

УДК 532.546

Ю.М. Давыдов, А.Б. Чечейбаев

Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПЛАСТЕ
ПРИ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЯХ ФИЛЬТРАЦИИ
МЕТОДОМ КРУПНЫХ ЧАСТИЦ**

Abstract

The problems of nonstationary underground fluid dynamics is investigated. The numerical solutions are obtained by Large-Particles Method. The complex physical model of academician Sergei A. Christianovitch is considered.

При исследовании проблем естествознания в настоящее время активно и успешно используется численное моделирование. В современных задачах подземной гидромеханики сплошных сред необходимо решать систему нелинейных дифференциальных уравнений при заданных начальных и граничных условиях. Аналитические методы исследования позволяют решить достаточно узкий круг проблем, которые могут быть сформулированы в результате различных допущений и упрощений. Но вместе с этим простейшие задачи, допускающие аналитические решения, служат тестами при решении более сложных проблем.

В данной работе для решения задач фильтрации используется мощный метод современного численного эксперимента - метод крупных частиц [1-3 и др.], хорошо себя зарекомендовавший при решении многих сложных задач механики сплошных сред.

Традиционным уравнением подземной гидромеханики, характеризующим процесс фильтрации жидкости, является линейный закон А. Дарси и его обобщение для «турбулентного» режима, когда пропорциональность скорости фильтрации градиенту давления заменяется квадратичной зависимостью и коэффициент проницаемости имеет размерность не площади, а длины [4,5]. Н.Е. Жуковским [6] из общих уравнений гидродинамики при пренебрежении силами инерции аналитически выведен линейный закон А. Дарси. Фундаментальные работы в области нефтегазовой гидродинамики выполнены академиком С.А. Христиановичем [7-10 и др.]. Как показала практика [7], совпадения данных опыта и численных расчетов, где в качестве динамического уравнения принимались линейный и двучленный законы А. Дарси, наблюдались только при медленных изменениях давления во времени. С.А. Христиановичем предложена новая модель фильтрации в условиях импульсного нагружения [7-9].

Следуя общей идее метода крупных частиц [1-3], дадим его описание применительно к системе уравнений изотермической фильтрации в пласте с переменной эффективной толщиной $h(x, y)$ в случае, когда в качестве динамического уравнения принимается модельное уравнение С.А. Христиановича. Основная идея метода крупных частиц состоит в расщеплении исходной нестационарной системы уравнений движения подземной гидромеханики по физическим процессам.

Среда здесь моделируется системой крупных жидких частиц, совпадающих в данный момент времени с частицами эйлеровой сетки. Расчет каждого временного

шага (вычислительного цикла) разбивается на три этапа: эйлеров, лагранжев и заключительный.

I - эйлеров этап, пренебрегаем всеми эффектами, связанными с перемещением элементарной ячейки (потока массы через границы крупной частицы нет), и исходная система уравнений сводится к динамическому уравнению. Здесь в расчетной области определяется поле гидродинамической скорости жидкости;

II - лагранжев этап, на котором при движении жидкости вычисляются потоки массы через границы эйлеровых ячеек (крупных частиц);

III - заключительный этап, когда на фиксированной исходной расчетной сетке определяются в новый момент времени значения параметров фильтрационного потока (плотности, давления, пористости) на основе закона сохранения массы для каждой ячейки и всей системы в целом.

Приведем алгоритм метода крупных частиц для моделирования фильтрационного течения однородной жидкости в пласте при использовании модельного уравнения С.А. Христиановича в качестве уравнения движения. Система уравнений изотермического движения в пласте с эффективной толщиной $h(x, y)$ состоит из уравнения неразрывности - закона сохранения массы, уравнения С.А. Христиановича и баротропных уравнений состояния для жидкости и пористой среды:

$$h \frac{\partial \rho m}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho m U h) = 0, \\ \rho \frac{dU}{dt} + \varepsilon^2 (\nabla p + \beta \cdot p \nabla \ln m) + \frac{\mu \cdot m}{\lambda} U = 0, \quad (1)$$

$$\rho = \rho(p), \quad m = m(p),$$

где $U = (u, v)$ - вектор гидродинамической скорости жидкости, ρ - плотность, p - пластовое давление, m - пористость, h - эффективная толщина пласта, β - безразмерная постоянная, зависящая от физических параметров пористой среды; величины $[\varepsilon^2]=1$ и $[\lambda]=L^2$ в уравнении С.А. Христиановича связаны с коэффициентом проницаемости k в модели А. Дарси следующим образом: $k = \lambda \cdot \varepsilon^2$.

I. Эйлеров этап.

На этом этапе для каждой расчетной ячейки (i, j) , как об этом уже говорилось, пренебрегаем всеми эффектами, связанными с ее перемещениями (отсутствует поток массы через границы ячейки). Поэтому убирается конвективный член из уравнения неразрывности, а жидкость предполагается заторможенной. Исходная система уравнений сводится, таким образом, к единственному соотношению - уравнению С.А. Христиановича. Тогда

$$\rho \frac{du}{dt} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \beta \cdot \frac{p}{m} \cdot \frac{\partial m}{\partial x} \right) + \frac{\mu \cdot m}{\lambda} u = 0, \\ \rho \frac{dv}{dt} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \beta \cdot \frac{p}{m} \cdot \frac{\partial m}{\partial y} \right) + \frac{\mu \cdot m}{\lambda} v = 0, \quad (2)$$

где производные по времени являются полными производными.

Аппроксимируя (2) в момент времени t^n , получим следующие разностные уравнения в декартовой системе координат x, y для крупной частицы (i, j) :

$$\tilde{u}_{i,j}^n = u_{i,j}^n - \Delta (u_{i,j}^n \cdot \frac{u_{i+1/2,j}^n - u_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + v_{i,j}^n \cdot \frac{u_{i,j+1/2}^n - u_{i,j-1/2}^n}{\Delta y}) - \\ \frac{\Delta}{\rho_{i,j}^n} \left[\varepsilon^2 \left(\frac{p_{i+1/2,j}^n - p_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + \beta \left(\frac{p}{m} \right)_{i,j}^n \cdot \frac{m_{i+1/2,j}^n - m_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} \right) + \left(\frac{\mu m}{\lambda} \right)_{i,j}^n \cdot u_{i,j}^n \right],$$

$$\tilde{v}_{i,j}^n = v_{i,j}^n - \Delta t (u_{i,j}^n \cdot \frac{v_{i+1/2,j}^n - v_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + v_{i,j}^n \cdot \frac{v_{i,j+1/2}^n - v_{i,j-1/2}^n}{\Delta y}) -$$

$$\frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n} [\varepsilon^2 (\frac{P_{i,j+1/2}^n - P_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} + \beta (\frac{P}{m})_{i,j}^n \cdot \frac{m_{i,j+1/2}^n - m_{i,j-1/2}^n}{\Delta y}) + (\frac{\mu m}{\lambda})_{i,j}^n \cdot v_{i,j}^n],$$

где величины с дробными индексами относятся к границам ячейки и равны полусуммам значений в смежных ячейках; например, для горизонтальной составляющей скорости

$$\tilde{u}_{i+1/2,j}^n = \frac{\tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n}{2}.$$

Таким образом, на первом этапе, в предположении заторможенности жидкости, по известному на слое t^n распределению гидродинамических величин вычисляются значения скоростей \tilde{u}, \tilde{v} для центров крупных частиц.

II. Лагранжев этап

На данном этапе вычисляются эффекты переноса, учитывающие обмен между ячейками при их перестройке на прежнюю эйлерову сетку. Здесь находятся потоки массы ΔM^n через границы эйлеровых ячеек за время Δt . При этом предполагается [1-3 и др.], что вся масса жидкости переносится только за счет нормальной к границе ячейки составляющей скорости.

Уравнение неразрывности системы (1) в разностной форме можно записать следующим образом (в предположении, что поток жидкости через ячейку (i, j) направлен слева направо и снизу вверх):

$$(m \cdot h \cdot \rho)_{i,j}^{n+1} \cdot \Delta x \cdot \Delta y = (m \cdot h \cdot \rho)_{i,j}^n + \Delta M_{i-1/2,j}^n - \Delta M_{i+1/2,j}^n + \Delta M_{i,j-1/2}^n - \Delta M_{i,j+1/2}^n,$$

где формулы для нахождения потока масс ΔM^n имеют здесь следующий вид (например, для правой границы $(i + 1/2, j)$ ячейки (i, j)):

$$\Delta M_{i+1/2,j}^n = \langle \rho_{i+1/2,j}^n \rangle \cdot \langle \tilde{u}_{i+1/2,j}^n \rangle \cdot \langle m_{i+1/2,j}^n \rangle \cdot \langle h_{i+1/2,j}^n \rangle \cdot \Delta y \cdot \Delta t$$

и т.д. Знак $\langle \rangle$ обозначает значения физических величин на границе ячейки. Выбор этих величин имеет важное значение, так как сильно влияет на устойчивость и точность вычислений [1,2]. Рассмотрим два вида аппроксимаций:

а) Можно определять ΔM^n по формулам второго порядка точности, учитывающим направление потока. Рассмотрим, например, правую границу $(i + 1/2, j)$ ячейки (i, j) :

$$\text{если } \tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n > 0 \text{ и } \tilde{u}_{i+1/2,j}^n \equiv \tilde{u}_{i,j}^n + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right)_{i,j}^n \cdot \frac{\Delta x}{2} = \tilde{u}_{i,j}^n + \frac{\tilde{u}_{i+1,j}^n - \tilde{u}_{i-1,j}^n}{4} > 0, \text{ то}$$

$$\tilde{u}_{i+1/2,j}^n = \tilde{u}_{i,j}^n + \frac{\tilde{u}_{i+1,j}^n - \tilde{u}_{i-1,j}^n}{4}, \rho_{i+1/2,j}^n = \rho_{i,j}^n + \frac{\rho_{i+1,j}^n - \rho_{i-1,j}^n}{4},$$

$$m_{i+1/2,j}^n = m_{i,j}^n + \frac{m_{i+1,j}^n - m_{i-1,j}^n}{4},$$

$$\text{если } \tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n < 0 \text{ и } \tilde{u}_{i+1/2,j}^n \equiv \tilde{u}_{i+1,j}^n - \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right)_{i+1,j}^n \cdot \frac{\Delta x}{2} = \tilde{u}_{i+1,j}^n - \frac{\tilde{u}_{i+2,j}^n - \tilde{u}_{i,j}^n}{4} < 0, \text{ то}$$

$$\tilde{u}_{i+1/2,j}^n = \tilde{u}_{i+1,j}^n - \frac{\tilde{u}_{i+2,j}^n - \tilde{u}_{i,j}^n}{4}, \rho_{i+1/2,j}^n = \rho_{i+1,j}^n - \frac{\rho_{i+2,j}^n - \rho_{i,j}^n}{4},$$

$$m_{i+1/2,j}^n = m_{i,j}^n - \frac{m_{i+2,j}^n - m_{i,j}^n}{4}.$$

В противном случае, т.е.

$$\text{при } \tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n > 0 \text{ и } \tilde{u}_{i+1/2,j}^n \equiv \tilde{u}_{i,j}^n + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right)_{i,j}^n \cdot \frac{\Delta x}{2} = \tilde{u}_{i,j}^n + \frac{\tilde{u}_{i-1,j}^n - \tilde{u}_{i,j}^n}{4} < 0 \text{ или}$$

$$\text{при } \tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n < 0 \text{ и } \tilde{u}_{i+1/2,j}^n \equiv \tilde{u}_{i+1,j}^n - \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right)_{i+1,j}^n \cdot \frac{\Delta x}{2} = \tilde{u}_{i+1,j}^n - \frac{\tilde{u}_{i+2,j}^n - \tilde{u}_{i+1,j}^n}{4} > 0,$$

полагаем $\Delta M_{i+1/2,j}^n = 0$.

б) Формулы первого порядка точности для потока масс ΔM^n , также учитывающие направление потока, имеют следующий вид :

если $\tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i-1,j}^n > 0$, то

$$\tilde{u}_{i+1/2,j}^n = \frac{\tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n}{2}, \quad \rho_{i+1/2,j}^n = \rho_{i,j}^n, \quad m_{i+1/2,j}^n = \frac{m_{i,j}^n + m_{i+1,j}^n}{2}.$$

если $\tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n < 0$, то

$$\tilde{u}_{i+1/2,j}^n = \frac{\tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n}{2}, \quad \rho_{i+1/2,j}^n = \rho_{i+1,j}^n, \quad m_{i+1/2,j}^n = \frac{m_{i,j}^n + m_{i+1,j}^n}{2}.$$

Кроме перечисленных двух типов аппроксимаций возможны другие способы вычисления величин $\tilde{u}_{i+1/2,j}^n, \rho_{i+1/2,j}^n, m_{i+1/2,j}^n$, вытекающие из особенностей рассматриваемого течения.

Значения на границе для эффективной толщины пласта можно вычислять по формулам первого порядка точности $h_{i+1/2,j} = \frac{h_{i,j} + h_{i+1,j}}{2}$ или по формулам второго

порядка точности $h_{i+1/2,j} = \frac{h_{i+1,j} + 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{4}$. Здесь также возможны различные подходы.

III. Заключительный этап

На данном этапе происходит перераспределение массы жидкости по эйлеровым ячейкам и определяются поля давления и плотности в новый момент времени. Из разностного аналога уравнения неразрывности (1.1) выразим значение плотности для нового временного слоя t^{n+1} :

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n + \frac{\Delta M_{i-1/2,j}^n - \Delta M_{i+1/2,j}^n + \Delta M_{i,j-1/2}^n - \Delta M_{i,j+1/2}^n}{\Delta x \cdot \Delta y \cdot (m \cdot h)_{i,j}^n}.$$

Баротропное уравнение состояния $\rho = \rho(p)$ позволяет вычислить новое значение давления в ячейке (i, j) ,

$$p_{i,j}^{n+1} = p(\rho_{i,j}^{n+1}),$$

где $p = p(\rho)$ - функция, обратная к $\rho = \rho(p)$. В конце заключительного этапа вычислений полагаем

$$u_{i,j}^n = \tilde{u}_{i,j}^n, \quad v_{i,j}^n = \tilde{v}_{i,j}^n.$$

Вычислительный цикл, таким образом, закончен. В дальнейшем вся процедура повторяется сначала для следующего момента времени, т.е. для t^{n+2} и т.д. Можно

показать консервативность разностных схем метода крупных частиц (выполнение закона сохранения массы для области интегрирования) и др.

Рассмотрим постановку начальных и граничных условий:

а) На внешней границе области интегрирования может быть поставлено условие непроницаемости:

$$\tilde{u}_{N+1/2,j}^n = 0, \tilde{v}_{N+1,j}^n = \tilde{v}_{N,j}^n.$$

Считаем $\tilde{u}_{N+1/2,j}^n = \frac{\tilde{u}_{N,j}^n + \tilde{u}_{N+1,j}^n}{2}$. Без ограничения общности можно положить, что

$$\rho_{N+1,j}^n = \rho_{N,j}^n, \mu_{N+1,j}^n = \mu_{N,j}^n, \lambda_{N+1,j}^n = \lambda_{N,j}^n, m_{N+1,j}^n = m_{N,j}^n, (\varepsilon^2)_{N+1,j}^n = (\varepsilon^2)_{N,j}^n,$$

$$u_{N+1,j}^n = -u_{N,j}^n, v_{N+1,j}^n = v_{N,j}^n, p_{N+1,j}^n = p_{N,j}^n.$$

Для разностных схем второго порядка точности необходимо задавать два слоя фиктивных ячеек [1-3]. Используя центральные разности по пространственным переменным, для второго слоя ячеек можно записать следующее:

$$u_{N+2,j}^n = -u_{N-1,j}^n, v_{N+2,j}^n = v_{N-1,j}^n, m_{N+2,j}^n = m_{N-1,j}^n, p_{N+2,j}^n = p_{N-1,j}^n.$$

б) Рассмотрим теперь условие свободного протекания на внешней области интегрирования:

$$\tilde{u}_{N-1,j}^n = \tilde{u}_{N,j}^n,$$

$$\tilde{v}_{N-1,j}^n = \tilde{v}_{N,j}^n.$$

Полагая на первом слое фиктивных ячеек

$$\rho_{N+1,j}^n = \rho_{N,j}^n, \mu_{N+1,j}^n = \mu_{N,j}^n, \lambda_{N+1,j}^n = \lambda_{N,j}^n, m_{N+1,j}^n = m_{N,j}^n, (\varepsilon^2)_{N+1,j}^n = (\varepsilon^2)_{N,j}^n,$$

$$u_{N+1,j}^n = u_{N,j}^n, v_{N+1,j}^n = v_{N,j}^n, p_{N+1,j}^n = p_{N,j}^n,$$

получаем для второго слоя фиктивных ячеек следующее:

$$u_{N-2,j}^n = 2 \cdot u_{N,j}^n - u_{N-1,j}^n, v_{N-2,j}^n = 2 \cdot v_{N,j}^n - v_{N-1,j}^n,$$

$$m_{N-2,j}^n = 2 \cdot m_{N,j}^n - m_{N-1,j}^n, p_{N-2,j}^n = 2 \cdot p_{N,j}^n - p_{N-1,j}^n.$$

в) Рассмотрим граничные условия, связанные с заданием расхода жидкости на границе области интегрирования.

Пусть, например, для ячейки (N, j) задан объемный расход $q(t)$ жидкости, вытекающей через ее правую сторону. Тогда разностную формулировку этого условия можно представить в следующем виде: $\Delta y \cdot h \cdot m \cdot \tilde{u}_{N+1/2,j}^n = q(t)$ или, обозначая

$$\varphi = q(t) / (\Delta y \cdot h \cdot m), \text{ получаем } \tilde{u}_{N+1/2,j}^n = \varphi(t).$$

Полагая для фиктивных ячеек

$$\rho_{N+1,j}^n = \rho_{N,j}^n, \mu_{N+1,j}^n = \mu_{N,j}^n, \lambda_{N+1,j}^n = \lambda_{N,j}^n, m_{N+1,j}^n = m_{N,j}^n,$$

$$(\varepsilon^2)_{N+1,j}^n = (\varepsilon^2)_{N,j}^n, u_{N+1,j}^n = -u_{N,j}^n, v_{N+1,j}^n = v_{N,j}^n, p_{N+1,j}^n = p_{N,j}^n,$$

$$u_{N+2,j}^n = -u_{N-1,j}^n, v_{N+2,j}^n = v_{N,j}^n, m_{N+2,j}^n = m_{N-1,j}^n,$$

получаем значения давления во втором слое фиктивных ячеек:

$$p_{N+2,j}^n = p_{N-1,j}^n - \frac{4 \cdot \Delta x}{\Delta t} \cdot \left(\frac{\rho}{\varepsilon^2} \right)_{N,j}^n \cdot \varphi(t).$$

Постановка граничного условия заданного объемного дебита на стенке скважины формулируется точно так же, как и в случае задания объемного расхода на

границе области. Полученные соотношения для фиктивных слоев ячеек позволяют единообразно проводить вычисления на границе области интегрирования.

В качестве модельной рассматривалась следующая пространственно-одномерная задача, допускающая аналитическое решение в двух различных постановках [5].

Случай 1. В полубесконечном пласте постоянной толщины $h = const$ и ширины B начальное пластовое давление всюду постоянно и равно p_k . На галерее (при $x = 0$) давление снижено до p_g и в дальнейшем поддерживается постоянным. Давление в любой точке x и в любой момент времени t находится решением уравнения пьезопроводности [5] и выглядит так:

$$p(x, t) = p_g + (p_k - p_g) \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\gamma t}}\right),$$

где γ - коэффициент пьезопроводности пласта.

При проведении численных экспериментов методом крупных частиц по обоим моделям условие на бесконечности $p(x, t) = p_k$ при $x \rightarrow \infty$ заменялось условием открытой границы:

$$\begin{aligned} u_{L+1}^n &= u_L^n & (\text{по модели А. Дарси}), \\ \tilde{u}_{L+1}^n &= \tilde{u}_L^n & (\text{по модели С.А. Христиановича}). \end{aligned} \quad (3)$$

Если применить схему второго порядка точности для модели А. Дарси,

$$\frac{k_L}{\mu(p_L^n)} \frac{p_{L+1}^n - p_{L-1}^n}{2 \cdot \Delta x} = \frac{k_{L+1}}{\mu(p_{L+1}^n)} \frac{p_{L+2}^n - p_L^n}{2 \cdot \Delta x}.$$

При использовании условия открытой границы (3.2) в модели С.А. Христиановича

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{L+1}^n - u_{L+1}^n - \Delta t [u_{L+1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{L+1}^n] - \frac{\Delta t}{\rho_{L+1}^n} \{(\varepsilon^2)_{L+1} \cdot [(\frac{\partial \varphi}{\partial x}) + \beta \frac{p}{m} (\frac{\partial m}{\partial x})]_{L+1}^n + (\frac{\mu m}{\lambda} u)_{L+1}^n\} = \\ \tilde{u}_L^n - u_L^n - \Delta t [u_L^n \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_L^n] - \frac{\Delta t}{\rho_L^n} \{(\varepsilon^2)_L \cdot [(\frac{\partial \varphi}{\partial x}) + \beta \frac{p}{m} (\frac{\partial m}{\partial x})]_L^n + (\frac{\mu m}{\lambda} u)_L^n\}. \end{aligned}$$

Отсюда, полагая $k_{L+1}^n = k_L^n$, $\mu_{L-1}^n = \mu_L^n$, $(\varepsilon^2)_{L+1} = (\varepsilon^2)_L$, $\lambda_{L+1}^n = \lambda_L^n$, $\beta_{L+1} = \beta_L$, получаем следующий способ задания фильтрационных величин в фиктивных ячейках:

$$\begin{aligned} p_{L+1}^n &= p_L^n, p_{L+2}^n = 2p_L^n - p_{L-1}^n \quad (\text{модель А. Дарси}), \\ \rho_{L+1}^n &= \rho_L^n, p_{L+1}^n = p_L^n, p_{L+2}^n = 2p_L^n - p_{L-1}^n, m_{L+1}^n = m_L^n, m_{L+2}^n = 2m_L^n - m_{L-1}^n, \\ u_{L-1}^n &= u_L^n, u_{L+2}^n = 2u_L^n - u_{L-1}^n \quad (\text{модель С.А. Христиановича}). \end{aligned}$$

При проведении численных экспериментов характерные параметры по обоим моделям были следующими:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 10^3 \text{ кг/м}^3, p_0 = 10 \text{ МПа}, \mu_0 = 10^{-3} \text{ Па*с}, L_0 = 10 \text{ м}, (\varepsilon^2)_0 = 10^{-8}, \\ \lambda_0 &= 10^{-3} \text{ м}^2, k_0 = 10^{-11} \text{ м}^2, t_0 = 10^3 \text{ с}. \end{aligned}$$

Точность численных решений исследовалась в следующем диапазоне исходных данных:

$$\begin{aligned} 0,5 \cdot p_0 \leq p_k \leq 5,00 \cdot p_0; 0,55 \cdot p_k \leq p_g \leq 1,00 \cdot p_k; 0,01 \cdot k_0 \leq k \leq k_0; \\ 0,010 \cdot (\varepsilon^2)_0 \leq \varepsilon^2 \leq 1,00 \cdot (\varepsilon^2)_0; 0,20 \cdot t_0 \leq t \leq 250 \cdot t_0. \end{aligned} \quad (4)$$

В этом диапазоне проводилось сравнение численных и аналитических решений.

На рис. 1-8 по горизонтальной оси отложены X^* - безразмерные расстояния до галереи, а по вертикальной оси отложены $P^* = p/p_0$ - значения безразмерного пластового давления. На рис. 1-8 представлены графики поля давления численных решений для модели С.А. Христиановича (штриховые линии), модели А. Дарси (штрихпунктирные линии) и аналитического решения (сплошные линии) в последовательные моменты времени (штрихпунктирные линии на рис. 1-8 полностью совпадают со штриховыми линиями).

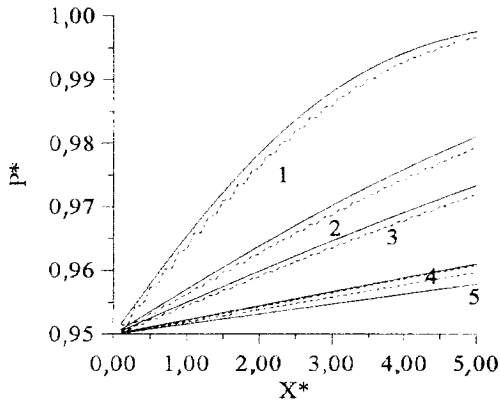


Рис. 1. Профили безразмерного давления в моменты времени:

$t_1 = 1,0; t_2 = 5,0; t_3 = 10,0; t_4 = 50,0; t_5 = 100,0$
при

$p_k = 1; p_g = 0,95; \beta = 0,60; \varepsilon^2 = 1,0;$

$\lambda = 0,10; k = 0,1; m = 0,30; \mu = 1,00;$

$h = 1,0; B = 1,0; \beta_{jd.} = 0,1;$

$\beta_{sred.} = 0,001$

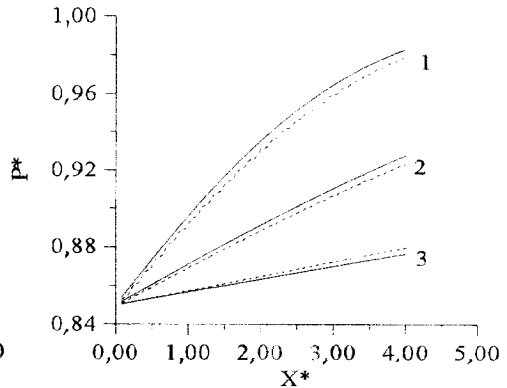


Рис. 2. Графики безразмерного давления в моменты времени:

$t_1 = 1,0; t_2 = 5,0; t_3 = 50,0$

при

$p_k = 1; p_g = 0,85; \beta = 0,20; \varepsilon^2 = 1,0;$

$\lambda = 0,10; k = 0,1; m = 0,30; \mu = 1,00;$

$h = 1,0; B = 1,0; \beta_{jd.} = 0,1; \beta_{sred.} = 0,001$

Предложенная численная модель интегрирования уравнения С.А. Христиановича и вычисления по модели А. Дарси показали высокую точность расчетов методом крупных частиц при сравнении с аналитическими решениями. Так, при всех вариантах исходных данных из (4) относительные ошибки численных решений по обеим моделям не превышали 1,5 %. При малых моментах времени, например при $t = 0,20$, наблюдается значительное отклонение численного решения по модели С.А. Христиановича от точного решения, которое объясняется наличием больших градиентов давления в ячейках, расположенных вблизи галереи. При больших временных интервалах, например, при $t = 10,0$, численное решение по модели С.А. Христиановича практически совпадает с решением по модели А. Дарси. Это также вполне физично и объясняется относительно незначительными изменениями пористости.

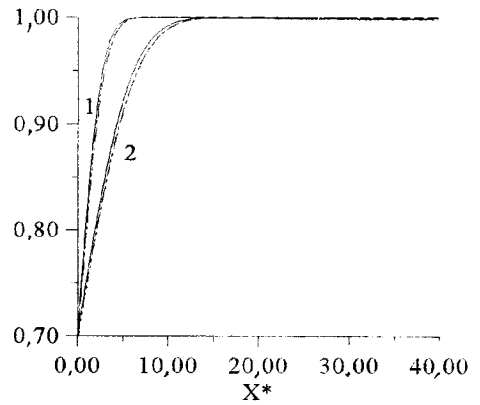
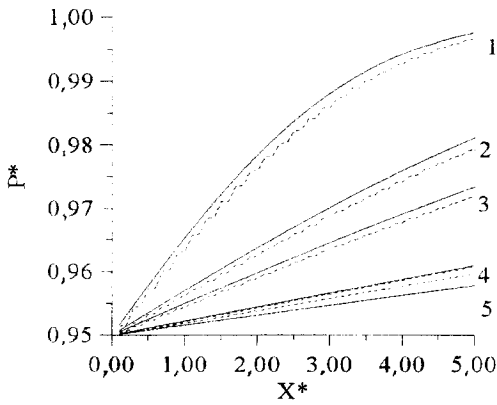


Рис. 3. Профили безразмерного давления в моменты времени:

$t_1 = 1,0; t_2 = 5,0; t_3 = 10,0; t_4 = 50,0; t_5 = 100,0$

при

$p_k = 1, p_g = 0,95; k = 0,1; \varepsilon^2 = 0,5;$

$\lambda = 0,20; m = 0,30; \mu = 1,0; h = 1,0;$

$B = 1,0; \beta_{jd.} = 0,1; \beta_{sred.} = 0,001$

Рис. 4. Графики безразмерного давления в моменты времени:

$t_1 = 10,0; t_2 = 50,0$

при

$p_k = 1; p_g = 0,70; \beta = 0,60; \varepsilon^2 = 0,80;$

$\lambda = 0,0125; k = 0,01; m = 0,25; \mu = 3,70;$

$h = 1,0; B = 1,0; \beta_{jd.} = 0,05; \beta_{sred.} = 0,001$

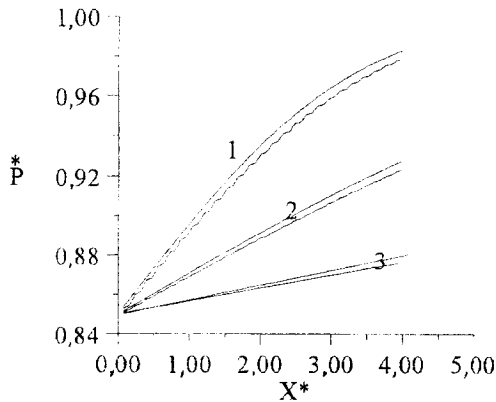


Рис. 5. Графики безразмерного давления в моменты времени: $t_1 = 1,0; t_2 = 5,0; t_3 = 50,0$

при

$p_k = 1, p_g = 0,85; k = 0,1; \varepsilon^2 = 0,50; \lambda = 0,20; m = 0,30;$

$\mu = 1,0; h = 1,0; B = 1,0; \beta_{jd.} = 0,1; \beta_{sred.} = 0,001$

Случай 2. В таком же полубесконечном пласте, что и в случае 1, в момент времени $t = 0$ пущена в эксплуатацию галерея с постоянным дебитом Q_0 . Требуется определить значение давления на расстоянии x от галереи в любой момент времени t . Данная задача имеет аналитическое решение [5]:

$$p(x, t) = p_g + \frac{\mu W_0}{k} \left[x \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\gamma t}} \right) \right) + \frac{2\sqrt{\gamma t}}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \exp \left(-\frac{x^2}{4\gamma t} \right) \right) \right]$$

где $p_g(t) = p_k - \frac{Q_0 \mu 2 \sqrt{\lambda l}}{B h k \sqrt{\pi}}$, w_1 - скорость фильтрации на галерее. Характерные параметры задачи были выбраны следующими:

$$\rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3, p_0 = 10 \text{ МПа}, L_0 = 10 \text{ м}, (\varepsilon^2)_0 = 10^{-8}, \lambda_0 = 10^{-3} \text{ м}^2, \\ k_0 = 10^{-11} \text{ м}^2, t_0 = 10^3 \text{ с}, Q_0 = 1 \text{ м}^3/\text{с}$$

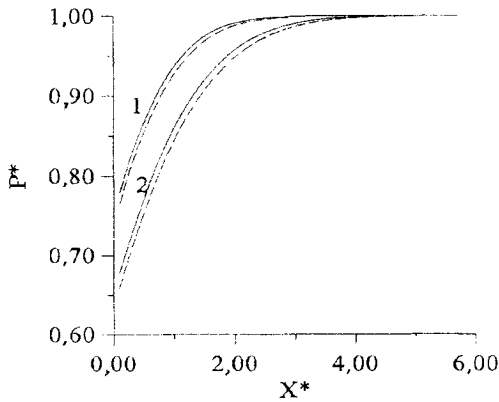


Рис. 6. Профили безразмерного давления в моменты времени: $t_1 = 5,0; t_2 = 10,0$

при
 $p_k = 1; Q_0 = 0,05; \beta = 0,15; \varepsilon^2 = 0,20;$
 $\lambda = 0,05; k = 0,01; m = 0,27; \mu = 5,57;$
 $h = 10,0; B = 10,0; \beta_{jd} = 0,05;$
 $\beta_{sred.} = 0,001$

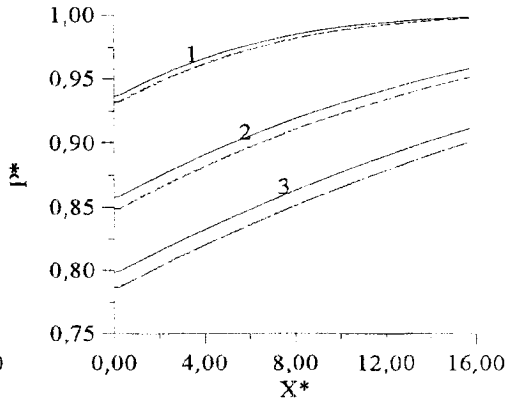


Рис. 7. Профили безразмерного давления в моменты времени:

$t_1 = 10,0; t_2 = 50,0; t_3 = 100,0$
 при
 $p_k = 1; Q_0 = 0,05; \beta = 0,35; \varepsilon^2 = 0,60;$
 $\lambda = 0,5; k = 0,3; m = 0,27;$
 $\mu = 5,57; h = 10,0; B = 10,0;$
 $\beta_{jd} = 0,05; \beta_{sred.} = 0,001$

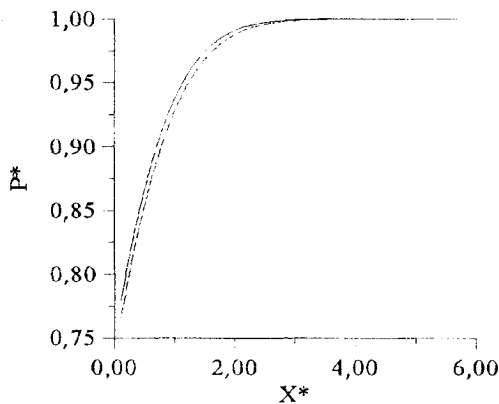


Рис. 8. Распределение безразмерного давления в момент времени: $t = 5,0$ при

$p_k = 1; \beta = 0,15; Q_0 = 0,05; \varepsilon^2 = 0,20; \lambda = 0,05; k = 0,01; m = 0,27;$
 $\mu = 5,57; h = 10,0; B = 10,0; \beta_{jd} = 0,05; \beta_{sred.} = 0,001$

Численные расчеты, проведенные при использовании обонх модельных уравнений движения в случае, когда на галерее задавалось условие заданного объемного дебита, показали, что относительная ошибка численных решений не превышает 3%.

Библиографический список

1. Давыдов Ю.М. Крупных частиц метод. - В кн.: Математический энциклопедический словарь. - М.: Советская энциклопедия, 1988. - С. 303-304.
2. Davydov Yu. M. Large-Particle Method. - In.: Encyclopaedia of Mathematics. Vol.5.- Dordrecht/Boston/London: Kluwer academic publishers, 1990. -P. 358-360.
3. Давыдов Ю.М. и др. Численное исследование актуальных проблем машиностроения и механики сплошных и сыпучих сред методом крупных частиц. Т.1-Т.5 / Под ред. Ю.М. Давыдова. - М.: НАИИ, 1995. - 1658 с.
4. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. - М.: Недра, 1982. - 407 с.
5. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. - М.: Недра, 1993. - 416 с.
6. Жуковский Н.Е. Просачивание воды через плотины. // Полное собр. соч. - М., 1937. - Т. 7. - С. 325-363.
7. Христианович С.А. Избранные работы. Речная гидравлика. Теория фильтрации. Аэродинамика и газовая динамика. Горное дело. Теория пластичности. Энергетика. - М.: Наука - МФТИ, 1998. - 336 с.
8. Христианович С.А. Движение грунтовых вод, не следующих закону Дарси //ПММ. 1940. - Т. IV. -Вып. I. - С. 39-52.
9. Христианович С.А. Неустановившееся течение жидкости и газа в пористой среде при резких изменениях давления во времени или больших градиентах пористости // ФТПРПИ. -1985. - №1. - С. 3-18.
10. Христианович С.А. Об упругом режиме эксплуатации нефтяного месторождения // ФТПРПИ. -1990. - №1.
Получено 10.04.2000