УДК 539.3

К.Ф. Черных

Санкт-Петербургский государственный университет

НЕЛИНЕЙНАЯ УПРУГОСТЬ (ШКОЛА НОВОЖИЛОВА)

Abstract

In Novozhilov's works the large place was occupied with the non-linear theory of elasticity. The results, obtained by him there, in many respects defined development of this partition of the mechanics. The work made by author is presented in this article. It is a question of the simplest version of the theory of elasticity. The complex approach, in particular, alternative to an employment of integrals Cauchy, method of a division of boundary conditions is advanced in this paper. The new types of boundary conditions and laws of elasticity, the complex method of invariant integrals (J-integrals) were introduced; the simplest versions of two-dimensional problems (plain and anti-plain strain, axisimmetric strain of revolutions bodies) were obtained. The questions of non-linear anisotropy in a new fashion were considered. All of these enable to obtain the exact solutions of two-dimensional boundary problems. The main attention was given to consideration of actual singular problems (brittle fracture, defects in crystals and concentrated forces - moments).

Академик Валентин Валентинович Новожилов был разносторонним ученым, получившим основополагающие результаты во многих актуальных разделах механики сплошных сред. Наиболее любимыми среди них были полученные в теории оболочек и нелинейной теории упругости. В статье будет сказано о том, что сделано автором статьи в нелинейной упругости. К нелинейной теории упругости Новожилова привело желание глубже разобраться в проблеме устойчивости упругих тел, а также выявить ее связь с деформационной теорией пластичности. Так, в статье [1] он получил из соотношений нелинейной теории упругости общую теорию устойчивости тонких оболочек, непревзойденную до сих пор как по общности подхода, так и по точности полученных зависимостей. Используя прямоугольную декартову систему координат в качестве отсчетной материальной (недеформированной, либо деформированной), Валентин Валентинович, в присущей ему оригинальной наглядной геометрической манере изложил в монографии [2] общую нелинейную теорию упругости. При этом был получен ряд новых результатов. Прежде всего, это был отказ от квадратичной теории упругости и введение классификации нелинейных теорий упругости:

- линейные геометрически и физически,
- линейные геометрически и нелинейные физически,
- нелинейные геометрически и линейные физически,
- нелинейные геометрически и физически.

При этом Валентин Валентинович неоднократно подчеркивал актуальность, но и сложность задач последней группы. Без преувеличения можно сказать, что монография послужила фундаментом для ряда исследований отечественных и зарубежных ученых. Многие положения этой книги в настоящее время являются общепризнанными и вошли в учебную литературу.

Следующим крупным результатом явилась полученная в [3,4] связь между девиаторами двух соосных симметричных тензоров второго ранга. Широко использованные Новожиловым тригонометрические представления главных значений тензоров привели к значительно более простым (чем содержащие полиномиальные инварианты) зависимостям. Они легко обратимы и носят структурный (допускающий наглядную геометрическую и механическую интерпретации) вид. Выяснив чисто геометрический характер полученной связи, Новожилов неоднократно обращал внимание на то, что при установлении функциональной связи между тензорами основная трудность заключается в установлении связи между удачно выбранными инвариантами тензоров.

Высокий научный авторитет и щепетильная объективность при рассмотрении чужих работ давали Валентину Валентиновичу моральное право завершать ряд затянувшихся дискуссий по спорным узловым вопросам механики твердого деформируемого тела. При этом он обычно высказывал свое оригинальное мнение о предмете спора. Так, результатом обсуждения вопроса о пятимерно-векторном пространстве явилось появление статьи [5], в которой было дано обстоятельное исследование шестимерного векторного пространства инвариантов и теории симметричных тензорных кривых (тензоров, зависящих от одного скалярного параметра). В частности, было показано, что полный тензорный базис может быть построен из двух несоосных симметричных тензоров. Фактическое построение такого шестимерного базиса было выполнено в статье [6]. Там же был предложен шестимерный "естественный тензорный репер" для введенной Новожиловым тензорной кривой.

В работе [4] был рассмотрен вопрос о тензорах напряжений, отвечающих в выражении для приращения работы напряжений различным мерам деформации. В дальнейшем этот вопрос о сопряженных энергетических парах тензоров был рассмотрен в статьях [7-9]. Причем автором статьи была предложена пятая пара.

Наиболее сложными (но, зато, наиболее актуальными и интересными) в нелинейной теории упругости являются сингулярные проблемы, имеющие дело с сингулярными (особыми) точками области, в окрестностях которых реализуются большие деформации и повороты. К таким точкам относятся концы трещин и линейных включений, угловые точки острых вырезов и включений, места приложения сосредоточенных воздействий, точки смены типа граничных условий, оси дислокаций и дисклинаций в кристаллах. Прежде всего, именно сингулярности и интересуют исследователей, работающих в следующих, интенсивно развивающихся актуальных разделах физики и механики деформируемого твердого тела:

- теории трещин (хрупкого разрушения),
- теории дефектов в кристаллах,
- теории сосредоточенных воздействий.

Чаще всего в сингулярных проблемах используется аппарат линейной упругости, который, казалось бы, здесь явно неуместен. Поясним это на простом примере одноосного растяжения, при котором относительное удлинение E связано с деформацией ε соотношением

$$E=\sqrt{1+2\varepsilon}-1.$$

При построении линейной теории принимается малость деформации ($\varepsilon<<1$), так что линеаризация выписанной зависимости приводит к выражению $E=\varepsilon$. Аналогично линеаризуются и другие зависимости. Полученные линейные соотношения и используются при рассмотрении сингулярных проблем. Между тем в наиболее интересных окрестностях сингулярных точек, как раз наоборот, $\varepsilon>>1$, так что упрощение рассматриваемого соотношение дает качественно другой результат: $E=\sqrt{2\varepsilon}$. Таким образом, в рассмотрение сингулярных проблем линейная теория изначально вносит существенные, качественные искажения. Ниже будет показано, что и сингулярности решений нелинейных задач качественно отличаются от своих линейных аналогов, так , например, итерационные численные методы (где на каждом шагу решается линейная задача) не могут здесь привести ни к чему хорошему. Тем не менее, такой линейный подход часто (но далеко не всегда) приводит к результатам, сносно коррелирующимися с экспериментальными данными. Таким образом, первой задачей при переходе к нелинейному рассмотрению сингулярных проблем было определение области обоснованного применения здесь линейного подхода. Второй задачей, более важной, является выявление того, что же существенно нового может дать нелинейный подход по сравнению с такими привычными (принимающими иногда характер догм) результатами линейной теории.

Для рассмотрения сингулярных проблем непригодны (в чистом виде) численные методы, "отталкивающиеся" от линейного решения рассматриваемой задачи. Использование приближенных подходов имело бы и чисто психологические аспекты: давало бы повод для дополнительных возражений убежденным сторонникам линейной теории. Поэтому автор выбрал в качестве основного подхода сравнение точных решений эталонных краевых задач, полученных по линейной и нелинейной теориям. При этом совпадение необходимых величин при обоих подходах являлось обоснованием линейного подхода (конечно, лишь в рассматриваемой задаче). Существенное же расхождение, естественно, трактовалось в пользу нелинейного подхода.

К сожалению, общие подходы решения нелинейных краевых задач теории упругости отсутствуют. Необходимо было искать иные пути. Для этого, прежде всего, необходимо было создание предельно простой (но без потери общности) версии нелинейной теории упругости. На это непростое дело ушло много лет интенсивного труда. Понадобилось дальнейшее развитие теории и, прежде всего, пристальное рассмотрение ее общих вопросов [10-18].

В первой половине прошлого века в работах профессора Ленинградского университета Г.В. Колосова применительно к проблемам линейной упругости был развит [19] комплексный метод, делавший более наглядной структуру основных зависимостей теории и дающий возможность использования методов теории функций комплексной переменной. Другой профессор университета (впоследствии президент академии наук Грузии) Н.И. Мусхелишвили много сделал для развития комплексных методов решения задач линейной теории упругости. В том числе им был развит общий метод интегралов типа Коши [12]. В дальнейшем комплексные методы стали применять (в основном, за рубежом) и к нелинейным проблемам.

1. В работах автора [10-18,20-21] использовались комплексные координаты, дифференцирование по ним и комплексные компоненты тензора. Компактные и обозримые комплексные зависимости облегчают запись основных зависимостей в виде, способствующем проведению необходимых преобразований. Комплексный метод можно рассматривать как аналог векторному. Преимущество его перед последним состоит в дополнительной возможности при рассмотрении конкретных задач доводить решение до конца в комплексном виде. В частности, в плоской задаче, при антиплоской деформации и осесимметричной деформации тел вращения был использован предложенный автором (1951) элементарный метод расчленения граничных условий, альтернативный более сложному, требующему специальной подготовки упомянутому методу интегралов типа Коши.

В нелинейной механике упругого тела роль Лагранжевых пар "обобщенная сила - обобщенное перемещение" играют энергетические пары тензоров. Среди пяти таковых наиболее "конкурентоспособны" две пары:

-истинные напряжения (напряжения Коши) - логарифмические деформации,

-условные напряжения (симметричные напряжения Био) - относительные удлинения.

Истинные деформации, вопреки своему завораживающему названию, обладают целым рядом недостатков общего характера [16,17,22]. Что же касается сингулярных проблем, то в них (как было показано автором на примерах решения многочисленных эталонных задач) истинные напряжения, обладая многочисленными дефектами, и вовсе непригодны [11-14,16-18]. О некоторых дефектах будет сказано ниже.

Были предложены новые типы граничных условий и условий сопряжения (дисторсионные, жесткого края, деформационные), более удобные, чем традиционно используемые. Так, дисторсионные и жесткого края, в отличие от геометрических, допускают смещение границы как жесткого целого, что может быть полезным при рассмотрении (в физике твердого тела) границ с проскальзыванием. Кроме того, дисторсионные условия часто бывают однотипными с силовыми (статическими). Деформационные условия формулируются в терминах компонент деформации и содержат в себе «более глубинное», чем традиционные геометрические, требование согласованной на границе деформации сопрягаемых областей. В физике твердого тела при рассмотрении межфазных и межкристаллитных границ рассматривают третье (т.н. термодинамическое) условие сопряжения, применимое и в механике на поверхности разрыва деформации [23-25]. Автором здесь получен новый вариант термодинамического условия с химическим потенциалом, качественно отличным от известных. Существенно, что все три условия (дисторсионное, статическое и термодинамическое) формулируются в рассматриваемых двумерных проблемах в терминах функций комплексной переменной и являются естественными условиями для расширенного вариационного принципа.

В свое время трудами многих ученых (Максвелл, Эшелби, Сандерс, Черепанов, Райс, Штернберг, Будянский и др.) был создан метод инвариантных интегралов (J - интегралов), позволяющий в ряде случаев получить асимптотики напряжений в окрестности сингулярной точки. Автору удалось создать последовательную комплексную нелинейную версию этих инвариантных интегралов, уточнившую полученные ранее результаты и расширившую их область применения. Так, удалось рассмотреть жесткие включения и области с угловыми точками [17,18].

Далее, были созданы предельно простые (опять же без потери общности) версии двумерных проблем. Так, предложена универсальная плоская задача, включающая 8 самостоятельных задач (отвечающих комбинациям обобщенной плоской деформации и плоского напряженного состояния, сжимаемого и несжимаемого материалов, свободного и жесткого краев). Линейная антиплоская деформация значительно проще плоской, так что обычно начинают с рассмотрения антиплоских задач. В нелинейной же постановке это преимущество в значительной мере утрачивается: здесь присутствуют уже все 6 компонент деформаций и напряжений. Кроме того, в общем случае антиплоская задача переопределена. В предложенной автором версии переопределенность устранена. Предложена также версия осесимметричной задачи тел вращения, близкая по своей структуре к плоской задаче.

Проделанного для получения точных решений нелинейных краевых задач было явно недостаточно. Необходимы были более радикальные шаги. При этом статико-геометрические зависимости "пошевелить" без потери общности нельзя. "Слабым местом" в теории оказались законы упругости. Они не являются законами природы (как, например, закон всемирного тяготения), а представляют собой (в разной степени модельные) законы, аппроксимирующие упругое поведения реальных материалов. Возникла мысль найти "идеальные" законы упругости, к которым, помимо естественного требования к качеству аппроксимации, предъявляется еще одно, более жесткое требование: отвечающие им разрешающие уравнения должны давать возможность получать точные решения нелинейных краевых задач. Это, прежде всего, позволило бы использовать весь накопленный арсенал методов решения линейных краевых задач. И такие законы были найдены [13-17].

Прежде всего, был редуцирован стандартный (он же гармонический, полулинейный), использованный А.И. Лурье и другими исследователями, материал, примененный нами к рассмотрению нелинейной плоской задачи. Редукция сводилась к сохранению в упругом потенциале лишь квадратичных (относительно дисторсий) слагаемых. Использованный редуцированный стандартный материал был использован для выявления влияния учета геометрической нелинейности. Большинство конструкционных материалов можно считать малосжимаемыми. С учетом этого и была предложена модель малосжимаемого материала, дающая возможность выявлять влияние как геометрической, так и физической нелинейностей. Малосжимаемый материал также дает возможность получать для плоской задачи и осесимметричной деформации тел вращения точные решения нелинейных краевых задач. Частным случаем малосжимаемого материала является предложенный гибридный закон, удовлетворяющий макрозакону сжимаемости материала и микрозакону взаимодействия частиц [13-17]. Применительно к обобщенной антиплоской деформации был использован хорошо проявивший себя при рассмотрении резиноподобных материалов неогуковский закон. [11-14,16,18]. Перечисленные результаты были распространены на анизотропные материалы. При этом (частично) они явились новым и для линейной анизотропной упругости (введение симметричных коэффициентов Пуассона, унификация матриц упругих модулей внутри кристаллических систем (сингоний) и упрощения самих матриц, способы нахождения приведенных изотропных модулей, определение наитеснейших интервалов изменения модулей и т. д.). Метод точных решений дублировался упомянутым выше методом комплексных нелинейных инвариантных интегралов [16,17].

2. Полученная версия нелинейной теории упругости позволила рассмотреть при нелинейном подходе несколько ключевых вопросов нелинейной теории трещин

[13,18,20,26,27,28]. Уже учет геометрической нелинейности позволил получить ряд интересных новых результатов:

- сопоставление точных решений большого числа эталонных задач по линейной и нелинейной теориям позволило выявить влияние учета нелинейности. Так, в задачах нормального отрыва и поперечного сдвига в плоскости с трещиной линейная теория правильно определяет коэффициент интенсивности напряжений, но неправильно зависимость от полярного угла;

- выявлено, что линейная теория обоснованно применима в задачах, где определяющим параметром является один (единственный) коэффициент интенсивности напряжений;

- учет нелинейности вносит существенную поправку (около 30%) в известный критерий хрупкого разрушения Кейли - Тайсона - Котрелла, определяющий, будет ли разрушение хрупким или вязким;

- особенно контрастно различия между линейным и нелинейным подходами проявляются при рассмотрении трещин смешанного типа. Так называют трещины, подверженные одновременно нормальной и сдвиговой нагрузкам. Выявлено отсутствие излома траектории распространения трещины смешанного типа. В действительности трещина страгивается вдоль материального волокна, продолжающего разрез. Видимость излома («наблюдаемого» при линейном подходе) создает большой упругий поворот. Трещина лишь постепенно, плавно разворачивается. Этот теоретический результат подтвержден в эксперименте на резиновой пластине;

- выявлено фактическое совпадение критериев разрушения Ирвина и нормального отрыва (Эрдогана - Си);

- именно применительно к теории трещин впервые выявлена непригодность истинных напряжений в сингулярных проблемах;

- выявлено качественное различие результата действия на берег трещины "мертвой" (не меняющей направления при деформации) и следящей (например, нормального давления) нагрузок [28];

- применительно к нелинейному подходу уточнен дискретный критерий разрушения Новожилова;

- выявлено отсутствие осциляции деформаций и напряжений в конце трещины между полуплоскостями с разными упругими свойствами [29];

- в нелинейной постановке модифицированным методом граничных элементов рассмотрены трещины в конечных областях [30-33].

3. Известно, что прочность реальных кристаллических материалов на несколько порядков меньше теоретической прочности идеальных материалов. Как было установлено в первой половине нашего века трудами Орована, Поляни, Тейлора и Бюргерса, причиной этому являются, в основном, линейные дефекты атомных решеток: дислокации и дисклинации. Автор задался целью выяснить, что нового дает нелинейный подход к классическим, давно установившимся разделам теории дислокаций и дисклинаций. И были получены следующие результаты [13,17]:

- рассмотрены нелинейные краевые и винтовая дислокации, а также клиновая дисклинация в кристаллах;

- при рассмотрении взаимодействия прямолинейных дислокаций и дисклинаций с границей области, с концом трещины и между собой полученные точные решения соответствующих задач показали существенные, порой качественные их отличия от линейных аналогов. Так, например, было выяснено, что параллельные прямолинейные дислокации одного знака (вопреки известным из линейной теории классическим результатам) везде отталкиваются. В отличие от линейного подхода, нелинейный обнаруживает дилатацию дислокаций (дислокационное разрыхление материала);

- из закона для малосжимаемого материала получен гибридный закон, удовлетворяющий макрозакону сжимаемости материала и микрозакону взаимодействия частиц. Последний, по-видимому, позволит уточнить ситуацию в ядрах (ближайших окрестностях) дислокаций и дисклинаций, где даже нелинейный закон упругости не применим: нарушается сплошность среды. Для получения точных решений в плоской задаче предложен и использован более простой вариант гибридного закона [16,17];

- в нелинейной постановке рассмотрен вопрос о межкристаллитных и межфазных большеугловых границах. Сформулированы три комплексных условия сопряжения (статическое, дисторсионное и термодинамическое, см. выше), формулируемые в терминах функций комплексной переменной и являющиеся естественными для расширенного вариационного начала. Связанные с термодинамическим условием химические потенциалы структурно отличны от ранее используемых. С учетом всех трех условий рассмотрен вопрос о (произвольной формы и структуры) включении в (также нелинейную) материнскую матрицу. Установлена связь между этой задачей и (прямой и обратной) задачами Эшелби [34,25].

4. Наконец, применительно к проблеме сосредоточенных сил и моментов нелинейный подход привел к новым интересным результатам:

- прежде всего здесь также была выявлена непригодность истинных напряжений, вследствие их независимости от величины сосредоточенных воздействий и завышенной сингулярности;

- выявлено, что условные напряжения имеют любопытную особенность: они независимы от направления вектора силы;

- решены единообразным путем обобщенные задачи Фламана (для сосредоточенных сил и моментов, приложенных к границам областей общего вида). Кроме того, выявлена нелинейная статико-геометрическая аналогия, дающая возможность при известном решении задачи для сосредоточенных сил выписывать соответствующие решения задачи для дислокаций, и наоборот [16,17]. В частности, по этой аналогии сосредоточенной силе отвечает краевая дислокация на границе кристалла (кристаллита) – так называемая ступенька;

- рассмотрены сосредоточенные силы и моменты в полуплоскости [35].

5. Обычно, говоря о нелинейной теории сингулярной проблемы, имеют в виду физическую нелинейность (чаще всего пластическую деформацию). Геометрическая же нелинейность рассматривалась в сравнительно небольшом числе работ. Зачастую при этом вводились упрощающие гипотезы, справедливость и область применимости которых не выяснялась. Многие работы по нелинейной сингулярной теории упругости носят фрагментарный характер. Наконец, и это самое главное, в этих работах использовались истинные напряжения. Как уже говорилось выше, на большом числе примеров показана непригодность истинных напряжения (напряжений Коши) для рассмотрения нелинейных сингулярных проблем и, наоборот, пригодность условных напряжений (симметричных напряжений Био).

Как представляется автору, основными его результатами здесь являются: систематический вывод предельно простой (без потери общности) оригинальной версии комплексной нелинейной теории сингулярной упругости, содержащей новые результаты. Уже предварительное рассмотрение классических разделов трех актуальных проблем (хрупкое разрушение, дефекты в кристаллах, сосредоточенные воздействия) показало работоспособность версии и возможность с ее помощью получать существенно новые результаты, качественно отличающиеся от того, что дали традиционные линейные подходы. Версия носит рамочный характер и нуждается в дальнейшем наполнении. В том числе необходимо, применительно к нелинейным сингулярным проблемам, дальнейшее развитие численных методов

Проделанная автором работа представляет собой первые скромные шаги на пути создания общей нелинейной механики деформируемого твердого тела, проделанные автором и его учениками с благословения Валентина Валентиновича Новожилова, советы и помощь которого трудно переоценить. Создание такой теории своевременно и реально. Наступило следующее тысячелетие, безусловно, нелинейное. Нельзя сказать, что линейная теория - вчерашний день. Это, безусловно, день сегодняшний. Здесь много предстоит еще сделать, особенно, в прикладной части. Но ведь надо думать и о завтрашнем дне! Следует отметить, что интерес к нелинейным подходам неуклонно растет, существует даже Академия нелинейных наук! Для научной молодежи, да и для ученых старшего поколения, участие в этом непростом, но таком перспективном направлении механики (я думаю) жизненно необходимо.

Библиографический список

1. Новожилов В.В. Общая теория устойчивости оболочек // Доклады АН СССР.-1941.- Т. 32. - №5.- С. 316-319.
2. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. - М.-Л.: Гостехиздат,1948.
3. Новожилов В.В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно-упругой среде // Прикладная математика и механика - 1951. Т.15. Вып. 2. - С.183-194.
4. Новожилов В.В. О принципах обработки результатов статических испытаний изотропных материалов // Прикладная математика и механика. - 1951. - Т.15. - Вып.6.- С. 709-722.
5. Новожилов В.В. О формах связи между напряжениями и деформациями в первоначально изотропных неупругих телах (геометрическая сторона вопроса) // Прикладная математика и механика. – 1963. - Т.27.- Вып. 5.- С.794-812.
6. Черных К.Ф. О формах связи между симметричными тензорами в механике сплошных сред // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1967 - №3. - С. 42-51.
7. Хилл Р. Об определяющих неравенствах для простых материалов. - I, II // Механика (сб. переводов). – 1969 - №4 (116). - С. 94-109,109-118.
8. Черных К.Ф. Определяющие неравенства упругих тел // Механика сплошных сред и родственные проблемы анализа (к 80-летию академика Н.И. Мусхелишвили).- М.: Наука, 1972. - С.481-486.
9. Черных К.Ф. О постулате устойчивости анизотропного материала // Избранные проблемы прикладной механики (к 60-летию академика В.Н. Челомея). – М.: Наука, 1974. - С.721-728.

10. Черных К.Ф. Большие деформации упругого тела // Механика деформируемых тел и конструкций (к 60-летию академика Ю.Н. Работнова). - М.: Машиностроение, 1975. - С. 721-730.
11. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. - Л.: Машиностроение, 1986. - 336 с.
12. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. - М.: Наука. 1988, 132 с.
13. Черных К.Ф. Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин. - М.: Наука, 1996.
14. Черных К.Ф. Нелинейная сингулярная упругость (теория и приложения). – СПб., 1998.
15. Черных К.Ф. Некоторые законы нелинейной теории упругости // Докл. РАН. - 1998. -Т.359. - №3. - С. 337-339.
16. Черных К.Ф. Нелинейная сингулярная упругость. Ч.1. Теория. - СПб., 1999.
17. Черных К.Ф. Нелинейная сингулярная упругость. Ч.2. Приложения. СПб., 1999.
18. Chernykh K.F. An Introduction to Modern Anisotropic Elasticity. USA. - New York, Wallingford U.K: Begell Publishing House, 1998.
19. Колосов Г.В. Применение комплексной переменной к теории упругости. - Л.- М.: ОНТИ. 1935.
20. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости и ее применение к физически и геометрически нелинейной теории трещин // Успехи механики. - 1989. - Т.12. - №4. - С. 51-75.
21. Черных К.Ф. О природе конечности напряжений в плоской задаче нелинейной теории упругости // Докл. РАН. - 1994. - Т.336. - №6. - С.769-770.
22. Новожилов В.В., Черных К.Ф. Об "истинных" мерах напряжений и деформаций в нелинейной механике // Изв. АН СССР. - 1987. - №5. - С.73-79.
23. Гринфельд М.А. Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений М.: Наука, 1990. - 312 с.
24. Фрейдин А.Б., Чикис А.М. Зоны фазовых переходов в нелинейно - упругих изотропных материалах. Ч. 1 // Механика твердого тела. – 1994. - №4. - С. 91-109.
25. Черных К.Ф О большеугольных границах (плоская задача) // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела. Вып.3 – СПб., - С.14-34.
26. Черных К.Ф. О построении нелинейной теории хрупкого разрушения // Вестник Ленингр. ун-та. - 1986. - Сер.1. - Вып.3. - С.12-21.
27. Черных К.Ф. О необходимости учета геометрической нелинейности в проблеме хрупкого разрушения.// Докл. АН СССР. - 1989. - Т. 306. - №6. - С.1336-1338.
28. Черных К.Ф., Петренко И.В. Следящая нагрузка в нелинейной плоской задаче // Прикладная механика – техническая физика. - 1996. - Т.37.- С.145-148.
29. Греков М.А Плоская задача для трещины, расположенной между двумя линейно-упругими средами // Прикладная математика и механика. - 1994.- Т.58. - Вып.4.- С.146-158.
30. Бочкарев. А.О. Применение метода граничных элементов к геометрически нелинейным задачам теории упругости // Вестник СПбГУ. - 1996. - Сер.1. - Вып.3 - С. 62-64.
31. Бочкарев. А.О. Граничные интегралы и МГЭ в плоской задаче геометрически нелинейной упругости// Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела. - Вып.1 – СПб., 1998. - С. 177-189.

32. Бочкарев. А.О. Граничные интегралы в плоской задаче // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела. - Вып.2. - СПб., 2000. - С. 22-36.
33. Бочкарев. А.О. Универсальное элементарное решение плоской упругой задачи для малосжимаемого материала первого порядка // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела. - Вып.3. - СПб., 2000. - С. 77-85.
34. Черных К.Ф. Несколько замечаний к задаче Эшелби // Механика твердого тела. - 1994. - №4. - С. 47-49.
35. Рыбченко А.Г. Сосредоточенные силы и моменты в упругой полуплоскости // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела. - Вып.3. – СПб., 2000. - С.159-164.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта ведущих научных школ (№ 00-15-96027) и гранта РФФИ (№ 99-01-00686).

Получено 3.03.2001