УДК 539.3

Ю.В. Соколкин, Е.Ю. Макарова

Пермский государственный технический университет

О ПОСТРОЕНИИ И ВЫЧИСЛЕНИИ ФУНКЦИОНАЛОВ В СТАТИСТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ КОМПОЗИТОВ

Abstract

In the given work the way of construction of functionals for microheterogeneous solids which takes into consideration accumulation of structural damages is considered.

В работе [1] устанавливается важное свойство микронеоднородных квазиизотропных тел, когда моделью сравнения является однородная сплошная среда с осредненными свойствами:

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \Phi_{ij\alpha\beta}(\theta) e_{\alpha\beta}, \qquad (1)$$

где $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$ - структурные деформации микронеоднородной среды, $e_{ij}(\mathbf{r}) = \langle \varepsilon_{ij} \rangle$ - макроскопические деформации микронеоднородной среды, $\theta_{ijmn}(\mathbf{r})$ - случайные модули упругости микронеоднородной среды, $\Phi_{ij\alpha\beta}(\theta)$ - случайный функционал, зависящий от упругих свойств микронеоднородной среды.

В работе [2] указан метод вычисления моментов различных порядков функционала $\Phi_{ij\alpha\beta}(\theta)$, позволяющий вычислять как эффективные свойства микронеоднородной среды, так и структурные поля деформирования. На основе полученного решения устанавливается важное свойство микронеоднородной среды: если упругие свойства микронеоднородной среды являются локально-эргодическими, то и поля деформирования микронеоднородной среды также являются локально-эргодическими.

В работе [3] дается обобщение соотношения (1) на микронеоднородные тела, когда моделью сравнения является микронеоднородная среда с регулярной структурой. Если микронеоднородная среда макроскопически однородна и макроанизотропна, перемещения границы тела, имеющего конечные размеры, детерминированы, дисперсии физических свойств среды конечны, микродеформации регулярной среды в пределах структурного элемента - гладкие функции координат, то существует случайный функционал $\Phi^{(p)}(\theta)$, не зависящий от граничных условий, такой, что пульсации структурных деформаций $\overset{\circ}{\varepsilon}(\mathbf{r})$ связаны со структурными деформациями в регулярной среде $\varepsilon^{(p)}(\mathbf{r})$ соотношением

$$\overset{\circ}{\varepsilon}(\mathbf{r}) = \Phi^{(p)}(\theta) \cdot \varepsilon^{(p)}(\mathbf{r}). \qquad (2)$$

В этой же работе приводится общий метод вычисления функционала $\Phi^{(p)}(\theta)$ для микронеоднородных сред. Соотношение (2) позволяет получить более точные формулы для расчета эффективных свойств композитов. Для макроскопически однородной квазиизотропной среды в корреляционном приближении получаем следующие зависимости:

$$C^*_{ijmn} = C^{(p)*}_{ijmn} + \left\langle \mathring{\theta}_{ij\gamma\delta}\, \mathring{\theta}_{\alpha\beta mn} \right\rangle J^*_{\gamma\alpha\delta\beta}, \tag{3}$$

где C^*_{ijmn} - эффективные модули упругости композита, $C^{(p)*}_{ijmn}$ - макроскопические модули упругости регулярной среды сравнения, $J^*_{\gamma\alpha\delta\beta}$ - изотропный тензор четвертого ранга, зависящий от макроскопических модулей неоднородной среды сравнения с периодической структурой.

Аналогичные зависимости получаем для эффективных модулей упругости квазиизотропных композитов с учетом конечных дисперсий физических свойств среды:

$$C^*_{ijmn} = C^{*(p)}_{ijmn} + \left\langle \mathring{\theta}_{ij\gamma\delta}\, \mathring{\theta}_{\alpha_1\beta_1 mn} \right\rangle J^*_{\gamma\alpha_1\delta\beta_1} + \ldots +,$$

$$+\left\langle \mathring{\theta}_{ij\gamma\delta}\, \mathring{\theta}_{\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1}\, \mathring{\theta}_{\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2} \ldots \mathring{\theta}_{\alpha_k\beta_k mn} \right\rangle J^*_{\gamma\alpha_1\delta\beta_1} J^*_{\gamma_1\alpha_2\delta_1\beta_2} \ldots J^*_{\gamma_{k-1}\alpha_k\delta_{k-1}\beta_k} + \ldots . \tag{4}$$

Соотношение (4) представляет собой решение задачи, если соответствующие ряды сходятся. Сходимость рядов в каждом конкретном случае устанавливается непосредственной проверкой при заданных свойствах структурных компонентов [1].

Перейдем теперь к вычислению моментных функций второго порядка структурных деформаций. Перемножив уравнение (2), взятое относительно двух произвольно выбранных точек трехмерного пространства, и применив оператор математического ожидания, находим моментную функцию второго порядка структурных деформаций

$$L_{ijmn}(r_1, r_2) = F^{ij\alpha\beta}_{mn\gamma\delta}\, \varepsilon^{(p)}_{\alpha\beta}(r_1)\, \varepsilon^{(p)}_{\gamma\delta}(r_2), \tag{5}$$

где через $L_{ijmn}(r_1, r_2) = \left\langle \mathring{\varepsilon}_{ij}(r_1)\, \mathring{\varepsilon}_{mn}(r_2) \right\rangle$ обозначена моментная функция второго порядка структурных деформаций, $F^{ijpq}_{mnrs} = \left\langle \Phi^{(p)}_{ijpq} \Phi^{(p)}_{mnrs} \right\rangle$ - коэффициенты, зависящие только от физических свойств элементов структуры.

Для квазиизотропной среды эти коэффициенты вычисляются в явном виде. Тогда из уравнения (5) получаем явные аналитические зависимости для моментных функций второго порядка структурных деформаций

$$L_{ijmn}(r', r'') = J^*_{i\gamma j\delta} J^*_{m\varphi n\psi} \mathrm{K}^{\varphi\psi\rho\omega}_{\gamma\delta\alpha\beta}(r', r'')\, \varepsilon^{(p)}_{\alpha\beta}(r')\, \varepsilon^{(p)}_{\rho\omega}(r''), \tag{6}$$

где $\mathrm{K}^{\varphi\psi\rho\omega}_{\gamma\delta\alpha\beta}(r', r'')$ - моментная функция второго порядка структурных модулей упругости:

$$\mathrm{K}^{\varphi\psi\rho\omega}_{\gamma\delta\alpha\beta}(r', r'') = \left\langle \mathring{\theta}_{\varphi\psi\rho\omega}(r', r'')\, \mathring{\theta}_{\gamma\delta\alpha\beta}(r', r'') \right\rangle. \tag{7}$$

Если поля упругих свойств микронеоднородной среды (7) являются локально-эргодическими, то и поля структурных деформаций, как следует из формулы (6), также являются локально-эргодическими.

Для описания структурного разрушения и прогнозирования прочностных свойств композитов в определяющие соотношения вводится новый материальный носитель $\omega_{ijmn}(\varepsilon_h)$, зависящий от условий нагружения [4]. Таким образом, в качестве математической модели процесса квазистатического деформирования и разрушения в рамках такого подхода может быть поставлена стохастическая краевая задача механики композитов [4]:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r})=0,\quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r})=\operatorname{def}\,\mathbf{u}(\mathbf{r}),\quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r})=\mathbf{C}\cdot\cdot\left(\mathbf{I}-\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\varepsilon})\right)\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon},\quad \mathbf{u}(\mathbf{r})|_S=\boldsymbol{\varepsilon}^*\cdot\mathbf{r}, \tag{8}$$

где $\mathbf{C}$ - тензор модулей упругости однородной изотропной сплошной среды, $\mathbf{I}$ - единичный тензор четвертого ранга, $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ — заданный тензор макродеформаций, $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ - тензор структурных перемещений.

Для замыкания системы уравнений (8) необходимо дополнить ее уравнениями для определения $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$. Будем предполагать, что заданы явные зависимости

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})=\boldsymbol{\omega}(\varepsilon_h), \tag{9}$$

где $\varepsilon_h(\mathbf{r})$ - инварианты тензора структурных деформаций.

Наложим на случайное поле $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ математические ограничения общего характера в виде локально-статистической однородности и локальной эргодичности. Случайное поле $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ есть локально-статистически однородное поле, если многоточечный закон совместного распределения $f_{\omega}^{(n)}(r_1,r_2,\ldots,r_n)$, n=1,2,3,... не изменяется после параллельного переноса точек $M_1(\mathbf{r}_1)$, $M_2(\mathbf{r}_2)$, $M_3(\mathbf{r}_3)$,..., $M_n(\mathbf{r}_n)$ на равные расстояния, не превышающие характерного размера некоторой области статистической зависимости $V^*\subset V$. Под областью V^* понимается шар, радиус которого равен $\varepsilon^2\ell$, $0<\varepsilon<<1$, ℓ - характерный размер конструкции.

Случайное поле $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ есть локально-эргодическое поле, если $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ локально-статистически однородно и моментные функции произвольного порядка k финитны в области $V^*\subset V$, то есть

$$K_{\omega}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_k)\equiv\langle\overset{\circ}{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{r}_1)\overset{\circ}{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{r}_2)\ldots\overset{\circ}{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{r}_k)\rangle=\begin{cases}\neq 0, & r_m<D\\ \equiv 0, & r_m\geq D,\quad k=2,3,\ldots\end{cases}$$

$r_m=\max\limits_{i,j}\left|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j\right|$, $\mathrm{i,j}=\overline{1,\mathrm{k}}$, D-характерный размер области V^*.

Сформулируем свойство микронеоднородных сред, аналогичное свойству (1). Если микронеоднородная среда с однородными упругими и неоднородными прочностными свойствами макроскопически однородна и квазиизотропна, поля структурных повреждений при деформировании - локально-эргодические, средние деформации - макроскопически гладкие функции координат, граничные условия детерминированы, то существует случайный функционал $\boldsymbol{\Phi}(\omega)$, зависящий только от поля структурных повреждений, такой, что пульсации структурных деформаций $\overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ связаны со средними деформациями $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ соотношениями

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\Phi}(\omega) \cdot\cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}). \tag{10}$$

Доказательство соотношения (10) аналогично доказательству соотношения (1).

Из соотношения (10) вытекает, что если поля структурных повреждений локально-эргодические, то и поля деформирования тоже являются локально-эргодическими. Как показывают прямые численные эксперименты [5, 6], локальность полей структурных повреждений имеет место на стадии дисперсного накопления повреждений, что является признаком ближнего порядка во взаимодействии полей микродеформаций и структурных повреждений на начальном этапе структурного разрушения. Дальнейшее увеличение нагрузки приводит к укрупнению дефектов и местной локализации повреждений.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда поля упругих свойств $\theta(\mathbf{r})$ и структурных повреждений $\omega(\mathbf{r})$ являются локально-эргодическими. Будем также предполагать, что эти поля являются собственными, то есть отсутствует взаимная корреляция между полями:

$$\langle \theta(\mathbf{r})\omega(\mathbf{r}) \rangle = 0.$$

Сформулируем свойство микронеоднородных сред, аналогичное свойству (2). Если микронеоднородная среда с неоднородными упругими и неоднородными прочностными свойствами макроскопически однородна и квазиизотропна, поля структурных повреждений при деформировании - локально-эргодические, структурные деформации в периодической среде сравнения в пределах структурного элемента - гладкие функции координат, граничные условия детерминированы, то существует случайный функционал $\boldsymbol{\Phi}^p(\theta,\omega)$, зависящий от полей упругих свойств и структурных повреждений, такой, что пульсации структурных деформаций $\overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ связаны со структурными деформациями $\boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{r})$ в регулярной среде сравнения соотношениями

$$\overset{\circ}{\varepsilon}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\Phi}^{(p)}(\theta,\omega) \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}(\mathbf{r}). \tag{11}$$

Для доказательства формулы (11) рассмотрим стохастическую краевую задачу механики микронеоднородных сред в отсутствии объемных сил:

$$\nabla \cdot \sigma(\mathbf{r}) = 0,\ \varepsilon(\mathbf{r}) = \mathrm{def}\ \mathbf{u}(\mathbf{r}),\ \sigma(\mathbf{r}) = \theta(\mathbf{r}) \cdot\cdot \left(\mathbf{I} - \omega(\varepsilon)\right) \cdot\cdot \varepsilon(\mathbf{r}),\ \omega(\mathbf{r}) = \omega(\varepsilon) \tag{12}$$

с условиями специального вида

$$\frac{1}{d^l V} \int\limits_{d^l V} \varepsilon(\mathbf{r})\, d^l V = \boldsymbol{\varepsilon}^*, \tag{13}$$

которые, как известно [4], эквивалентны условиям на поверхности S тела V:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r})|_S = \boldsymbol{\varepsilon}^* \cdot \mathbf{u} \tag{14}$$

при макроскопически однородном деформированном состоянии.

Идея излагаемого ниже метода заключается в использовании в качестве основы решения аналогичной краевой задачи для среды с регулярной микроструктурой:

$$\begin{gathered} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(p)}(\mathbf{r}) = 0,\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}(\mathbf{r}) = \mathrm{def}\ \mathbf{u}^{(p)}(\mathbf{r}), \\ \boldsymbol{\sigma}^{(p)}(\mathbf{r}) = \mathbf{C}^{(p)}(\mathbf{r}) \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}(\mathbf{r}), \\ \frac{1}{d^l v} \int\limits_{d^l v} \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}(\mathbf{r})\, dv = \boldsymbol{\varepsilon}^*, \end{gathered} \tag{15}$$

где $\mathbf{u}^{(p)}(\mathbf{r})$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}(\mathbf{r})$, $\boldsymbol{\sigma}^{(p)}(\mathbf{r})$ - детерминированные периодические функции структурных перемещений, деформаций и напряжений, $\mathbf{C}^{(p)}(\mathbf{r})$ - тензор структурных модулей упругости среды с регулярной структурой. Предположим, что решение краевой задачи (5) нам известно [7]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)\prime}(\overline{\mathbf{r}}) = N^{(p)}(\overline{\mathbf{r}}) \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{*},\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}(\overline{\mathbf{r}}) = \boldsymbol{\varepsilon}^{*} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)\prime}(\overline{\mathbf{r}}),$$

$$\mathbf{C}^{*(p)} = \left[\mathbf{C}^{(p)}(\overline{\mathbf{r}})\right] + \left[\mathbf{C}^{(p)}(\overline{\mathbf{r}}) \cdot \cdot \mathbf{N}^{(p)}(\overline{\mathbf{r}})\right],\ \boldsymbol{\sigma}^{*(p)} = \mathbf{C}^{*(p)} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{*},$$

где $\mathbf{C}^{*(p)}$ - эффективные модули упругости среды с регулярной структурой, $\mathbf{N}^{(p)}(r)$ - структурные функции [7], $[\cdots]$ - оператор осреднения по представительному объему.

С целью доказательства соотношения (11) исследуем решение краевой задачи (12) с граничными условиями (14), которая приводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений при нулевых граничных условиях:

$$\nabla \cdot (\mathbf{C}^{(p)} \cdot \cdot \operatorname{def} \overset{\circ}{\mathbf{u}}) = -\nabla \cdot \boldsymbol{\Pi},\ \overset{\circ}{\mathbf{u}}|_{s} = 0, \tag{16}$$

где

$$\boldsymbol{\Pi} = \overset{\circ}{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} \cdot \cdot \operatorname{def} \mathbf{u}^{(p)} + \overset{\circ}{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} \cdot \cdot \operatorname{def} \overset{\circ}{\mathbf{u}} - \left\langle \overset{\circ}{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} \cdot \cdot \operatorname{def} \overset{\circ}{\mathbf{u}} \right\rangle,\ \overset{\circ}{\tilde{\theta}}_{ijmn} = \overset{\circ}{\theta}_{ijmn} - \overset{\circ}{\theta}_{ij\gamma\delta} \left\langle \omega_{\gamma\delta mn} \right\rangle - \theta_{ij\gamma\delta}\, \overset{\circ}{\omega}_{\gamma\delta mn},$$

$$\tilde{\theta}_{ijmn} = \theta_{ij\gamma\delta} \left[I_{\gamma\delta mn} - \omega_{\gamma\delta mn} \right].$$

Уравнения (16) можно рассматривать как уравнения краевой задачи теории упругости микронеоднородных сред с регулярной структурой $\mathbf{C}^{(p)}(\mathbf{r})$ и перемещениями $\overset{\circ}{\mathbf{u}}(\mathbf{r})$, обусловленными действием фиктивных случайных объемных сил $\nabla \cdot \boldsymbol{\Pi}$.

При введении функции Грина среды с регулярной структурой $\mathbf{G}^{(p)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ система уравнений (16) преобразуется в систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\overset{\circ}{\mathbf{u}}(\mathbf{r}) = \int_{v} \mathbf{G}^{(p)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot (\nabla' \cdot \boldsymbol{\Pi}'(\mathbf{r}'))dv'. \tag{17}$$

Для определения полей структурных деформаций необходимо знать градиент пульсаций структурных перемещений, поэтому дифференцируем (7):

$$\nabla \overset{\circ}{\mathbf{u}}(\mathbf{r}) = \int_{v} \nabla \mathbf{G}^{(p)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot (\nabla' \cdot \boldsymbol{\Pi}'(\mathbf{r}'))dv'. \tag{18}$$

Уравнение (17) решаем методом последовательных приближений при ограничениях, сформулированных в виде макроскопической однородности и квазиизотропности микронеоднородной среды.

В первом приближении полагаем

$$\nabla \overset{\circ}{\mathbf{u}}^{(1)}(\mathbf{r}) = \int_{v} \nabla \mathbf{G}^{(p)} \cdot \nabla' \cdot (\overset{\circ}{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}\,' \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)\prime})dv. \tag{19}$$

Для макроскопически однородной среды интегралы в (19) фактически распространяются на $\varepsilon^{2}\ell$ - окрестность микронеоднородной среды, где $\varepsilon^{(p)}$ - постоянны, поэтому соотношения (19) принимают вид

$$\nabla \overset{\circ}{\mathbf{u}}^{(1)}(\mathbf{r}) = \nabla \rho^{(p)(1)} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}, \qquad (20)$$

где $\nabla\rho^{(p)(1)} = \int\limits_V \nabla\mathbf{G}^{(p)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot(\nabla'\cdot\overset{\circ}{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}')dv$, а $\rho^{(p)(1)}(\overset{\circ}{\tilde{\boldsymbol{\theta}}},\mathbf{r})$ - тензор-функционал третьего ранга относительно физических свойств среды.

Подставляя (19) в (18), с учетом (20) получаем второе приближение

$$\nabla \overset{\circ}{\mathbf{u}}^{(2)} = (\nabla\rho^{(p)(1)} + \nabla\rho^{(p)(2)})\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)},$$

$$\nabla\rho^{(p)(2)} = \int\limits_V \nabla\mathbf{G}^{(p)}\cdot(\nabla'\cdot(\overset{\circ}{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}'\cdot\cdot\nabla'\rho^{(p)(k-1)})dv'.$$

Окончательно запишем

$$\nabla\overset{\circ}{\mathbf{u}}(\mathbf{r}) = \nabla\rho^{(p)}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)},$$

где

$$\nabla\rho^{(p)} = \sum_{k=1}^{\infty}\nabla\rho^{(p)(k)}. \qquad (21)$$

Поскольку пульсации структурных деформаций определяются выражением

$$\overset{\circ}{\varepsilon}(\mathbf{r}) = \operatorname{def}\,\overset{\circ}{\mathbf{u}}(\mathbf{r}),$$

то в силу (21) приходим к соотношению (11)

$$\overset{\circ}{\varepsilon}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\Phi}^{(p)}(\theta,\omega)\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}(\mathbf{r}). \qquad (22)$$

где функционал $\boldsymbol{\Phi}^{(p)}(\theta,\omega)$ определяется уравнением

$$\boldsymbol{\Phi}^{(p)}(\theta,\omega) = \operatorname{def}\,\rho^{(p)}(\theta,\omega). \qquad (23)$$

В первом (корреляционном) приближении эти функционалы определяются следующими соотношениями:

$$\Phi^{(p)}_{ijmn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\rho^{(p)}_{imn}}{\partial x_j} + \frac{\partial\rho^{(p)}_{jmn}}{\partial x_i}\right),$$

$$\frac{\partial\rho^{(p)}_{imn}}{\partial x_j} = \int\limits_V \frac{\partial G^{(p)}_{i\alpha}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x'_{\beta}}\overset{\circ}{\tilde{\theta}}_{\alpha\beta mn}(\mathbf{r}')dv'. \qquad (24)$$

Здесь $G^{(p)}_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ - тензорная функция Грина для периодической среды сравнения с неоднородными свойствами.

Из соотношения (24) следует, что указанные выше функционалы являются функционалами относительно свойств микронеоднородной среды $\theta_{ijmn}(\mathbf{r})$ и тензора микроповрежденности ω_{ijmn}, а также функциями относительно текущей координаты $\mathbf{r}$. Из уравнения (12) следует, что моментная функция второго порядка функционала $\Phi^{(p)}_{ijmn}$ однозначно определяется через моментную функцию второго порядка функционала $\rho^{(p)}_{imn,j}$, где через запятую обозначается дифференцирование по координате x_j. Следовательно, для вычисления моментной функции второго порядка необходимо вычислить двойной интеграл

$$F^{ijmn}_{pqrs}(\mathbf{r},\mathbf{r}^*) = \left[\frac{\partial \rho^{(p)}_{imn}(\mathbf{r})}{\partial x_j}\frac{\partial \rho^{(p)}_{prs}(\mathbf{r}^*)}{\partial x_q}\right] =$$
$$= \iint\limits_{V} \frac{\partial G^{(p)}_{i\alpha}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial x_j}\frac{\partial G^{(p)}_{p\gamma}(\mathbf{r}^*,\mathbf{r}'')}{\partial x_q}\frac{\partial^2 K^{\alpha\beta mn}_{\gamma\delta rs}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')}{\partial x'_\beta \partial x''_\delta}dv'dv'', \tag{25}$$

где через $K^{ijmn}_{pqrs}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'') = \left\langle \mathring{\tilde{\theta}}_{ijmn}(\mathbf{r}')\mathring{\tilde{\theta}}_{pqrs}(\mathbf{r}'')\right\rangle$ обозначена структурная моментная функция второго порядка свойств микронеоднородной среды. Как показывают многочисленные теоретические и экспериментальные исследования эта функция локальна (затухает на расстояниях, намного меньших линейного размера элемента) и имеет область отрицательных значений [1,4]. При этом на основании сказанного для корреляционной функции, входящей в соотношение (25), используются аппроксимирующие зависимости через единичные функции, предложенные в [1]. Тогда для описания функции $F^{ijmn}_{pqrs}(\mathbf{r},\mathbf{r}^*)$ достаточно вычислить некоторые значения этой функции, получаемые при $\mathbf{r}=\mathbf{r}^*=0$ в уравнении (25). Для вычисления интеграла (25) необходимо знать функцию Грина $G^{(p)}_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ для неоднородной среды сравнения с периодической структурой. Используя технику осреднения, предложенную в работе [3], представим функцию Грина $G^{(p)}_{ij}(0,\xi;0,\mathbf{r})$ в виде асимптотического ряда разложения по малому параметру α:

$$G^{(p)}_{ij}(0,\xi;0,\mathbf{r}) = G^*_{ij}(\mathbf{r}) + \alpha N^{(1)}_{ij\alpha\beta\gamma_1}(\xi)\frac{\partial G^*_{\alpha\beta}(\mathbf{r})}{\partial x_{\gamma_1}} +$$
$$+\alpha^2 N^{(2)}_{ij\alpha\beta\gamma_1\gamma_2}(\xi)\frac{\partial^2 G^*_{\alpha\beta}(\mathbf{r})}{\partial x_{\gamma_1}\partial x_{\gamma_2}} + \cdots + \tag{26}$$
$$+\alpha^n N^{(n)}_{ij\alpha\beta\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n}(\xi)\frac{\partial^n G^*_{\alpha\beta}(\mathbf{r})}{\partial x_{\gamma_1}\partial x_{\gamma_2}\cdots\partial x_{\gamma_n}} + \cdots,$$

где $G^*_{ij}(\mathbf{r})$ - функция Грина для эквивалентной однородной изотропной среды сравнения с модулями упругости $C^{(p)^*}_{ijmn}$, $C^{(p)^*}_{ijmn}$ - эффективные модули упругости неоднородной среды сравнения с периодической структурой, $N^{(n)}_{ij\alpha\beta\gamma_1\cdots\gamma_n}(\xi)$ - локальные функции быстрых координат ξ n-го уровня, α - малый параметр $(0<\alpha=\frac{\ell}{L}<<l)$, ℓ - характерный линейный размер неоднородности, L - характерный линейный размер конструкции.

Рассмотрим случай, когда микронеоднородная среда макроскопически однородна и квазиизотропна. В этом случае первое слагаемое в выражении (26) есть тензор Кельвина - Сомильяны для однородной изотропной среды сравнения с эффективными свойствами $C^{(p)^*}_{ijmn}$. Подставляя формулу (26) в соотношение (25) и используя метод, предложенный в работе [2], получаем

$$F^{ijmn}_{pqrs}(0,0) = \mathrm{I}^*_{i\alpha j\beta}\mathrm{I}^*_{r\gamma s\delta}\left\langle \overset{\circ}{\tilde{\theta}}_{\alpha\beta mn}\,\overset{\circ}{\tilde{\theta}}_{\gamma\delta rs}\right\rangle, \tag{27}$$

где через I^*_{ipjq} обозначен изотропный тензор четвертого ранга, зависящий от макроскопических модулей неоднородной среды сравнения с периодической структурой.

В силу свойства предельной локальности функционала $\rho^{(p)}_{imn,j}$ и вычисленного главного значения (27) следует, что функционал $\rho^{(p)}_{imn,j}$ аппроксимируется координатной зависимостью

$$\frac{\partial\rho^{(p)}_{imn}}{\partial x_j} = I^*_{i\alpha j\beta}\,\overset{\circ}{\tilde{\theta}}_{\alpha\beta mn}(\mathbf{r}). \tag{28}$$

В этом случае поправка, как это следует из (28), вычисляется в явном виде:

$$C^*_{ijmn} = C^{(p)*}_{ijmn} + \left\langle \overset{\circ}{\tilde{\theta}}_{ij\gamma\delta}\,\overset{\circ}{\tilde{\theta}}_{\alpha\beta mn}\right\rangle I^*_{\gamma\alpha\delta\beta}. \tag{29}$$

Рассмотрим одномерный случай накопления структурных напряжений

$$\sigma(r) = E(r)\left[1-\omega(\varepsilon)\right]\varepsilon(r). \tag{30}$$

Пусть элементарный микрообъем первого порядка малости (с характерным линейным размером $\varepsilon\ell$) представляет собой совокупность микрообъемов второго порядка малости (с характерным линейным размером $\varepsilon^2\ell$). Будем предполагать, что для каждого элементарного объема второго порядка малости возможно лишь два состояния: либо элементарный объем разрушен, либо - нет. Введем скалярную функцию ω, равную единице в неразрушенных микрообъемах и нулю в разрушенных. Тогда имеем

$$\omega = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p, \\ 0 & \text{с вероятностью } 1\text{-}p. \end{cases} \tag{31}$$

Из соотношения (31) находим

$$\langle\omega\rangle = p, \tag{32}$$

то есть математическое ожидание функции микроповрежденности, введенное с помощью функции (31), совпадает с вероятностью разрушения микрообъемов второго порядка малости.

Запишем теперь закон Гука для элементарных объемов первого порядка малости

$$\sigma^* = E\left[1-\omega^*(\varepsilon)\right]\varepsilon^*, \tag{33}$$

где величины со звездочками относятся к элементарному объему первого порядка малости. Величина ω^* имеет смысл вероятности разрушения p^* элементарного объема первого порядка малости. Из соотношения (33) для момента разрушения величина макронапряжений равна пределу прочности $\sigma^* = \sigma^*_{\text{в}}$, а макродеформация равна предельной деформации $\varepsilon^* = \varepsilon^*_{\text{в}}$. Откуда находим формулу для оценки критического значения макроповрежденности

$$\omega^*_{kp} = 1 - \frac{\sigma^*_{\text{в}}}{E\varepsilon^*_{\text{в}}}. \tag{35}$$

Установим теперь связь между вероятностями макроскопического разрушения p^* и структурного разрушения p. Принимая степенной закон распределения микроповреждений

$$F(\omega) = (\omega)^{\alpha}, \quad 0 \le \omega < 1, \quad \alpha > 0. \tag{36}$$

неизвестные постоянные α определим по формуле

$$\langle \omega \rangle = \int_0^1 \omega F'(\omega) d\omega = p. \tag{37}$$

Из (37) находим

$$\alpha = \frac{p}{1-p}. \tag{40}$$

Из формулы (36) получаем зависимость вероятности макроразрушения от вероятности микроразрушения

$$p^* = 1 - (\omega^*_{\text{кр}})^{p/(1-p)}. \tag{41}$$

Как видно из формулы (35), $\omega^*_{\text{кр}}$ не является новой константой материала, а выражается через известные предельные макроскопические характеристики материала.

Если записать обобщенный закон Гука через связи первых и вторых инвариантов, то для изотропных материалов получим два независимых критерия разрушения аналогично тому, как это сделано выше для одномерного случая.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 99-01-00910.

Библиографический список

1. Волков С.Д., Ставров В.П. Статистическая механика композитных материалов. – Минск: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1978. – 208 с.
2. Соколкин Ю.В. О методе вычисления многоточечных моментных функций полей деформирования и напряжений в микронеоднородных средах // Структурно-механическое исследование композиционных материалов и конструкций. – Свердловск, 1984. – С. 12–14.
3. Макарова Е.Ю. Синтез современных методов усреднения при решении стохастических краевых задач механики микронеоднородных сред // Механика композитных материалов, 1999. – Т.35, № 1. – С. 3–12.
4. Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика деформирования и разрушения структурно неоднородных тел. – М.: Наука, 1984. – 116 с.
5. Соколкин Ю.В., Вильдеман В.Э., Зайцев А.В., Рочев И.Н. Накопление структурных повреждений и устойчивое закритическое деформирование композитных материалов // Механика композитных материалов. – 1998. – Т.34, № 2. – С. 234–250.
6. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Зайцев А.В. Эволюция структурных повреждений и макроразрушение неоднородной среды на закритической стадии деформирования // Механика композитных материалов. – 1997. – Т.33, № 3. – С. 329–339.
7. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: МГУ, 1984.–336 с.

Получено 20.03.2001