

И.А. Патрикеев, П.Г. Фрик

Институт механики сплошных сред УрО РАН

ВЕЙВЛЕТ-ИДЕНТИФИКАЦИЯ СПИРАЛЬНЫХ СТРУКТУР**Abstract**

Method of spiral detection in two-dimensional fields by anisotropic wavelets is proposed. This method can be useful for search and filter of spiral structures in astronomical and hydrodynamic images. Test examples illustrate how to evaluate parameters of logarithmic spirals.

Вейвлет-анализ является эффективным средством фильтрации изображений с целью выделения (либо подавления) структур заданного масштаба [1-4]. Вейвлеты дают также возможность проанализировать изображение на предмет структурных особенностей, таких как контуры, углы, границы и др. [5-7]. Иногда возникают задачи, в которых требуется выявить и параметризовать достаточно сложные пространственные структуры. Примером такого рода задач может служить анализ изображений внешних галактик с целью выделения в них спиральных рукавов. В качестве иллюстрации на рис.1 приведены два изображения галактики NGC6946 из работы [8], в которой для выделения спиральных структур использовалось разбиение изображений на концентрические кольца с последующим одномерным вейвлет-анализом поля в каждом кольце. Такая процедура позволила авторам выделить структуры определенного углового размера и выделить те из них, что могут быть описаны как логарифмические спирали. Следует отметить, что именно логарифмические спирали являются наиболее распространенной моделью формы галактических рукавов.

В данной работе делается попытка решить эту задачу в рамках двумерного вейвлет-анализа, не требующего предварительного разбиения изображения на отдельные кольцевые зоны. Для решения поставленной задачи используются анизотропные вейвлеты, параметризованные в полярной системе координат, совмещенной с центром галактики. Предложенный алгоритм опробован на ряде тестовых примеров.

Двумерные анизотропные вейвлеты

Основная идея вейвлет-анализа состоит в декомпозиции исходного сигнала на множество сигналов с различной степенью детализации. При этом в каждом из полученных сигналов подчеркиваются детали заданного масштаба, а детали других масштабов подавляются в большей или меньшей степени. Полное множество, составляющее вейвлет-образ исходного сигнала, образуется путем перебора всех значений масштабного параметра. В случае непрерывного изменения масштабный параметр рассматривается как одна из переменных вейвлет-образа.

В случае одномерного сигнала вейвлет-образ представляет собой функцию двух переменных: одна переменная отвечает за сдвиг вейвлета относительно исходного сигнала, а вторая – за масштаб. В многомерных случаях возможны два типа вейвлетов (более подробно вейвлет-преобразование рассмотрено в [1-4]). К изотропным относятся вейвлеты, построенные на базе функций, инвариантных к вращению. Все остальные вейвлеты относятся к анизотропным. В отличие от изотропных, анизотропные вейвлеты имеют кроме параметров сдвига и масштабирования, еще и дополнительные параметры поворота. В двумерном случае, наиболее важном для обработки изображений, изотропный вейвлет имеет два параметра сдвига и один масштабный параметр, а анизотропный – еще и один параметр поворота.

В общем виде непрерывное двумерное вейвлет-преобразование отображает функцию $f(x, y)$ в четырехмерное пространство:

$$W(a, \varphi, b_x, b_y) = \iint_{R^2} f(x, y) (T^{b_x, b_y} D^a \Omega^\varphi g) dx dy, \quad (1)$$

где W – вейвлет-образ (множество вейвлет-коэффициентов), f – исходная функция, g – анализирующий вейвлет, b_x, b_y – параметры сдвига, a – параметр масштаба и φ – параметр поворота. T, D, Ω – операторы сдвига, масштабирования и поворота. соответственно. На практике область интегрирования ограничена размерами изображения, а само изображение считается дискретной матрицей значений функции f . Если g – изотропный вейвлет, то в формуле (1) оператор поворота Ω можно исключить, и число переменных вейвлет-образа сокращается до трех.

Одна из интегральных характеристик изображения – это энергия, которая находится в результате интегрирования квадрата функции по всему полю. В вейвлет-представлении может быть осуществлена декомпозиция полной энергии по масштабам и направлениям:

$$E(a, \varphi) = \iint_{R^2} |Wf(b_x, b_y, a, \varphi)|^2 db_x db_y. \quad (2)$$

При необходимости можно провести декомпозицию энергии только заданной подобласти, поскольку вейвлет-преобразование сохраняет локальность.

Выбор анализирующего вейвлета g в формуле (1) достаточно произволен и зависит от многих факторов, в том числе и от физической постановки задачи, особенностей изображения и свойств искомым структур. Для фильтрации ориентированных структур необходимо оценить угловую избирательность вейвлета. Изотропные вейвлеты вообще не пригодны для решения таких задач, а различные анизотропные вейвлеты могут быть более или менее приспособленными к фильтрации структур определенного типа. Наилучшее угловое разрешение достигается направленными вейвлетами, специальным классом анизотропных вейвлетов, спектр которых сосредоточен в определенном секторе частотной плоскости [5-7]. В данной работе не ставилась цель выбора оптимального вейвлета, и анализ изображений проводился с помощью анизотропной версии хорошо известного вещественного вейвлета, называемого «мексиканской шляпой» с эллиптичностью (отношением σ_x к σ_y), равной 4.

$$g(x, y) = \left(\frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_y^2} - \left(\frac{x}{\sigma_x} \right)^2 - \left(\frac{y}{\sigma_y} \right)^2 \right) \exp \left(- \frac{\left(\frac{x}{\sigma_x} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sigma_y} \right)^2}{2} \right). \quad (3)$$

При анализе изображений, содержащих центрально-симметричные структуры, удобнее перейти в полярные координаты и использовать как параметр поворота угол закрутки, который отсчитывается от перпендикуляра к радиус-вектору анализируемой точки. Такое определение дает способ поиска логарифмических спиралей по декомпозиции энергии изображения (2) как структур, у которых, с одной стороны, угол закрутки не зависит от радиальной координаты при любом масштабе и, с другой стороны, как структур, которые соответствуют максимуму энергии в координатах угол - масштаб. Данные способы проиллюстрированы ниже на тестовых примерах.

На практике вычисление вейвлет-коэффициентов при различных углах закрутки требует значительных компьютерных ресурсов, так как перед сверткой в каждой точке необходимо сформировать матрицу вейвлета с заданным параметром поворота. Одним из способов ускорения вычислений является преобразование исходного изображения в лог-полярные координаты (в которых логарифмическая спираль представляет собой прямую) и вычисление вейвлет-коэффициентов как функции полярного угла. В этом случае достаточно сформировать матрицу вейвлета один раз для всех точек изображения.

Тестовые примеры

Первый тест "SUNLET" состоит из двух объектов: 1) центрального круга большей толщины и 2) короны из 10 лучей меньшей толщины. Исходное изображение представлено на рис.2, а. Необходимо отметить, что круг может быть рассмотрен как предельный случай логарифмической спирали с нулевым углом закрутки, но лучи не могут быть рассмотрены как участки спирали, так как угол закрутки не является постоянным. Несмотря на это, удается разделить объекты в пространстве масштаб - угол, как показано ниже.

Вейвлет-преобразование исходного изображения производилось в диапазоне угла закрутки от -40° до 80° , так как заранее известно, что углы закрутки обоих объектов неотрицательны. Масштабный параметр измерялся как отношение стороны матрицы вейвлета к матрице изображения в процентах. На рис. 3 показана карта распределения энергии в пространстве масштаб - угол. Видно два максимума, соответствующих каждому из объектов. Первый максимум имеет координаты: угол закрутки 0° , масштаб - 6,68% и соответствует центральному кругу. Второй максимум соответствует короне: угол закрутки 80° , масштаб - 3,96%. Масштабная координата каждого из максимумов соответствует ширине соответствующего объекта.

На рис. 2, б и 2, в показаны карты вейвлет-коэффициентов в натуральном представлении (координатах x и y), соответствующие максимумам. Видно, что эти карты похожи на исходные объекты, которые могут быть восстановлены по картам простой пороговой фильтрацией, так как известно, что исходное изображение

принимает неотрицательные значения. Остальные точки рис. 3 соответствуют изображениям, на которых видны оба объекта в разной степени. На некоторых изображениях будет виден слабый след от центрального кольца, на других – от короны.

Второй тест “3LOG” (рис.4, а) состоит из трех одинаковых логарифмических спиралей с углом закрутки 40 градусов (положительным считается направление против часовой стрелки). Каждая из спиралей имеет гауссовский профиль с уменьшением амплитуды и увеличением ширины от центра к периферии. Это изображение было преобразовано в полярные координаты (рис.4, б). Логарифмические спирали выглядят как прямые линии, если отложить радиальную координату в логарифмической шкале (рис.4, в). В таком представлении необходимо искать постоянный полярный угол, соответствующий логарифмической спирали, вместо постоянного угла закрутки в декартовых координатах.

Вейвлет-коэффициенты определялись по формуле (1) при наборе фиксированных значений масштабного параметра и полном диапазоне углов. При расчетах предварительно развернутой вейвлет вписывался в квадратную матрицу, причем большим значениям масштабного параметра соответствовали большие матрицы. Полученная вейвлет-матрица сворачивалась с исходным изображением. Затем по вейвлет-коэффициентам вычислялась декомпозиция энергии по формуле (2). Результаты расчетов для исходного изображения в декартовых координатах при размере матрицы вейвлета, равном 31×31 , представлены на рис.5, а. Видно, что энергия сосредоточена вблизи угла закрутки 40 градусов. Похожий результат, представленный на рис.5, б, был получен для изображения в лог-полярных координатах (рис.4, в). Энергия сосредоточена вблизи полярного угла 140 градусов, соответствующего углу закрутки 40 градусов. Зависимости энергии от угла были получены в результате интегрирования каждой из матриц (рис.4, а и 4, б) по радиусу.

Выводы

Данная работа продолжает развитие методов выделения пространственных структур с помощью вейвлет-преобразования. На простых примерах показаны возможности предложенного алгоритма. Представленные результаты позволяют надеяться, что использование анизотропных вейвлетов при анализе астрофизических данных заметно расширит круг решаемых задач. Помимо спектрального и корреляционного анализа галактических полей [9] станет возможным направленное выделение и параметризация структур заданного типа. Метод может быть также полезен при анализе гидродинамических структур, подобных описанным в [3].

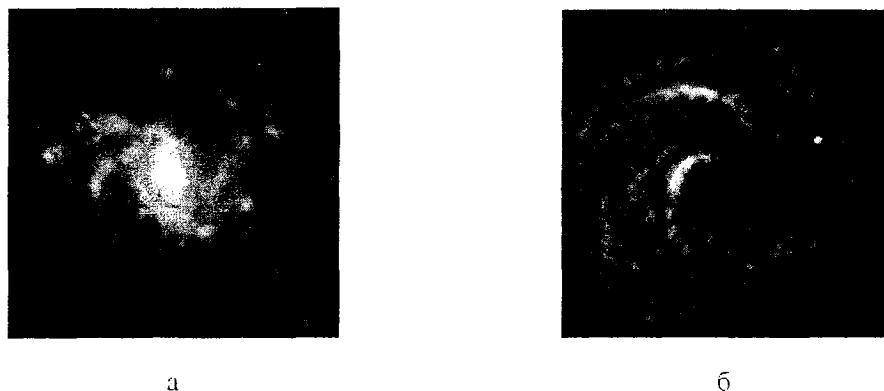


Рис.1. Галактика NGC6946 (а) общее излучение в красном диапазоне, (б) поляризованное излучение на волне 18 см

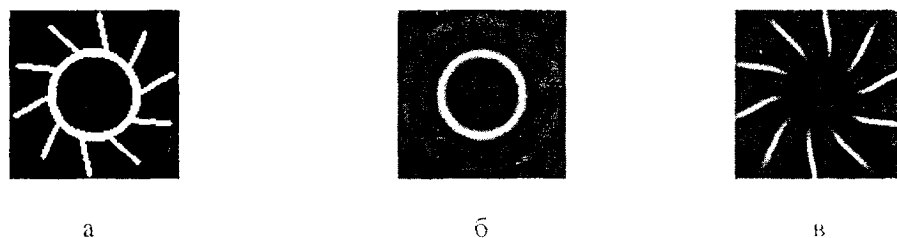


Рис.2. Тест “SUNLET”, состоящий из центрального кольца большей толщины и десяти отрезков меньшей толщины, в оттенках серого (белый цвет соответствует максимальному значению, черный - минимальному значению функции): а - исходное изображение; б - вейвлет-коэффициенты при угол закрутки угле 0° и масштабе 6,68%, соответствующие первому максимуму на рис.3; в - вейвлет-коэффициенты при угол закрутки угле 80° и масштабе 3,96%, соответствующие второму максимуму на рис.3

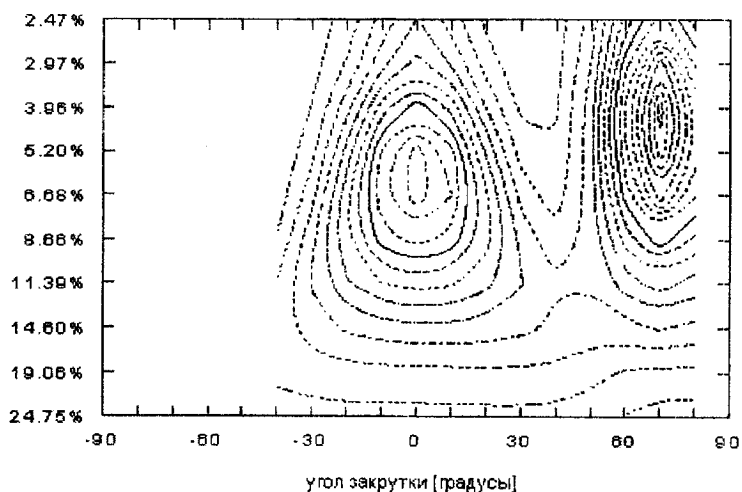


Рис.3. Распределение энергии теста "SUNLET" (рис.2, а) по масштабу и углу в контурах (по горизонтали - угол закрутки в градусах, по вертикали - масштаб как отношение стороны матрицы вейвлета к стороне изображения в процентах). Значения энергии при углах меньше - 40 градусов близки к нулю и не показаны

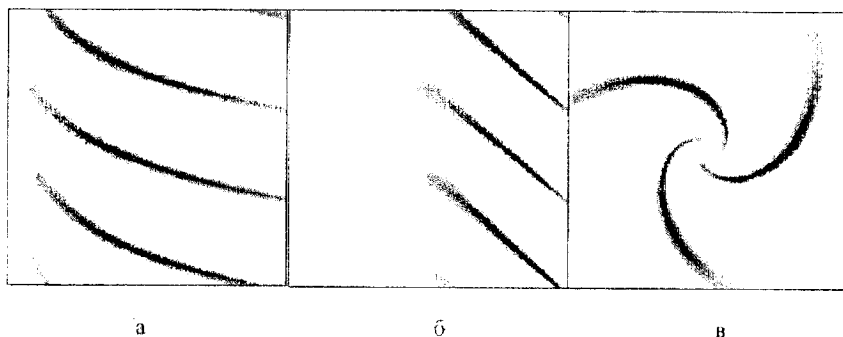
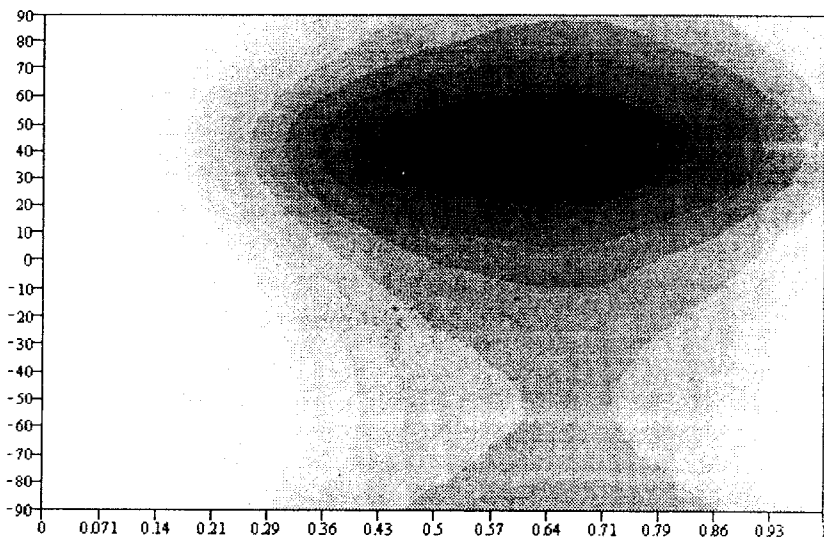
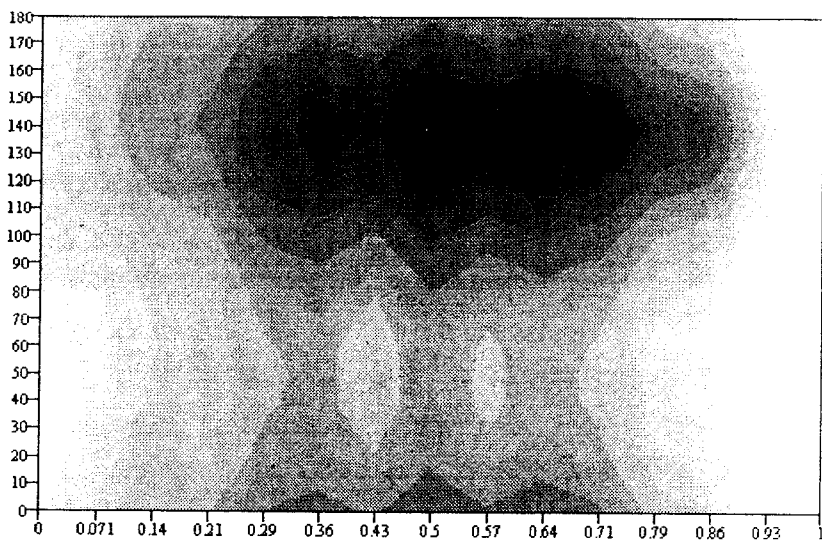


Рис.4. Тест "3LOG", состоящий из трех логарифмических спиралей с гауссовским профилем, в оттенках серого (черный цвет соответствует максимальному значению, белый - нулевому значению функции): а - исходное изображение "3LOG" в декартовых координатах; б - "3LOG" в полярных координатах (по горизонтали - радиус, по вертикали - полярный угол); в - "3LOG" в лог-полярных координатах (по горизонтали - радиус в логарифмической шкале, по вертикали - полярный угол)



а



б

Рис.5. Распределение энергии теста “3LOG” по радиусу и углу при фиксированном масштабе в оттенках серого (черный цвет соответствует максимальному значению, белый - нулевому значению функции): а - по вейвлет-образу изображения “3LOG” в декартовых координатах (рис.4, а) (по горизонтали - относительный радиус, по вертикали - угол закрутки угол в градусах); б - по вейвлет-образу “3LOG” в лог-полярных координатах (рис.4, в) (по горизонтали - относительный радиус, по вертикали - полярный угол в градусах)

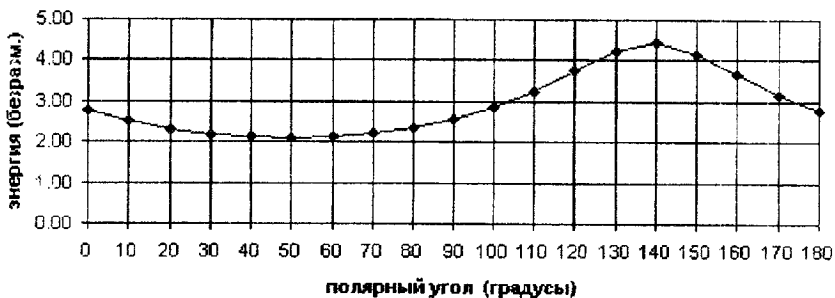
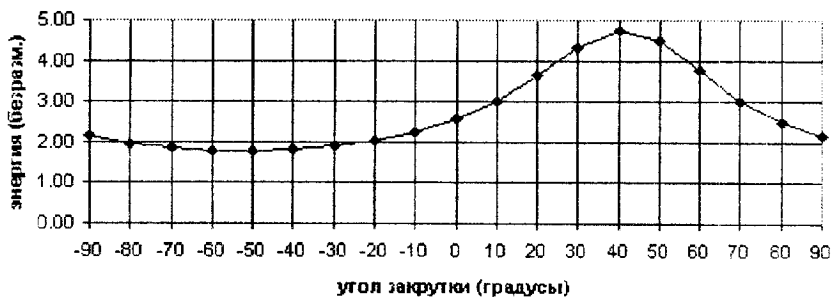


Рис.6. Распределение энергии теста “3LOG” при фиксированном масштабе: а - исходного изображения “3LOG” в декартовых координатах (рис.4, а); б - изображения “3LOG” в лог-полярных координатах (рис.4, в). Полярный угол 140 градусов соответствует углу закрутки 40 градусов

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 01-01-96493).

Программа для генерации логарифмических спиралей разработана студентом группы ММ97 М.А. Фоминых.

Библиографический список

1. Патрикеев И.А., Фрик П.Г. Вейвлет-томография в условиях шума // Математическое моделирование систем и процессов: Сб. науч. тр. / Перм. гос. техн. ун-т. - Пермь, 1997. - №5. - С. 86-92.
2. Daubechies I. Ten lectures on wavelets. Philadelphia: SIAM, 1992.
3. Farge M. Wavelet transforms and their applications to turbulence // Ann. Rev. Fluid Mech., - 1992. - Т.24. - С.395-457.
4. Holschneider M. Wavelets. An analysis tool. - Oxford: Oxford Univ. Press, 1995. - 423 с.
5. Antoine J.-P., Murenzi R., Piette B. Image analysis with 2D continuous wavelet transform: detection of position, orientation and visual contrast of simple objects // Proceedings of the

- international conference "Wavelets and Applications" in Marscille, France. - May, 1989 - editor Y. Meyer.
6. Antoine J.-P., Carrette P., Murenzi R., Piette B. Image analysis with two-dimensional continuous wavelet transform // Signal Processing. - 1993. - Т.31. - С.241-272.
 7. Antoine J.-P., Murenzi R. Two-dimensional wavelets and the scale-angle representation // Signal Processing. - 1996. - Т.52. - С. 259-281.
 8. Frick P., Beck R., Shukurov A., Sokoloff D., Ehle M., Kamphuis J. Magnetic and optical spiral arms in the galaxy NGC6946 // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2000. - Т.318. -С.925-937.
 9. Frick P., Beck R., Berkhuijsen E., Patrickeyev I. Scaling and correlation analysis of galactic images. Послана в Mon. Not. R. Astron. Soc.

Получено 26.03.2001