

Т.Ю. Антонов, П.Г. Фрик

Институт механики сплошных сред УрО РАН

КАСКАДНЫЕ ПРОЦЕССЫ И СКЕЙЛИНГ В КЛАССЕ МОДЕЛЕЙ
МГД ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Abstract

Quadratic integrals of motion mostly determine the small scale turbulence structure. In this paper we study a class of shell models of magnetohydrodynamic (MHD) turbulence, which contain three integrals of motion: the total energy, the cross-helicity and the third integral W depending on model's parameter ε . One shows that for $\varepsilon < 1$ the integral W is a helicity-like integral and the system displays a small scale dynamo effect, characterized by pronounced inertial range with equipartition of magnetic and kinetic energies. In this case the spectral index is close to Kolmogorov's "-5/3". At $\varepsilon > 1$ W becomes a positive-defined integral. Then the character of energy transfer processes changes. As ε increases, the magnetic energy containing scale moves to small scales. At $\varepsilon > 2$ the dynamo process becomes impossible and the magnetic field plays a role of passive scalar.

1. Введение

Важнейшим признаком развитой турбулентности является наличие широкого интервала масштабов, в котором имеет место каскадный перенос квадратичных величин. Наличие постоянного вдоль всего инерционного интервала спектрального потока энергии определяет характер классической колмогоровской турбулентности. Появление дополнительных квадратичных интегралов движения (величин, сохраняемых в бездиссипативном пределе) качественно меняет характер каскадных процессов в турбулентности. Так, в двумерной гидродинамике сохраняющейся величиной является энтрофия (средний квадрат завихренности), что делает невозможным перенос энергии в малые масштабы. В результате, в двумерной турбулентности возникают два инерционных интервала: интервал переноса энтрофии в малые масштабы и интервал переноса энергии в большие масштабы.

Турбулентное движение проводящей жидкости описывается уравнениями магнитной гидродинамики (МГД). Запишем их в безразмерном виде для случая несжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned} d_t \bar{u} + (\bar{u} \bar{\nabla}) \bar{u} &= (\bar{B} \bar{\nabla}) \bar{B} - \nabla(P + \bar{B}^2 / 2) + Re^{-1} \Delta \bar{u}, \\ d_t \bar{B} + (\bar{u} \bar{\nabla}) \bar{B} &= (\bar{B} \bar{\nabla}) \bar{u} + Rm^{-1} \Delta \bar{B}, \\ \bar{\nabla} \bar{u} &= 0, \quad \bar{\nabla} \bar{B} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

(здесь \bar{u} – скорость, \bar{B} – индукция магнитного поля, P – давление, Re – число Рейнольдса, Rm – магнитное число Рейнольдса). Система (1) в пределе $Re, Rm \rightarrow \infty$ характеризуется тремя интегралами движения: общей энергией, перекрестной спиральностью и магнитной спиральностью:

$$E = E_U + E_B = \frac{1}{2} \int_V (\bar{u}^2 + \bar{B}^2) dV, \quad H_C = \int_V (\bar{u}\bar{B}) dV, \quad H_B = \int_V (\bar{A}\bar{B}) dV,$$

где \bar{A} - векторный потенциал, $\bar{B} = \text{rot } \bar{A}$. Из этих трех величин положительно определенной является только энергия, а обе спиральности могут иметь произвольный знак. Отметим, что при переходе к двумерной магнитной гидродинамике два интеграла (энергия и перекрестная спиральность) остаются неизменными, а третий заменяется на квадрат векторного потенциала $a = \int_V (\bar{A}^2) dV$. Роль интегралов типа спиральности в

каскадных процессах не столь однозначна, как роль положительно определенных интегралов типа энергии и энтропии. Даже в обычной трехмерной гидродинамической турбулентности, которая помимо энергии сохраняет и спиральность $H_U = \int_V (\bar{u} \text{rot } \bar{u}) dV$,

процессы каскадного переноса спиральности и его влияния на каскад энергии по-прежнему вызывают много споров. В МГД-турбулентности ситуация еще более запутана, тем более, что экспериментальный материал по мелкомасштабной МГД-турбулентности практически отсутствует, а прямые численные исследования уравнений (1) с достаточным разрешением только начинаются (например, [1]).

В данной работе сделана попытка определить взаимосвязь законов сохранения и динамики инерционного интервала в системе гидродинамического типа с тремя интегралами движения путем рассмотрения однопараметрического класса каскадных моделей МГД-турбулентности, позволяющих непрерывным образом варьировать третий интеграл движения.

2. Каскадная модель МГД турбулентности

Каскадные модели – это простейшие спектральные модели развитой турбулентности, в которых каждая переменная характеризует амплитуду пульсаций скорости (температуры, магнитного поля и т.д.) внутри целой октавы волновых чисел. Представляя собой динамические системы из нескольких десятков уравнений, эти модели, тем не менее, воспроизводят многие достаточно тонкие свойства развитой турбулентности (см., например [2,3]).

Рассмотрим модель МГД-турбулентности, предложенную П.Г. Фриком и Д.Д. Соколовым в работе [4]. В отличие от других МГД-моделей [5-7], эта модель в бездиссипативном пределе сохраняет три квадратичные величины, соответствующие всем известным интегралам движения в магнитной гидродинамике. В данной работе модель модифицирована таким образом, что в ней сохранен один управляющий параметр ε , отвечающий, в частности, за вид интегралов движения.

Уравнения модели запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{U}_n = ik_n \left[(U_{n+1}^* U_{n+2}^* - B_{n+1}^* B_{n+2}^*) - \frac{\varepsilon}{2} (U_{n-1}^* U_{n+1}^* - B_{n-1}^* B_{n+1}^*) + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon - 1}{4} (U_{n-1}^* U_{n-2}^* - B_{n-1}^* B_{n-2}^*) \right] - Re k_n^2 U_n, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot{B}_n = ik_n \left[\frac{(1-\varepsilon)^2}{(2-\varepsilon)} (U_{n+1}^* B_{n+2}^* - B_{n+1}^* U_{n+2}^*) + \frac{1-\varepsilon}{2(2-\varepsilon)} (U_{n-1}^* B_{n+1}^* - B_{n-1}^* U_{n+1}^*) - \right. \\ \left. - \frac{1}{4(2-\varepsilon)} (U_{n-1}^* B_{n-2}^* - B_{n-1}^* U_{n-2}^*) \right] - Rm^{-1} k_n^2 B_n, \end{aligned} \quad (3)$$

где U_n и B_n - комплексные переменные, характеризующие соответственно пульсации скорости и магнитного поля в интервале волновых чисел $k_n < \bar{k} < k_{n+1}$, $k_n = k_0 2^n$. Уравнения (2)-(3) в пределе $\text{Re} = \text{Rm} = \infty$ сохраняют две квадратичные величины

$$E = \sum_n |U_n|^2 + |B_n|^2, \quad H_C = \sum_n (U_n B_n^* + U_n^* B_n),$$

являющиеся аналогами общей энергии и перекрестной спиральности. Эти величины остаются интегралами движения при любых значениях параметра ε . Система (2)-(3) обладает и третьим интегралом движения, который можно записать в виде

$$W = \sum_n (\text{sign}(\varepsilon - 1))^n k_n^\lambda |B_n|^2, \quad \lambda = \log_2 |\varepsilon - 1|. \quad (4)$$

Интересно, что при $\varepsilon = 1$ меняется тип интеграла движения. Для $\varepsilon > 1$ интеграл (4) есть величина положительно определенная и при $\varepsilon = 5/4$ является аналогом квадрата векторного потенциала

$$W_1 = a = \sum_n k_n^{-2} |B_n|^2. \quad (5)$$

Для $\varepsilon < 1$ третий интеграл (4) становится знакопеременной величиной и при $\varepsilon = 1/2$ имеет размерность магнитной спиральности, являясь аналогом соответствующей величины в трехмерной магнитной гидродинамике,

$$W_2 = H_B = \sum_n (-1)^n k_n^{-1} |B_n|^2. \quad (6)$$

Отметим, что в работе [4] каскадные уравнения (2)-(3) исследовались для случаев $\varepsilon = 1/2$ и $\varepsilon = 5/4$, соответствующих трех- и двумерной МГД-турбулентности.

Каскадные уравнения (2)-(3) имеют в инерционном интервале стационарные решения вида

$$U_n = U_0 k_n^\alpha, \quad B_n = B_0 k_n^\beta. \quad (7)$$

Очевидно, что при любых $\beta = \alpha$ уравнение (3) удовлетворяется автоматически, а уравнение (2) имеет решения, известные для соответствующей гидродинамической модели [2],

$$\alpha_1 = \beta_1 = -\frac{1}{3}, \quad \alpha_2 = \beta_2 = \frac{1}{3} \log_2 \frac{|\varepsilon - 1|}{2}. \quad (8)$$

Первое решение соответствует колмогоровскому спектру $E(k) \approx k^{-5/3}$ и присутствует при любых ε . Можно показать, что в случае $\beta \neq \alpha$ стационарных решений для произвольных ε не существует.

3. Численные эксперименты

Система (2)-(3) решалась численно методом Рунге-Кутты 4-го порядка для $0 \leq n \leq 25$ (напомним, что такой набор переменных обеспечивает рассмотрение диапазона масштабов, в котором максимальный масштаб превышает минимальный более чем в 10^7 раз), $\text{Re} = \text{Rm}^{-1} = 10^9$. Суммарная энергия магнитного поля в начальный момент времени составляла порядка одной сотой процента от кинетической энергии. Такая постановка интересна с точки зрения вопроса о реализуемости эффекта МГД-динамо, состоящего в возбуждении и поддержании магнитного поля за счет кинетической энергии

движущейся проводящей жидкости. Подчеркнем, что речь идет о так называемом мелкомасштабном динамо, состоящем в генерации магнитного поля на масштабах, принадлежащих инерционному интервалу. Цель численных экспериментов состояла в изучении влияния параметра ε , связанного с третьим интегралом движения, на характер каскадных процессов и процесс генерации мелкомасштабного магнитного поля. Рассматривались значения $-10 < \varepsilon < 10$, хотя все примечательные перестройки характера процессов лежат в значительно более узком интервале: $-1 < \varepsilon < 3$.

Первый интересный результат состоит в том, что ни при каких значениях параметра ε в системе (2)-(3) не обнаружено устойчивых решений вида (7). Это отличает МГД-систему от чисто гидродинамической каскадной модели, получаемой из (2)-(3) при $B_n \equiv 0$, в которой для $0 < \varepsilon < 0,384$ колмогоровское решение $\alpha = -1/3$ устойчиво. МГД-система демонстрирует сложное стохастическое поведение при всех значениях параметра, и под стационарными решениями мы будем подразумевать в дальнейшем решения, получаемые путем осреднения по времени энергии пульсаций (квадрата соответствующей переменной). На рисунке приведены стационарные спектральные распределения кинетической ($E_U(n)$, белые точки) и магнитной ($E_B(n)$, черные точки) энергий, полученные путем осреднения решений на временах $50 < t < 75$ (время измеряется в характерных временах оборота вихря на большем масштабе). Начало осреднения выбрано так, чтобы оно заведомо превышало время, необходимое для завершения переходных процессов, связанных с конкретными начальными условиями.

На оси ε выделяются две особые точки: $\varepsilon = 1$, в которой меняется тип интеграла движения, и $\varepsilon = 2$, в которой в уравнении (3) возникает особенность, а показатель λ в интеграле (4) меняет знак.

В области параметра $\varepsilon < 1$ (см. рисунок,а-ж) решения характеризуются устойчивым динамо-процессом, характеризующимся приблизительным равенством магнитной и кинетической энергий практически на всех масштабах. При положительных ε наблюдается ослабление магнитной энергии на самых больших масштабах ($n < 5$), то есть магнитная энергия почти не поступает на масштабы, содержащие максимум кинетической энергии. Тем не менее, равномерное распределение магнитной и кинетической энергий сохраняется на протяжении всего инерционного интервала. Наклон спектра в инерционном интервале близок к колмогоровскому, хотя и становится круче при ε , приближающихся к единице (см. табл.1, где приведены показатели степени для спектральных плотностей $E(k) \sim k^x$, а $x = 2\alpha - 1$ для кинетической и $x = 2\beta - 1$ для магнитной энергий).

Качественная перестройка характера решения происходит при $\varepsilon > 1$. Блокируются процессы генерации магнитного поля в больших масштабах, причем, чем больше ε , тем дальше в мелкие масштабы отодвигается граница интервала, в котором сохраняется равномерное распределение кинетической и магнитной энергий (см. рисунок,з-к). Для $1,3 \leq \varepsilon \leq 1,5$ в спектре магнитной энергии хорошо выделяются восходящий и нисходящий участки. При $\varepsilon \approx 1,7$ граница этих участков (то есть максимум в спектре) достигает диссипативного интервала (рисунок,л) и при дальнейшем росте ε весь спектр магнитного поля лежит существенно ниже спектра кинетической энергии. Очевидно, что значение $\varepsilon = 1,7$ не является выделенным – при изменении вязкости (числа Рейнольдса) будет меняться протяженность инерционного интервала и, соответственно, значение параметра, при котором максимум магнитной энергии достигнет диссипативного масштаба.

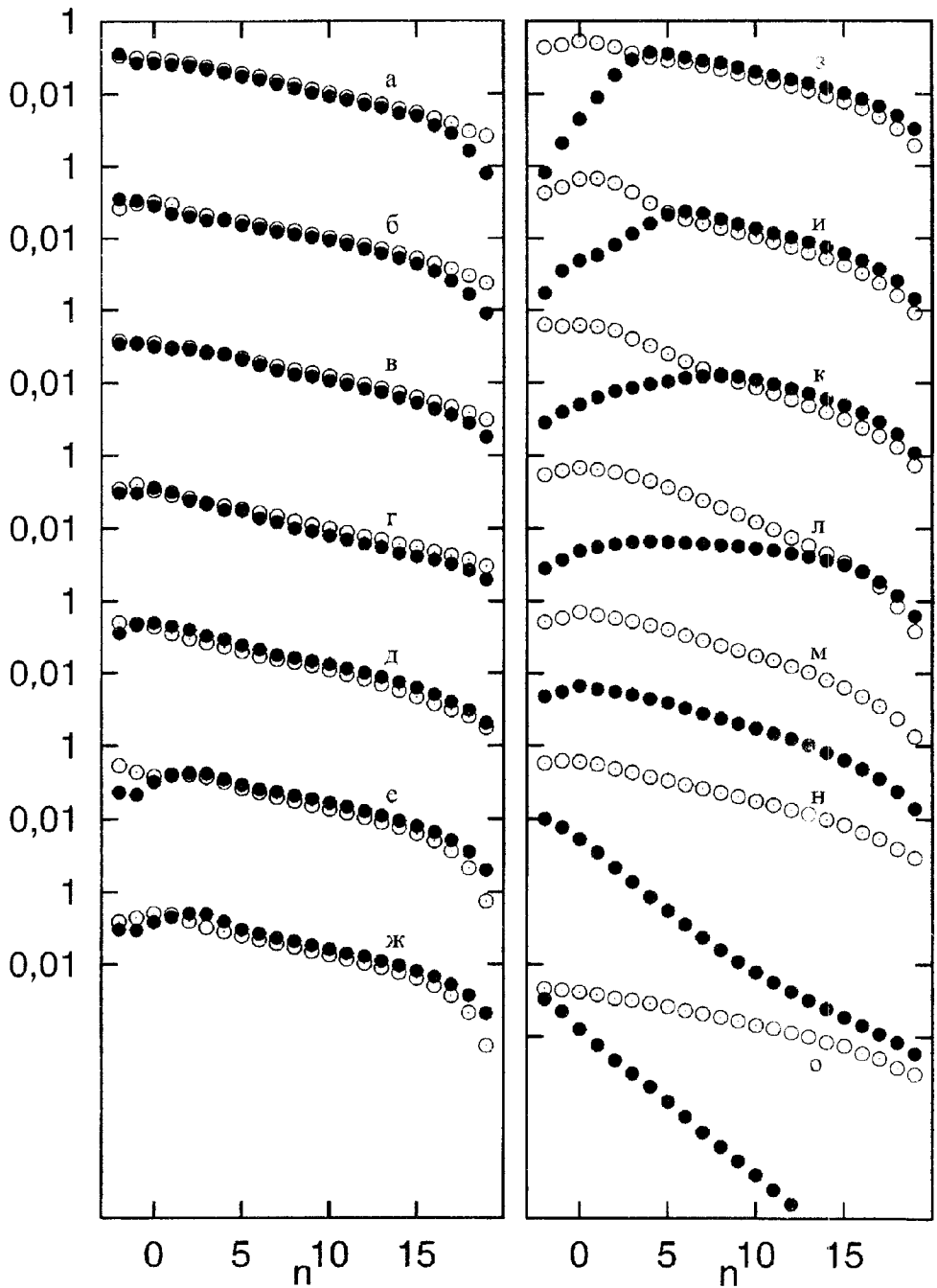


Рис. Энергетические спектры магнитного поля (черные точки) и поля скорости (белые точки) при различных значениях ε : а) $\varepsilon = -5$; б) $\varepsilon = -2$; в) $\varepsilon = -0,5$; г) $\varepsilon = 0$; д) $\varepsilon = 0,5$; е) $\varepsilon = 0,99$; ж) $\varepsilon = 1,01$; з) $\varepsilon = 1,1$; и) $\varepsilon = 1,3$; к) $\varepsilon = 1,5$; л) $\varepsilon = 1,7$; м) $\varepsilon = 1,99$; н) $\varepsilon = 3$; о) $\varepsilon = 5$

Таблица 1
 Наклоны спектров энергии поля скорости и магнитного поля ($E_B \approx E_U$)

ε	$2\alpha - 1$	$2\beta - 1$
-5,00	-1,716	-1,736
-4,00	-1,742	-1,744
-3,00	-1,672	-1,67
-2,00	-1,622	-1,632
-1,00	-1,676	-1,69
-0,50	-1,678	-1,732
0,00	-1,708	-1,8
0,50	-1,64	-1,634
0,99	-1,74	-1,684
1,01	-1,728	-1,718
1,10	-1,768	-1,706
1,20	-1,738	-1,742
1,25	-1,856	-1,772
1,30	-1,922	-1,838
1,40	-1,996	-1,886
1,50	-2,192	-1,97

Таблица 2
 Наклоны спектров энергии поля скорости и магнитного поля ($E_B \ll E_U$)

ε	$2\alpha - 1$	$2\beta - 1$	$2\beta_1 - 1$	$2\beta_2 - 1$
1,25	-1,722	1,574	0,362	2,444
1,30	-1,814	0,622	0,144	2,102
1,40	-1,648	0,684	-0,354	0,94
1,50	-2,314	-0,306	-0,342	1,628
1,60	-2,28	-0,694	-0,622	1,034
1,70	-2,254	-1,224	-0,858	0,538
1,80	-1,97	-1,328	-1,192	-0,414
1,90	-1,916	-1,612	-1,39	-0,864
1,99	-1,952	-1,924	-1,51	-1,066
2,01	-1,894	-1,924	-1,566	-1,24
2,50	-1,766	-2,936	-2,202	-2,638
3,00	-1,722	-3,374	-2,64	-3,558
4,00	-1,692	-3,172	-3,24	-4,786
5,00	-1,636	-3,684	-3,682	-5,726

Точка $\varepsilon = 2$ определяет нижнюю границу области, в которой мелкомасштабный динамо-процесс становится невозможным даже при сколь угодно больших магнитных числах Рейнольдса. Рассматривая рисунок(н-о) и табл. 2, можно видеть, что чем больше ε , тем круче становится спектр. В то же время происходит рост энергии крупномасштабного магнитного поля (при $\varepsilon \approx 5$ в наибольшем масштабе значения магнитной и кинетической энергии становятся близкими друг другу). Такое поведение связано с тем, что при $\varepsilon > 2$ показатель λ в интеграле (4) становится положительным и величина W становится магнитным аналогом обобщенной энтропии. Последнее означает, что спектральный поток магнитной энергии возможен только в направлении больших масштабов при одновременном переносе W к малым масштабам.

В заключение отметим, что в решениях системы для $\varepsilon > 1$ в спектре магнитного поля есть участки, в которых его энергия значительно меньше кинетической энергии. Это означает, что обратное влияние магнитного поля на поле скорости слабо и магнитное поле на соответствующих масштабах может рассматриваться как пассивная примесь. Для таких режимов встает вопрос о возможных стационарных решениях $B_n = B_0 k_n^\beta$, реализующихся при заданном решении для скорости $U_n = U_0 k_n^\alpha$ (то есть требуется найти β при заданном α). Таких решений три: $\beta = \alpha$, которое существует для любых ε , и пара решений

$$\beta_1 = -\frac{1 + \alpha + \log_2 |\varepsilon - 1|}{2}, \quad \beta_2 = -(1 + 2\alpha + \log_2 |\varepsilon - 1|), \quad (9)$$

которые возможны только при $\varepsilon > 1$. Из табл. 2 видно, что большинство значений β , полученных для слабого магнитного поля, не соответствует ни одному из решений (9). Лишь при больших ε значения β стремятся к решению β_1 .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 99-01-00362).

Библиографический список

1. Mueller W.-C., Biskamp D. Scaling properties of three-dimensional MHD turbulence // Phys. Rev. Lett. - 2000. - Vol. 84. - № 3. - P. 475-478.
2. Bifferale L., Lambert A., Lima R., Paladin G. Transition to chaos in a shell model of turbulence // Physica D. - 1995. - Vol. 80. № 1-2. - P. 105-115.
3. Frick P., Dubrulle B., Babiano A. Scaling properties of a class of shell models // Phys. Rev. E. - 1995. - Vol. 51. - № 6. - P. 5582-5593.
4. Frick P., Sokoloff D. Cascade and dynamo action in a shell model of MHD turbulence // Phys. Rev. E. - 1998. - Vol. 57. - № 4. - P. 4155-4164.
5. Gloaguen C., Leorat J., Pouquet A., Grappin R. A scalar model for MHD turbulence // Physica D. - 1985. - Vol. 17. - P. 154-182.
6. Carbone V. Scale similarity of velocity structure functions in fully developed MHD turbulence // Phys. Rev. E. - 1994. - Vol. 50. - P. 671-674.
7. Biskamp D. Cascade model for magnetohydrodynamic turbulence // Phys. Rev. E. - 1994. - Vol. 50. - № 4. - P. 2702-2711.

Получено 10.04.2000