УДК 539.3

Б.Е. Победря[*], А. Родригес[**]

[*] **Московский государственный университет**
[**] **Daytona Beach Community College**

О МОДЕЛЯХ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ РЕОНОМНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ СТРУКТУР

Abstract

The linear rheonomous statement constitutive relations for an inhomogeneous medium with explosive on coordinates by material functions are considered. The evolutionary destructionis taken into account by introduction to constitutive relations of a tensor destruction. By an average technique the algorithm for a solution of the quasistatic problems of composite mechanics with the accepted constitutive relations is described.

Операторные определяющие соотношения, учитывающие меру повреждаемости, были рассмотрены нами в работах [1, 2]. Материальные функции определяющих соотношений для неоднородных сред зависят от пространственных координат и для композитов являются разрывными функциями этих координат. В работе [1] подробно проанализирован простейший случай физически линейной реономной среды, а в работе [2] рассмотрены и некоторые нелинейные среды.

Пусть нам заданы выражения напряжений σ_{ij} через деформации ε_{ij} и повреждаемость χ_{ij} в виде

$$\sigma_{ij} = \int_0^t \Gamma_{ijkl}(t,\tau)\,\varepsilon_{kl}^{T}(\tau)\,d\tau + \int_0^t V_{ijkl}(t,\tau)\,\chi_{kl}(\tau)\,d\tau . \tag{1}$$

Соотношения (1) являются частным случаем общих операторных соотношений[1]. При этом для тензора повреждаемости $\chi(t)$ запишем выражение

$$\chi_{ij} = \int_0^t X_{ijkl}(t,\tau)\,\varepsilon_{kl}^{T}(\tau)\,d\tau . \tag{2}$$

Для сокращения записи воспользуемся символическим операторным обозначением [3] и запишем соотношения (1) в виде

$$\sigma_{ij} = \breve{\Gamma}_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}^{T} + \breve{V}_{ijkl}\,\chi_{kl}, \tag{3}$$

а соотношение (2) в виде

$$\chi_{ij} = \breve{X}_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}^{T}. \tag{4}$$

Из (3) и (4)

$$\sigma_{ij} = \breve{S}_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{T},\ \breve{S}_{ijkl} = \breve{\Gamma}_{ijkl} + \breve{V}_{ijmn}\,\chi_{mnkl}, \tag{5}$$

т.е. мы получили соотношения, формально совпадающие с соотношением классической теории термовязкоупругости [4]. Заметим, что традиционно в соотношениях (2) тензор повреждаемости связывают с напряжением [5]

$$\chi_{ij} = \int_0^t Y_{ijkl}(t,\tau)\,\sigma_{kl}(\tau)\,d\tau \equiv \breve{Y}_{ijkl}\,\sigma_{kl}. \tag{6}$$

Подставив (6) в (3), получим

$$\sigma_{ij} = \breve{\Gamma}_{ijkl}\,\varepsilon^T_{kl} + \breve{V}_{ijmn}\,\breve{Y}_{mnkl}\,\sigma_{kl}. \tag{7}$$

Введём единичный тензор четвёртого ранга $\underset{\sim}{\Delta}$ [6],

$$\Delta_{ijkl} \equiv \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right). \tag{8}$$

Тогда (7) можно записать в виде

$$(\Delta_{ijkl} - \breve{V}_{ijmn}\,\breve{Y}_{mnkl})\,\sigma_{kl} = \breve{\Gamma}_{ijkl}\,\varepsilon^T_{kl}. \tag{9}$$

Пусть тензор-оператор $\breve{W}_{ijkl}$ является обратным по отношению к оператору, заключённому в левой части (9) в круглые скобки, т.е.

$$(\Delta_{ijkl} - \breve{V}_{ijmn}\,\breve{Y}_{mnkl})\,\breve{W}_{klpq} = \Delta_{ijpq}. \tag{10}$$

Тогда соотношения (9), а значит и (7) можно, как и прежде, записать в виде $(5)^1$, только теперь оператор $\breve{S}_{ijkl}$ имеет вид не $(5)^2$, а

$$\breve{S}_{ijkl} = \breve{W}_{ijmn}\,\breve{\Gamma}_{mnkl}. \tag{11}$$

Таким образом, доказана эквивалентность записей (2) и (6).

Разумеется, мы будем считать определяющие соотношения (5) обратимыми, т.е. их можно разрешить относительно деформаций

$$\varepsilon^T_{ij} = \breve{Q}_{ijkl}\,\sigma_{kl}, \tag{12}$$

где

$$\breve{S}_{ijmn}\,\breve{Q}_{mnkl} = \Delta_{ijkl}. \tag{13}$$

Определяющим соотношениям (12) соответствуют две исходные формы записи:

$$\varepsilon^T_{ij} = \breve{K}_{ijkl}\,\sigma_{kl} + \breve{A}_{ijkl}\,\chi_{kl}. \tag{14}$$

Одна форма в виде (6), а другая в виде (4). В первом случае

$$\breve{Q}_{ijkl} = \breve{K}_{ijkl} + \breve{A}_{ijmn}\,\breve{V}_{mnkl}, \tag{15}$$

а во втором

$$\breve{Q}_{ijkl} = \breve{B}_{ijmn}\,\breve{K}_{mnkl}, \tag{16}$$

где тензор-оператор $\breve{B}_{ijkl}$ является обратным к тензору-оператору $\Delta_{ijkl}-\breve{A}_{ijmn}\breve{X}_{mnkl}$, т.е.

$$\breve{B}_{ijkl}(\Delta_{klmn}-\breve{A}_{klpq}\breve{X}_{pqmn})=\Delta_{ijmn}. \tag{17}$$

Таким образом, и в случае (14) обе формы записи (4) и (6) эквивалентны.

Для изотропного случая соотношения (14) могут быть записаны в виде

$$e_{ij}=\breve{K}s_{ij}+\breve{A}\bar{\chi}_{ij}, \tag{18}$$

$$\theta^T=\breve{K}_1\sigma+\frac{1}{9}\breve{A}_1\overset{0}{\chi}, \tag{19}$$

где

$$\varepsilon^T_{ij}=\theta^T\sigma_{ij}+e_{ij},\quad \sigma_{ij}=\sigma\delta_{ij}+s_{ij},\quad \chi_{ij}=\frac{1}{3}\overset{0}{\chi}\delta_{ij}+\bar{\chi}_{ij},$$

$$\theta^T=\varepsilon_{ii}-3\alpha\vartheta,\quad \sigma=\frac{1}{3}\sigma_{kk},\quad \overset{0}{\chi}=\chi_{kk},$$

$$\left.\begin{aligned}\breve{K}_{ijkl}&=\frac{\breve{K}_1-3\breve{K}}{9}\delta_{ij}\delta_{kl}+\frac{1}{2}\breve{K}(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}),\\ \breve{A}_{ijkl}&=\frac{\breve{A}_1-3\breve{A}}{9}\delta_{ij}\delta_{kl}+\frac{1}{2}\breve{A}(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}).\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Соотношения (6) в этом случае примут вид

$$\begin{aligned}\bar{\chi}_{ij}&=\breve{Y}s_{ij},\\ \overset{0}{\chi}&=\breve{Y}_1\sigma,\end{aligned} \tag{21}$$

где аналогично (20):

$$\breve{Y}_{ijkl}=\frac{\breve{Y}_1-3\breve{Y}}{9}\delta_{ij}\delta_{kl}+\frac{1}{2}\breve{Y}(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}). \tag{22}$$

Поэтому соотношения (12) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}e_{ij}&=\breve{Q}s_{ij},\\ \theta^T&=\breve{Q}_1\sigma.\end{aligned} \tag{23}$$

Так что для этого случая

$$\begin{aligned}\breve{Q}&=\breve{K}+\breve{A}\breve{Y},\\ \breve{Q}_1&=\breve{K}_1+\frac{1}{9}\breve{A}_1\breve{Y}_1.\end{aligned} \tag{24}$$

Опишем теперь, каким образом можно отыскать экспериментально ядро $Q(t)$, соответствующее оператору $\breve{Q}$ в (23). Для простоты будем считать ядро Q разностного типа $Q(t-\tau)$, а форму записи (23) - соответствующей форме Больцмана - Вольтерры, т.е. в виде интеграла Стилтьеса:

$$e_{ij}(t) = \int_0^t Q(t-\tau)\, d s_{ij}(\tau) \; . \tag{25}$$

При этом из (24) следует

$$Q(t) = K(t) + \int_0^t A(t-\tau)\, d Y(\tau) \, . \tag{26}$$

Эффективные ядра релаксации

Стремление расширить область применения феноменологического подхода к описанию деструкции материала с учётом его структуры за счёт введения новых параметров (моментных напряжений, дислокаций, объектов повреждаемости) связано со многими причинами. Это не только учёт концентраторов шероховатости поверхности, надрезов, отверстий и т.п., но и наличие неоднородности структуры. Будем считать, что эта неоднородность носит регулярный характер, т.е. материальные функции определяющих соотношений (1) предыдущего раздела являются периодическими функциями координат. В этом случае разработан достаточно эффективный аппарат методики осреднения [7,8]. Этим аппаратом мы и воспользуемся для описания деструкции композитов в процессе их деформирования.

Рассмотрим, например, изотермический случай подобных определяющих соотношений. Уравнения равновесия среды запишем в виде

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0 \; . \tag{1}$$

Вводим малый геометрический параметр α [7] и, считая ядра $S_{ijkl}(t)$ операторов $\breve{S}_{ijkl}$ (4) (пред. раздела) функциями быстрой переменной ξ [8],

$$\xi = \frac{\mathbf{x}}{\alpha} , \tag{2}$$

запишем уравнения равновесия (1) в виде

$$\frac{1}{\alpha} \breve{S}_{ijkl|j}\, u_{k,l} + \breve{S}_{ijkl}\, u_{k,lj} + \rho F_i = 0 \, . \tag{3}$$

Вектор перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x},\xi)$ представим в виде асимптотического ряда по степеням α:

$$u_k = v_k + \alpha \breve{N}^{(1)}_{kmi_1}\, v_{m,i_1} + \alpha^2 \breve{N}^{(2)}_{kmi_1i_2}\, v_{m,i_1i_2} + \alpha^3 \breve{N}^{(3)}_{kmi_1i_2i_3}\, v_{m,i_1i_2i_3} + \ldots , \tag{4}$$

где "локальные" операторы $\breve{\underset{\sim}{\mathbf{N}}}^{(1)}(\xi)$, $\breve{\underset{\sim}{\mathbf{N}}}^{(2)}(\xi)$, $\breve{\underset{\sim}{\mathbf{N}}}^{(3)}(\xi)$ зависят от быстрой переменной, а "среднее" поле перемещений $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ - от координаты $\mathbf{x}$. Тогда дифференцируя (4), имеем

$$u_{k,l}=v_{k,l}+\overset{\cup}{N}{}^{(1)}_{kmi_1\|l}\,v_{m,i_1}+\alpha\left(\overset{\cup}{N}{}^{(1)}_{kmi_1i_2}\,v_{m,i_1i_2l}+\overset{\cup}{N}{}^{(2)}_{kmi_1i_2\|l}\,v_{m,i_1i_2}\right)+$$
$$+\alpha^2\left(\overset{\cup}{N}{}^{(2)}_{kmi_1i_2}\,v_{m,i_1i_2l}+\overset{\cup}{N}{}^{(3)}_{kmi_1i_2i_3\|l}\,v_{m,i_1i_2i_3}\right)+ \tag{5}$$
$$+\alpha^3\left(\overset{\cup}{N}{}^{(3)}_{kmi_1i_2i_3}\,v_{m,i_1i_2i_3l}+\overset{\cup}{N}{}^{(4)}_{kmi_1i_2i_3i_4\|l}\,v_{m,i_1i_2i_3i_4}\right)+\ldots\ldots,$$

$$u_{k,lj}=v_{k,lj}+\frac{1}{\alpha}\overset{\cup}{N}{}^{(1)}_{kmi_1\|lj}v_{m,i_1}+\left(\overset{\cup}{N}{}^{(1)}_{kmi_1\|j}v_{m,i_1l}+\overset{\cup}{N}{}^{(2)}_{kmi_1i_2\|lj}\,v_{m,i_1i_2}+\overset{\cup}{N}{}^{(2)}_{kmi_1\|l}\,v_{m,i_1j}\right)+$$
$$+\alpha\left(\overset{\cup}{N}{}^{(1)}_{kmi_1}\,v_{m,i_1lj}+\overset{\cup}{N}{}^{(2)}_{kmi_1i_2\|l}\,v_{m,i_1i_2j}+\overset{\cup}{N}{}^{(2)}_{kmi_1i_2\|j}\,v_{m,i_1i_2l}+\overset{\cup}{N}{}^{(3)}_{kmi_1i_2i_3\|lj}\,v_{m,i_1i_2i_3}\right)+$$
$$+\alpha^2\left(\overset{\cup}{N}{}^{(1)}_{kmi_1i_2}\,v_{m,i_1i_2lj}+\overset{\cup}{N}{}^{(2)}_{kmi_1i_2i_3\|l}\,v_{m,i_1i_2i_3j}+\overset{\cup}{N}{}^{(3)}_{kmi_1i_2i_3j}\,v_{m,i_1i_2i_3l}+\overset{\cup}{N}{}^{(4)}_{kmi_1i_2i_3i_4\|lj}\,v_{m,i_1i_2i_3i_4}\right)$$
$$+\ldots\ldots\,. \tag{6}$$

Подставим теперь разложения (5) и (6) в (3) и соберём слагаемые при одинаковых степенях α. Тогда получим

$$\frac{1}{\alpha}\hat{S}^{(-1)}_{imi_1}\,v_{m,i_1}+\hat{S}^{(0)}_{imi_1i_2}\,v_{m,i_1i_2}+\alpha\,\hat{S}^{(1)}_{imi_1i_2i_3}\,v_{m,i_1i_2i_3}+\alpha^2\,\hat{S}^{(2)}_{imi_1i_2i_3i_4}\,v_{m,i_1i_2i_3i_4}+\ldots+\rho F_i=0\,, \tag{7}$$

где определены однородные тензоры - операторы: $\hat{S}^{(-1)}_{imi_1}\equiv 0, \hat{S}^{(0)}_{imi_1i_2}, \hat{S}^{(1)}_{imi_1i_2i_3}, \ldots\ldots$, т.е. операторы, не зависящие от координат ξ,

$$\hat{S}^{(-1)}_{imi_1}=\left(S_{ijmi_1}+\overset{\cup}{S}_{ijkl}N^{(1)}_{kmi_1\|l}\right)_{\|l}=0\quad, \tag{8}$$

$$\hat{S}^{(0)}_{imi_1i_2}=\left(\overset{\cup}{S}_{ijkl}N^{(2)}_{kmi_1i_2\|l}\right)_{\|l}+\left(\overset{\cup}{S}_{ijki_2}N^{(1)}_{kmi_1i_2}\right)_{\|l}+\overset{\cup}{S}_{ii_2kl}N^{(1)}_{kmi_1\|l}+\overset{\cup}{S}_{ii_2mi_1}\,, \tag{9}$$

$$\hat{S}^{(1)}_{imi_1i_2i_3i_4}=\left(\overset{\vee}{S}_{ijkl}N^{(3)}_{kmi_1i_2i_3\|l}\right)_{l}+\left(\overset{\cup}{S}_{ijki_3}N^{(2)}_{kmi_1i_2}\right)_{\|l}+\overset{\cup}{S}_{ii_3kl}N^{(2)}_{kmi_1i_2\|l}+\overset{\cup}{S}_{ii_3ki_2}N^{(1)}_{kmi_1}\,, \tag{10}$$

$$\hat{S}^{(2)}_{imi_1i_2i_3i_4}=\left(\overset{\cup}{S}_{ijkl}N^{(4)}_{kmi_1i_2i_3i_4\|l}\right)_{\|l}+\left(\overset{\cup}{S}_{ijki_4}N^{(3)}_{kmi_1i_2i_3}\right)_{\|l}+\overset{\cup}{S}_{ii_4kl}N^{(3)}_{kmi_1i_2i_3\|l}+\overset{\cup}{S}_{ii_4ki_3}N^{(2)}_{kmi_1i_2}\,. \tag{11}$$

Проводя осреднение в правых частях выражений (8)-(11), т.е. интегрирование по ячейке периодичности, и учитывая, что в силу периодичности структуры осреднение от производной равно нулю [7], получим

$$\hat{S}^{(0)}_{imi_1i_2}=\left\langle\overset{\cup}{S}_{ii_2kl}N^{(1)}_{kmi_1\|l}+S_{ii_2mi_1}\right\rangle, \tag{12}$$

$$\hat{S}^{(1)}_{imi_1i_2i_3}=\left\langle\overset{\cup}{S}_{ii_3kl}N_{kmi_1i_2\|l}+\overset{\cup}{S}_{ii_3ki_2}N^{(1)}_{kmi_1}\right\rangle, \tag{13}$$

$$\hat{S}^{(2)}_{imi_1i_2i_3i_4} = \left\langle \breve{S}_{ii_1kl} N_{kmi_1i_2i_3l} + \ldots \right\rangle \tag{14}$$

и т.д.

Для определения тензоров-операторов $\hat{S}^{(0)}_{ijkl}$, $\hat{S}^{(1)}_{ijklm}$, $\hat{S}^{(2)}_{ijklmn}$ ... необходимо найти локальные операторы $\breve{N}^{(1)}_{ijk}$, $\breve{N}^{(2)}_{ijkl}$, $\breve{N}^{(3)}_{ijklm}$, ..., для чего требуется решить задачи на ячейке периодичности, которая определяет структуру рассматриваемого композита.

Система уравнений для этих задач выписывается из соотношений (8)–(10):

$$\left(\breve{S}_{ijkl} N^{(1)}_{kmi_1 l} \right)_{|j} = -S_{ijmi_1 j} \ , \tag{15}$$

$$\left(\breve{S}_{ijkl} N^{(2)}_{kmi_1i_2|l} \right)_{|j} = -\left(\breve{S}_{ijki_2} N^{(1)}_{kmi_1} \right)_{j} - \breve{S}_{ii_2kl} N^{(1)}_{kmi_1 l} - S_{ii_2mi_1} \ , \tag{16}$$

$$\left(\breve{S}_{ijkl} N_{kmi_1i_2i_3|l} \right)_{|j} = -\left(\breve{S}_{ijki_3} N^{(3)}_{kmi_1i_2} \right)_{|j} - \breve{S}_{ii_3kl} N^{(2)}_{kmi_1i_2l} - \breve{S}_{ii_3ki_2} N^{(1)}_{kmi_2} \ . \tag{17}$$

Итак, зная структуру композита, мы из решения задач (15), (16), (17) определяем локальные ядра релаксации $N^{(1)}_{ijk}(\xi, t)$, $N^{(2)}_{ijkl}(\xi, t)$, $N^{(3)}_{ijklm}(\xi, t)$, ... Операцией осреднения по ячейке периодичности мы по формулам (12)-(14) находим "эффективные" ядра релаксации $S^{(0)}_{ijkl}(t)$, $S^{(1)}_{ijklm}(t)$, $S^{(2)}_{ijklmn}(t)$, ...

Если теперь мы в качестве определяющих соотношений в формулах (1), (3) первого раздела используем соотношения (1) первого раздела с ядрами релаксации $\Gamma_{ijkl}(\mathbf{x}, t)$, которые предполагаются нами также периодическими функциями координат, то, повторяя все выкладки, проведённые в этом разделе, мы найдём эффективные ядра релаксации $\Gamma^{(0)}_{ijkl}(t)$, $\Gamma^{(1)}_{ijklm}(t)$, $\Gamma^{(2)}_{ijklmn}(t)$, ...

Заметим, что определение указанных эффективных ядер связано с решением уравнений равновесия (1).

Чтобы найти эффективные ядра, описывающие определяющие соотношения (5) первого раздела, связывающие тензор повреждаемости χ_{ij} с тензором деформации ε_{ij}, нам, строго говоря, нужно рассмотреть кинетические уравнения для величин χ. Однако мы примем в качестве гипотезы, что процедура осреднения, описанная в данном разделе, применима и для тензора повреждаемости χ. Применяя эту процедуру, мы найдём эффективные ядра $X^{(0)}_{ijkl}(t)$, $X^{(1)}_{ijklm}(t)$, $X^{(2)}_{ijklmn}(t)$, ...

Эффективные ядра $V^{(0)}_{ijkl}(t)$, $V^{(2)}_{ijklmn}(t)$ находятся из операторного соотношения:

$$\breve{V} = (\breve{\rho} - \breve{\Gamma}) \cdot \breve{W}' \ , \ \breve{W}' = \breve{V}^{-1} \ , \tag{18}$$

где $\breve{W}'$ - оператор, обратный к оператору $\breve{V}$, т.е.

$$\int_0^t V^{(0)}_{ijkl}(t-\tau)\,dW'^{(2)}_{klmn}(\tau) = \Delta_{ijmn}, \tag{19}$$

$$\int_0^t V^{(2)}_{ijklmn}(t-\tau)\,dW'^{(2)}_{lmnpqr}(\tau) = \Delta^{(1)}_{ijkpqr}\ , \tag{20}$$

где $\Delta^{(1)}_{ijklmn}$ - единичный тензор шестого ранга:

$$\Delta^{(1)}_{ijklmn} = \frac{1}{2}\left(\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn}\right). \tag{21}$$

К сожалению, найти единичный тензор нечётного ранга не удаётся, и поэтому не удаётся найти эффективные ядра $V^{(1)}_{ijklm}(t)$.

Так что, если мы считаем, что моментные напряжения могут возникать только за счёт неоднородности материала, то в качестве таких моментных напряжений можно выбрать макроскопические напряжения, определяемые операторами $\breve{S}^{(2)}_{ijklmn}$ или $\breve{\Gamma}^{(2)}_{ijklmn}$.

Эффективные ядра ползучести

Примем теперь за основу изотермический вариант определяющих соотношений в форме (11) (первый раздел). При этом будем считать, что тензор повреждаемости $\underline{\chi}$ связан с тензором напряжений соотношением (5) первого раздела. Если композит является регулярной структурой, то ядра ползучести $Q_{ijkl}(\mathbf{x},t)$ и $K_{ijkl}(\mathbf{x},t)$ являются периодическими функциями координат, и мы в праве и тут применить разработанную в [7] технику осреднения.

Будем считать для простоты, что объёмные силы отсутствуют. Тогда уравнения равновесия (1) второго раздела удовлетворяются тождественно, если ввести симметричный тензор функций напряжений φ по правилу

$$\sigma_{ij} = \in_{ikl}\in_{jmn}\varphi_{kn,lm}. \tag{1}$$

Уравнения совместности деформации [3]:

$$\eta_{rs} \equiv \in_{rpu}\in_{stq}\varepsilon_{pq,ut} = 0 \tag{2}$$

после подстановки в них соотношений (11) первого раздела и (1) приобретут вид

$$\in_{rpu}\in_{stq}\in_{ikl}\in_{jmn}\left[\breve{Q}_{pqij}\,\varphi_{kn,lm}\right]_{,ut} = 0. \tag{3}$$

Если бы операторы $\breve{Q}_{pqij}$ не зависели от координат ($\breve{Q}_{pqij} = \hat{Q}_{pqij}$), то уравнения (3) можно было бы записать так:

$$B_{rsknlmut}\,\varphi_{kn,lmut} = 0\ , \tag{4}$$

где

$$B_{rsknlmut} \equiv \in_{rpu} \in_{stg} \in_{ikl} \in_{jmn} \hat{Q}_{pqij} \, . \tag{5}$$

Рассмотрим асимптотическое разложение тензора φ (1) по малому параметру α:

$$\begin{aligned} \varphi_{kn} &= \psi_{kn} + \alpha \breve{M}^{(1)}_{knk_1n_1i_1} \psi_{k_1n_1,i_1} + \alpha^2 \breve{M}^{(2)}_{knk_1n_1i_1i_2} \psi_{k_1n_1,i_1i_2} + \\ &+ \alpha^3 \breve{M}^{(3)}_{knk_1n_1i_1i_2i_3} \psi_{k_1n_1,i_1i_2i_3} + \alpha^4 \breve{M}^{(4)}_{knk_1n_1i_1i_2i_3i_4} \psi_{k_1n_1,i_1i_2i_3i_4} + \ldots\ldots \end{aligned} \tag{6}$$

где $\breve{\mathbf{M}}^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, 3, \ldots..$ - локальные операторы, зависящие от быстрых координат ξ (2) (раздел 2), а ψ_{ij} - гладкая тензор-функция, зависящая от координат $\mathbf{x}$.

Дифференцируя (6) по координатам, имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{kn,l} &= \psi_{kn,l} + \breve{M}^{(1)}_{knk_1n_1i_1\|l} \psi_{k_1n_1,i_1} + \alpha \left(\breve{M}^{(1)}_{knk_1n_1i_1} \psi_{k_1n_1,i_1l} + \breve{M}^{(2)}_{knk_1n_1i_1i_2l} \psi_{k_1n_1,i_1i_2} \right) + \\ &+ \alpha^2 \left(\breve{M}^{(2)}_{knk_1n_1i_1i_2} \psi_{k_1n_1,i_1i_2l} + \breve{M}^{(3)}_{knk_1n_1i_1i_2i_3\|l} \psi_{k_1n_1,i_1i_2i_3} \right) + \alpha^3 \left(\breve{M}^{(3)}_{knk_1n_1i_1i_2i_3} \psi_{k_1n_1,i_1i_2i_3l} + \right. \\ &\left. + \breve{M}^{(4)}_{knk_1n_1i_1i_2i_3i_4\|l} \psi_{k_1n_1,i_1i_2i_3i_4} \right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{kn,lm} &= \psi_{kn,lm} + \frac{1}{\alpha} \breve{M}_{knk_1n_1i_1\,lm} \psi_{k_1n_1,i_1} + \left(\breve{M}^{(1)}_{knk_1n_1i_1\|l} \psi_{k_1n_1,i_1m} + \breve{M}^{(1)}_{knk_1n_1i_1\,m} \psi_{k_1n_1,i_1l} + \right. \\ &\left. + \breve{M}^{(2)}_{knk_1n_1i_1i_2\|lm} \psi_{k_1n_1,i_1i_2} \right) + \alpha \left(\breve{M}^{(1)}_{knk_1n_1i_1} \psi_{k_1n_1,i_1lm} + \breve{M}^{(2)}_{knk_1n_1i_1i_2\|l} \psi_{k_1n_1,i_1i_2m} + \breve{M}^{(2)}_{knk_1n_1i_1i_2\,m} \right. \\ &\psi_{k_1n_1,i_1i_2l} + \breve{M}^{(3)}_{knk_1n_1i_1i_2i_3\|l} \psi_{k_1n_1,i_1i_2i_3m} + \breve{M}^{(3)}_{knk_1n_1i_1i_2i_3\|m} \psi_{k_1n_1,i_1i_2i_3l} + \breve{M}^{(4)}_{knk_1n_1i_1i_2i_3i_4\|lm} \\ &\left. \psi_{k_1n_1,i_1i_2i_3i_4} \right) + \ldots\ldots\ldots\ldots . \end{aligned} \tag{8}$$

Представим теперь тензоры деформаций ε и напряжений σ в виде разложения по малому параметру α:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\alpha} \tau^{(-1)}_{ij} + \tau^{(0)}_{ij} + \alpha \tau^{(1)}_{ij} + \alpha^2 \tau^{(2)}_{ij} + \ldots\ldots . \tag{9}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{\alpha} \gamma^{(-1)}_{ij} + \gamma^{(0)}_{ij} + \alpha \gamma^{(1)}_{ij} + \alpha^2 \gamma^{(2)}_{ij} + \ldots\ldots . \tag{10}$$

Из (1), (8) и (9) следует, что

$$\tau^{(-1)}_{ij} = \in_{ikl} \in_{jmn} \breve{M}^{(1)}_{knk_1n_1i_1\|lm} \psi_{k_1n_1,i_1} . \tag{11}$$

$$\tau^{(0)}_{ij} \equiv \tau_{ij} = \in_{ikl} \in_{jmn} \left(\psi_{kn,lm} + \breve{M}^{(1)}_{knk_1n_1i_1\|l} \psi_{k_1n_1,i_1m} + \breve{M}^{(1)}_{knk_1n_1i_1\|m} \psi_{k_1n_1,i_1l} + \right.$$

$$+ \breve{M}^{(2)}_{knk_1n_1i_1i_2|lm}\,\psi_{k_1n_1,i_1i_2}\Big), \tag{12}$$

$$\tau^{(1)}_{ij} = \in_{ikl}\in_{jmn}\Big(\breve{M}^{(1)}_{knk_1n_1i_1}\,\psi_{k_1n_1,i_1lm} + \breve{M}^{(2)}_{knk_1n_1i_1i_2|l}\,\psi_{k_1n_1,i_1i_2m} +$$
$$+\breve{M}^{(2)}_{knk_1n_1i_1i_2|m}\,\psi_{k_1n_1,i_1i_2l} + \breve{M}^{(3)}_{knk_1n_1i_1i_2i_3|lm}\,\psi_{k_1n_1,i_1i_2i_3}\Big), \tag{13}$$

$$\tau^{(2)}_{ij} = \in_{ikl}\in_{jmn}\Big(\breve{M}^{(2)}_{knk_1n_1i_1i_2}\,\psi_{k_1n_1,i_1i_2lm} + \breve{M}^{(3)}_{knk_1n_1i_1i_2i_3|l}\,\psi_{k_1n_1,i_1i_2i_3m} +$$
$$+\breve{M}^{(3)}_{knk_1n_1i_1i_2i_3|m}\,\psi_{k_1n_1,i_1i_2i_3l} + \breve{M}^{(4)}_{knk_1n_1i_1i_2i_3i_4|lm}\,\psi_{k_1n_1,i_1i_2i_3i_4}\Big). \tag{14}$$

Введём тензоры-операторы $\breve{T}^{(\alpha)}_{ijk_1n_1i_1i_2\ldots i_{\alpha+2}}$ $(\alpha = -1,0,1,2,\ldots\ldots)$ по формулам

$$\breve{T}^{(-1)}_{ijk_1n_1i_1} \equiv \in_{ikl}\in_{jmn}\breve{M}^{(1)}_{knk_1n_1i_1|lm}, \tag{15}$$

$$\breve{T}^{(0)}_{ijk_1n_1i_1i_2} \equiv \in_{ikl}\in_{jmn}\Big(\Delta_{knk_1n_1}\,\Delta_{lmi_1i_2}\Big) = \frac{1}{4}\Big(\in_{ik_1i_1}\in_{ji_2n_1} + \in_{ik_1i_2}\in_{ji_1n_1} + \in_{in_1i_1}\in_{ji_2k_1} +$$
$$+\in_{in_1i_2}\in_{ji_1k_1}\Big), \tag{16}$$

$$\breve{T}^{(1)}_{ijk_1n_1i_1i_2i_3} \equiv \in_{ikl}\in_{jmn}\Big(\breve{M}^{(1)}_{knk_1n_1i_1}\,\Delta_{lmi_2i_3} + \breve{M}^{(2)}_{knk_1n_1i_1i_2|l}\,\delta_{mi_3} + \breve{M}^{(2)}_{knk_1n_1i_1i_2|m}\,\delta_{li_3} +$$
$$+\breve{M}^{(3)}_{knk_1n_1i_1i_2i_3|lm}\Big), \tag{17}$$

$$\breve{T}^{(2)}_{ijk_1n_1i_1i_2i_3i_4} \equiv \in_{ikl}\in_{jmn}\Big(\breve{M}^{(2)}_{knk_1n_1i_1i_2}\,\Delta_{lmi_3i_4} + \breve{M}^{(3)}_{knk_1n_1i_1i_2i_3|l}\,\delta_{mi_4} + \breve{M}^{(3)}_{knk_1n_1i_1i_2i_3|m}\,\delta_{li_4} +$$
$$+\breve{M}^{(4)}_{knk_1n_1i_1i_2i_3i_4|lm}\Big). \tag{18}$$

Используя операторы (15)-(18), соотношения (11)-(14) можно записать в виде

$$\tau^{(-1)}_{ij} = \breve{T}^{(-1)}_{ijk_1n_1i_1}\,\psi_{k_1n_1,i_1}, \tag{19}$$

$$\tau^{(0)}_{ij} \equiv \tau_{ij} = \breve{T}^{(0)}_{ijk_1n_1i_1i_2}\,\psi_{k_1n_1,i_1i_2} \equiv \in_{ikl}\in_{jmn}\cdot\psi_{kn,lm}, \tag{20}$$

$$\tau^{(1)}_{ij} = \breve{T}^{(1)}_{ijk_1n_1i_1i_2i_3}\,\psi_{k_1n_1,i_1i_2i_3}, \tag{21}$$

$$\tau^{(2)}_{ij} = \breve{T}^{(2)}_{ijk_1n_1i_1i_2i_3i_4}\,\psi_{k_1n_1,i_1i_2i_3i_4}. \tag{22}$$

Тогда

$$\gamma_{pq}^{(\wp)} = \breve{Q}_{pqij}\, \tau_{ij}^{(\wp)}\,, \quad \wp = -1, 0, 1, 2, \ldots\ldots . \tag{23}$$

Чтобы найти локальные операторы ползучести $\breve{\underset{\sim}{\mathbf{M}}}^{(1)}$, $\breve{\underset{\sim}{\mathbf{M}}}^{(2)}$, ... нужно воспользоваться уравнением (3) или (1). Имеем из последних:

$$\in_{rpu}\in_{stq}\left(\frac{1}{\alpha}\gamma_{pq}^{(-1)} + \gamma_{pq}^{(0)} + \alpha\gamma_{pq}^{(1)} + \alpha^2\gamma_{pq}^{(2)} + \ldots\ldots\right)_{,ut} = 0\,, \tag{24}$$

или, подставляя в (24) определяющие соотношения (23), получим

$$\in_{rpu}\in_{stq}\sum_{n=-1}^{\infty}\alpha^n\left(\breve{Q}_{pqij}\,\tau_{ij}^{(n)}\right)_{,ut} = 0\,. \tag{25}$$

Принимая во внимание (19)-(22), имеем для (25)

$$\tau_{ij,st}^{(n)} = \frac{1}{\alpha^2}\breve{T}^{(n)}_{ijk_1n_1i_1\ldots i_{n+2}|ut}\,\Psi_{k_1n_1,i_1\ldots i_{n+2}} + \frac{1}{\alpha}\breve{T}^{(n)}_{ijk_1n_1i_1\ldots i_{n+2}|u}\,\Psi_{k_1n_1,i_1\ldots i_{n+2}t} +$$

$$+\frac{1}{\alpha}\breve{T}^{(n)}_{ijk_1n_1i_1\ldots i_{n+2}|t}\,\Psi_{k_1n_1,i_1\ldots i_{n+2}t} + \breve{T}^{(n)}_{ijk_1n_1i_1\ldots i_{n+2}}\,\Psi_{k_1n_1,i_1\ldots i_{n+2}u}\,; \quad \alpha = -1, 0, 1, 2, \ldots . \tag{26}$$

Производные от операторов $\breve{\mathbf{T}}^{(n)}$, входящие в (26) легко определяются из выражений (15)–(18), которые можно записать сокращённо в виде

$$\breve{T}^{(n)}_{ijk_1n_1i_1\ldots i_{n+2}} = \in_{ikl}\in_{jmp}\left(\breve{M}^{(n)}_{kpk_1n_1i_1\ldots i_n}\,\Delta_{lmi_{n+1}i_{n+2}} + \breve{M}^{(n+1)}_{kpk_1n_1i_1\ldots i_{n+1}|l}\,\delta_{mi_{n+2}} +\right.$$

$$\left. + \breve{M}^{(n-1)}_{kpk_1n_1i_1\ldots i_{n+1}|m}\,\delta_{li_{n+2}} + \breve{M}^{(n+2)}_{kpk_1n_1i_1\ldots i_{n+2}|lm}\right), \tag{27}$$

где $\alpha = -1, 0, 1, 2, \ldots$, при этом

$$\breve{\underset{\sim}{\mathbf{M}}}^{(-1)} \equiv 0\;;\; \breve{\underset{\sim}{\mathbf{M}}}^{(0)} \equiv \underset{\sim}{\Delta} \quad \left(\breve{M}^{(0)}_{knk_1n_1} = \Delta_{knk_1n_1}\right). \tag{28}$$

Итак, процедура осреднения позволила полностью описать алгоритм решения квазистатических задач механики композитов, определяющие соотношения компонентов которых подчиняются законам линейной теории вязкоупругости с учётом эволюционной деструкции.

На основе этого алгоритма можно рассматривать конкретные композиционные структуры: слоистые, волокнистые, слоисто-волокнистые и т. п. [7].

Библиографический список

1. Победря Б.Е. О моделях повреждаемости реономных сред // МТТ. 1998.№4. - С.128-148.
2. Pobedria B.E., Rodriguez A. Compound loading of space and aircraft // Proceedings. First International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace. Daytona Beach, Florida, U.S.A., 1996. - P. 565-573.

3. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1995. - 365 с.
4. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. - 280 с.
5. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. - М.: Наука, 1974. - 3312 с.
6. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. - М.: Изд-во Моск,ун-та, 1986. - 264с.
7. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: Изд-во Моск, ун-та, 1984. - 36 с.
8. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. - М.: Наука, 1984. - 228 с.

Получено 23.02.2001