicative decomposition. I: Continuum formulation // *Comp. Meth. Mech. Appl. Engineering*. 66 (1988), P. 199-219.
5. Simo J.C., Miehe C. Associative coupled thermoplasticity at finite strains: formulation, numerical analysis and implementation // *Comp. Meth. Appl. Mech. Engin.* 98(1992). P.41-104.
6. Duszek M.K., Perzina P., Stein E. Adiabatic shear band localization in elastoplastic damaged solids // *Int. J. Plasticity* 1992. N 8. P 361-384.
7. Nemat-Nasser S. Decomposition of strain measures and their rates in finite deformation elastic-plasticity // *Int. J. Solids Struct.* 1979. N 15. P. 155.
8. Пальмов В.А. Сравнение методов декомпозиции деформации в нелинейной вязкоупругости и упруго-пластичности // Упругость и неупругость (посв. 90-летию со дня рождения А.А. Ильюшина). М.: Изд.-во МГУ, 2001. С. 81-87.
9. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Физматгиз, 1980. 512 с.
10. Трудсделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
11. Khan A.S. & Huang S. Continuum theory of plasticity. John Wiley & Sons Inc. New York-Chichester, 1995.
12. Palmov V.A. Comparison of Different Approaches in Viscoelastoplasticity for Large Strains, *ZAMM (Z. Angew. Math. Mech.)* N 80. 2000. P. 801-806.

Получено 24.03.2001