УДК 519.6, 519.95

Ю.М. Давыдов, И.М. Давыдова

Институт машиностроительной механики

СОВРЕМЕННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ С УМЕНЬШЕНИЕМ ПОЛНОЙ ВАРИАЦИИ НА РЕШЕНИИ ДЛЯ АКТУАЛЬНЫХ ЗАДАЧ МАШИНОСТРОЕНИЯ

Abstract

The modern method of high order approximation difference scheme construction is described. ***T****otal* ***V****ariation* ***D****iminishing (TVD) Schemes conception is introduced. Principles and techniques of TVD-schemes construction is described. Large-Particles Method TVD-scheme is suggested.*

Современные электронные вычислительные машины являются в руках исследователей эффективными средствами для математического моделирования сложных задач машиностроения. У нас в стране и за рубежом широко распространен метод крупных частиц [11, 13, 57 и др.], который позволяет в прямом смысле ставить вычислительный эксперимент: исследовать принципиально новые физические явления без априорной информации о структуре решения [1, 3-4, 25, 32, 38-43, 50, 52, 63 и др.]. Метод крупных частиц основывается на фундаментальной современной нелинейной теории разностных схем, ряд важных разделов которой разработан автором метода и его научной школой [3, 6-8, 10, 12, 14, 17, 19, 22-28, 33, 37 и др.]. Многочисленными исследователями в НИИ и КБ часто применяется одна из базовых разностных схем первого порядка точности метода крупных частиц [11, 13, 57 и др.], нашедшая широкое применение в вычислительной практике во многих отраслях машиностроения [18, 20, 30 и др.], в том числе в области парашютостроения [15-18, 49 и др.], а также в области авиационного и ракетного двигателестроения [4, 18-21, 25-26, 33, 47-48 и др.].

Метод крупных частиц вобрал в себя ряд удачных физически ясных алгоритмических решений. Это позволило успешно применять его даже не-специалистам в области вычислительной математики – конструкторам и инженерам отраслевых НИИ и КБ в различных актуальных областях машиностроения [18 и др.], используя при этом простой и удобный в эксплуатации пакет прикладных программ КРУЧА (КРУпные ЧАстицы) [9].

Реализованные в методе крупных частиц принцип расщепления по физическим процессам и адекватный учет направлений распространения и уровня газодинамических возмущений допускают также, при необходимости, построение разностных схем метода повышенной точности.

1. Принципы построения УПВ-схем повышенной точности

В данной статье впервые в отечественной литературе вводится термин «УПВ-схемы»: разностные схемы с **у**меньшением **п**олной **в**ариации на решении.

Ранее автором метода крупных частиц и его учениками были разработаны разностные схемы повышенного порядка точности с использованием традиционных подходов. Они были успешно применены при решении ряда важных практических задач. В данной статье описывается построение УПВ-схем метода крупных частиц с помощью простого введения дополнительного корректирующего шага на заключительном этапе метода.

Англоязычное понятие УПВ-схемы (TVD-scheme: **T**otal **V**ariation **D**iminishing (TVD) Scheme) было введено A. Harten [58-59, 71] в конце 1981 г. – начале 1982 г. первоначально как принцип неувеличения полной вариации (в англоязычном варианте TVNI-принцип: **T**otal **V**ariation **N**on**I**ncreasing [58]) применительно к двухслойным численным схемам, аппроксимирующим скалярные законы сохранения вида

$$U_t + f(U)_x = 0\,, \tag{1}$$

в частности, явными соотношениями типа:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\cdot\left(\tilde{f}^{\,n}_{i+0,5} - \tilde{f}^{\,n}_{i-0,5}\right), \tag{2}$$

где i – индекс пространственной сетки с шагом Δx, содержащей I ячеек, $i = 1,2,..I;$ n – индекс временной сетки с шагом Δt по времени, $n = 0,1,\ 2,...N;$ $\tilde{f}^{\,n}_{i\pm 0,5}$ – некоторая аппроксимация потоков на боковых гранях $i\pm 0{,}5=(m\pm)$ двух соседних ячеек с индексами i и $i \pm 1$. С 1980-х годов название «TVD-схема» становится общеупотребительным [2, 51, 70] и входит в заголовки некоторых статей [69, 72]. Русскоязычный термин «УПВ-схема» впервые вводится в настоящей статье.

Для скалярных функций U в (1) полная вариация

$$TV = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right| dx \tag{3}$$

сохраняется на гладких решениях и уменьшается при наличии разрывов [58-59, 71-72]. Схемы обладают УПВ-свойством, если численный аналог (3)

$$TV = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\left|U_{i+1}^n - U_i^n\right|$$

не увеличивается для решений на следующем временном слое, то есть, если

$$TV\left(U_i^{n+1}\right) \le TV\left(U_i^n\right)$$

[58-59] .

Очевидно, такое свойство схем не дает развиваться нефизическим численным осцилляциям и обеспечивает не только устойчивость численной схемы, но и монотонность решения [2, 51, 58-59, 69-72].

Другими отличительными особенностями предложенных в 80-х – 90-х годах XX века эффективных разностных схем сквозного счета и численного эксперимента являются учет направлений распространения возмущений с помощью введения в алгоритмы построения расчетных схем неких приближенных решений одномерной задачи Римана о распаде произвольного разрыва в начальных данных и хорошая локализация вводимой консервативным образом численной диссипации в окрестности разрывов. При этом исторически выделились два подхода.

В первом, восходящем к работам по вычислительной математике 1950-х годов, когда еще не была создана современная теория нелинейных разностных схем, и положившем начало созданию разностных схем с использованием простейших физических представлений (например, алгоритма распада разрыва), дискретные начальные данные представляются непрерывным внутри каждой ячейки распределением, развитие которого во времени рассчитывается с помощью различных модификаций уравнений переноса для разрывного и гладкого течений [5].

Существенно, что повышение порядка аппроксимации достигалось здесь путем замены кусочно-постоянного распределения параметров в ячейках на кусочнолинейное или кусочно-параболическое [56], что фактически означало отход от чисто сеточного представления данных к локально непрерывному.

Возникшая необходимость решения неавтомодельной задачи о распаде разрыва в сочетании с поиском ответа на нетривиальный вопрос об определении приращений параметров на элементарных интервалах нижнего слоя была разрешена в работе [35] путем применения принципа минимальных значений производных (или приращений параметров) при построении разностных схем [35, 67]. Следует, однако, отметить, что при решении уравнений Эйлера на сильных разрывах схема Колгана [35] теряет монотонность. В силу этого в последующих работах [45 и др.], следуя [67], и в отличие от [35], для повышения порядка аппроксимации в схемах типа распада разрыва использовался монотонный алгоритм при определении приращений (*slope limiters* [67]):

$$\Delta U_{i-0,5} = \left\{ \begin{array}{l} 0, \qquad\qquad \text{при} \quad \Delta \mathrm{U}_i \cdot \Delta U_{i-1} \le 0; \\ \min\left(2\cdot\left|\Delta U_i\right|,\ 2\cdot\left|\Delta U_{i+1}\right|,\ \dfrac{\left|U_{i+0,5} - U_{i-1,5}\right|}{2} \right)\cdot \operatorname{sign}(\Delta U_i), \\ \qquad\qquad \text{при} \quad \Delta U_i \cdot \Delta U_{i-1} > 0, \end{array} \right\},$$

где

$$\operatorname{sign}(\Delta U_k) = \frac{\Delta \mathrm{U}_k}{\left|\Delta \mathrm{U}_k\right|}, \quad \Delta \mathrm{U}_k = U_{k+1} - U_k, \quad k{=}i, i-1/2, i \pm 1.$$

Второй подход можно представить как обобщение схемы предиктор-корректор, в которой на первом шаге находится монотонное решение, а на втором – оно корректируется с целью выделения разрывных решений, удовлетворяющих физическим условиям. При реализации второго подхода вначале с использованием односторонних разностей в алгоритмах первого порядка аппроксимации определяются значения потоков на границах введенных в рассмотрение расчетных ячеек. Затем эти потоки кор-ректируются с помощью конечно-разностных выражений, включающих в себя логику исключения численной диссипации (диффузии) всюду, где это только не приводит к усилению существующих или к появлению новых экстремумов.

Наиболее последовательно второе направление развивалось в работах J.P. Boris и D.L. Book (*Flux Corrected Transport – FCT* – алгоритмы [54-55]), затем B. Van Leer (*Monotone Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws – MUSCL*-схемы [68]), приложившего первоначально значительные усилия к построению разностных схем повышенной точности для алгоритмов распада разрыва.

Следующие два аспекта, по-видимому, можно выделить как наиболее существенные в обоих подходах.

Во-первых, фактической алгоритмической реализацией УПВ-свойства явилось применение нелинейных функций-ограничителей при определении средней на временном интервале величины потока на границе двух ячеек. Первоначально же эта функция была использована J.P.Boris'ом и D.L.Book'ом в FCT-алгоритме при ограничении величины потока $f^{\mathrm{corr}}_{i+0,5}$ (*flux limiters* [54]) на антидиффузионном этапе по формуле

$$f^{\mathrm{corr}}_{m+} = s\cdot \max\left\{0,\ \min\left[s\cdot(\delta F)_{m-},\ \left|f_{m+}\right|,\ s\cdot(\delta F)_{1+m+}\right]\right\}, \tag{4}$$

где

$$s = \operatorname{sign}\left(f_{i+0,5}\right), \quad (\delta \mathrm{F})_{m\pm} = \pm f_{i\pm1} \mp f_i .$$

Здесь f^{corr}_{m+} - скорректированное значение потока на границе между ячейками [54-55]. Функция-ограничитель в (4) обозначается как minmod*(a,b,c)* ***(min**imum **mod**ulus)* и равна наименьшему по величине аргументу со знаком *«+»,* если все аргументы положительны, или нулю, если присутствует отрицательная величина.

При модификации FCT-алгоритмов изменения касались главным образом антидиффузионного этапа: выбора вида корректирующих потоков, коэффициентов антидиффузии, форм ограничителей логического типа, позволявших обеспечить монотонность схем [31, 36, 55, 68]. Однако устранения недостатков базовой схемы SHASTA одним лишь выбором антидиффузионного алгоритма не получалось, и идея коррекции была распространена на ряд известных схем [51].

Во-вторых, в конце 1981 года A. Harten'ом была предложена [58-59] и осуществлена [71-72] удачная практическая реализация идеи, восходящей к работам Lax и Wendroff 1960-х годов и др. [44, 46, 60], об использовании матрицы Якоби

$$A = \frac{\partial f(U)}{\partial U}$$

в алгоритмах сквозного счета для повышения порядка аппроксимации в двухслойных разностных схемах. Матрица собственных векторов (правых) R для A, такая, что

$$R^{-1} \cdot A \cdot R = \Lambda \quad \text{или же} \quad A = R \cdot \Lambda \cdot R^{-1}$$

(где Λ – диагональная матрица, составленная из собственных чисел матрицы Якоби), была успешно применена для разрешения сразу нескольких трудных центральных задач конструирования схем повышенной точности. Используя предложенную в [58-59, 69-72] технику, величину потока $\widetilde{f}_{i+0,5}$ можно определить по соотношениям:

$$\widetilde{f}_{i+0,5} = \frac{1}{2} \cdot \left(f_i + f_{i+1}\right) + q_{i+0,5}; \tag{5}$$

$$q_{i+0,5} = -\frac{1}{2}\left|A\right|_{i+0,5} \cdot \Delta U_{i+0,5} = \frac{1}{2}\left[R \cdot \Phi(\alpha)\right]_{i+0,5}; \tag{6}$$

$$\Phi(\alpha)_{i+0,5} = \left(\Lambda \cdot R^{-1} \cdot \Delta U\right)_{i+0,5}, \tag{7}$$

где первые два слагаемых в правой части (5) соответствуют применению в (1)-(2) для аппроксимации $f(U)_x$ схемы в центральных разностях второго порядка точности по пространству и первого порядка точности по времени для U_t. Последнее слагаемое (6) в (5) вводится как раз для обеспечения второго порядка точности по времени при использовании двухслойного шаблона и минимально необходимой для устойчивого счета численной диссипации с одновременным устранением дисперсионных осцилляций, как известно, присущих центрально-разностным схемам [6-7, 10, 14, 19, 44, 46].

Таким образом, при конструировании схем повышенного порядка точности по необходимости стал использоваться переменный шаблон с нелинейным характером поправок для обеспечения монотонности решений и второго порядка точности $\mathrm{O}\left(\Delta t^2, \Delta x^2\right)$.

2. Техника построения УПВ-схем повышенной точности

До сих пор поиск наиболее эффективной алгоритмической реализации расчета конвективного члена в уравнениях газодинамики идет, по сути, путем эвристического перебора расчетных данных, получаемых по разным схемам. Например, уравнения Навье – Стокса не имеют вида (1) как из-за ненулевой правой части, так и из-за не-единственности определяющего нелинейного уравнения, и хорошее качество численного решения для них, по существу, ничем не обосновано, а лишь подтверждается результатами большого количества расчетов. В общем случае принцип

УПВ (3) не применим к расчету уже одиночных волн, сходящихся к центрам симметрии из-за усиления в них давления, или же к расчету течений с энерговыделением, например, с детонационными волнами.

Для разработки схем, сохраняющих хорошие качества плоских УПВ-схем, до настоящего времени применяются простые эвристические приемы, сводящиеся к добавлению членов искусственной диссипации q либо непосредственно соответствующих локально-плоской УПВ-схеме в (5), как это сделано в [34], либо путем использования разложений матриц, определяющих численную вязкость схем, например, в квадратичные и линейные полиномы по степеням газодинамической матрицы Якоби, как в [29], следуя [64, 68], так как необходимо обеспечить требуемую точность для цепочки разностных преобразований

$$\Delta f_{m+} = \left(A \cdot \Delta U\right)_{m+} = \left(R \cdot \Lambda \cdot R^{-1} \cdot \Delta U\right)_{m+} = \left[R \cdot \Phi(\alpha)\right]_{m+}.$$

В последнем из указанных выше двух подходов, с одной стороны, реализуется физически ясная идея, связанная с представлением параметров в ячейке как кусочно-непрерывных функций и относящая корректирующие поправки q не к граням, а к центрам ячеек. Это позволяет представить $q_{i+0,5} = 0,5 \cdot (q_i + q_{i+1})$ и провести более точные вычисления матриц в (6)-(7) по параметрам для центров ячеек, представляющих собой средние значения по объему ячейки, осуществляя, таким образом, расщепление вектора приращений среднего по поверхности ячеек потока на его составляющие в ячейках.

Дополнительно отметим, что здесь может использоваться предложенная в [64] техника расщепления вектора потока на гранях ячеек также в зависимости от знаков собственных чисел, что отражает влияние сеточно-характеристических методов и, в частности, обобщенных вариантов $\lambda -$схем Моретти [51].

Однако с другой стороны, значительный дополнительный объем вычислений для различных приемов расщепления q не сопровождается какими-то заметными преимуществами. Это снижает эффективность вычислений, привлекая внимание к более экономичным схемам с меньшим объемом матричных вычислений.

Суть же заключается в том, что для уравнений газовой динамики имеется всего три различных собственных значения $(\lambda_{1,2,3})$ матрицы Якоби. Эти значения и определяют три независимых измерения, которые используются в операторах преобразования от консервативных переменных U к характеристическим переменным решаемой задачи.

Несколько ранее было выяснено, что непосредственное использование характеристических переменных в окончательных выражениях для разностных схем чрезмерно усложняет (и соответственно удорожает ориентировочно в 3 – 5 раз) расчеты. В немалой степени это связано с необходимостью точного решения задачи о неединственности выбора базиса собственных векторов, соответствующих наличию кратных собственных значений газодинамической матрицы Якоби.

Вычислительная практика показала, что устранение характеристических преобразований в алгоритмах значительно удешевляет расчеты, а определение потоков по (5) обеспечивает точность (второго порядка), которая, как оказалось, незначительно отличается [см. 53, 61, 65-66, 69-70, 72] от формул для конкретных схем определения значений корректирующих потоков q, построенных в начале 80-х годов на основе привлечения различных исходных гипотез в работах P.L. Roe (1981, *Approximate Riemann Solvers* [62]), J.L. Steger и R.F. Warming (1981, *Flux Vector Splitting* [64]), B. Van Leer (1982, *MUSCL* [68]) и др. [51, 70].

Особенностью в (5) для схем Harten [58-59] является применение функции-ограничителя в отличие от (4) не непосредственно при вычислении значений физических потоков, а для разностных аналогов инвариантов Римана (или компонент α^l вектор-функции $\Phi(\alpha)$ в (7) [72]) в пространстве характеристических переменных [5, 58, 71] так, чтобы полные вариации уже сеточных аналогов инвариантов Римана и энтропийной функции не возрастали во времени. После чего матрица R используется для обратного преобразования вектор-функции приращений $\Phi(\alpha)$ в пространстве характеристических переменных в вектор-функции в пространстве консервативных переменных U, определяя значение корректирующих потоков $q_{i+0,5}$ в (6) и (5).

Тогда для уравнений одномерной газовой динамики имеем [71-72]:

$$U=[\rho,\ \rho\cdot u,\ \rho\cdot E]^T;$$

$$f(U)=[\rho\cdot u,\ \rho\cdot u^2+p,\ (\rho\cdot E+p)\cdot u]^T;$$

$$\alpha=R^{-1}\cdot\Delta U=\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\Delta p}{\rho\cdot a^2}+\frac{\rho}{a}\cdot\Delta u\right),\ \Delta\rho-\frac{\Delta p}{a^2},\ \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\Delta p}{\rho\cdot a^2}-\frac{\rho}{a}\cdot\Delta u\right)\right]^T\sim \tag{8}$$

$$\left[\Delta u+\frac{\Delta P}{\rho\cdot a},\ \Delta S,\ \Delta u-\frac{\Delta P}{\rho\cdot a}\right]^T,$$

где $p,\rho,u,E-$ давление, плотность, скорость и полная энергия в единице объема, соответственно; $a=\sqrt{\dfrac{\gamma\cdot p}{\rho}}$ – скорость звука для совершенного газа, а $\Delta S-$ изменение энтропии, соответствующее приращению энтропийной функции в коэффициенте α^l разложения решения U по собственным векторам (правым) матрицы R, которая в данном случае имеет вид [61, 69-70, 72]:

$$R=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ u+a & u & u-a\\ \left(E+\dfrac{p}{\rho}+u\cdot a\right) & \left(\dfrac{u^2}{2}\right) & \left(E+\dfrac{p}{\rho}-u\cdot a\right)\end{bmatrix};$$

$$R^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{\left(b_1-\dfrac{u}{a}\right)}{2} & \dfrac{\left(-b_1\cdot u+\dfrac{1}{a}\right)}{2} & \dfrac{b_2}{2}\\ 1-b_1 & u\cdot b_2 & -b_2\\ \dfrac{\left(b_1+\dfrac{u}{a}\right)}{2} & \dfrac{\left(-b_1\cdot u-\dfrac{1}{a}\right)}{2} & \dfrac{b_2}{2}\end{bmatrix}, \tag{9}$$

где

$$b_1=b_2\cdot\frac{u^2}{2},\quad b_2=\left(E+\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}\right)^{-1}.$$

Элементы вектора $\Phi(\alpha)$ в (6)-(7) для УПВ-схемы Harten [18, 58] предлагается вычислять по формулам [61]:

$$\left(\Phi^{l}_{i+0,5}\right)^{\text{upwind}} = \sigma\left(\lambda^{l}_{i+0,5}\right)\cdot\left(g^{l}_{i+1}+g^{l}_{i}\right)-\Psi\left(\lambda^{l}_{i+0,5}+\gamma^{l}_{i+0,5}\right)\cdot\alpha^{l}_{i+0,5}; \qquad (10)$$

$$\left(\Phi^{l}_{i+0,5}\right)^{\text{symmetry}} = 2\cdot\sigma\left(\lambda^{l}_{i+0,5}\right)\cdot\left(\Theta^{l}_{i+0,5}-\alpha^{l}_{i+0,5}\right); \qquad (11)$$

$$\begin{vmatrix}\alpha^{(1)}_{i+0,5}\\ \alpha^{(2)}_{i+0,5}\\ \alpha^{(3)}_{i+0,5}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\dfrac{(aa+bb)}{2}\\ \Delta\rho_{m+}-aa\\ \dfrac{aa-bb}{2}\end{vmatrix}, \qquad (12)$$

где

$$aa=b_2\cdot\left[\frac{u^2}{2}\cdot\Delta\rho_{m+}-u\cdot\Delta(\rho\cdot u)_{m+}+\Delta(\rho\cdot E)_{m+}\right]\equiv\frac{\Delta p}{a^2};\; bb=\frac{1}{c}\cdot\left[\Delta(\rho\cdot u)_{m+}-u\cdot\Delta\rho_{m+}\right]\equiv\frac{\rho}{a}\cdot\Delta u;$$

$$\gamma^{l}_{i+0,5}=\sigma\left(\lambda^{l}_{i+0,5}\right)\cdot\begin{cases}\dfrac{g^{l}_{i+1}-g^{l}_{i}}{\alpha^{l}_{i+0,5}}, & \alpha^{l}_{i+0,5}\neq 0;\\ 0, & \alpha^{l}_{i+0,5}\equiv 0;\end{cases}$$

$$\sigma(z)=\frac{1}{2}\cdot\left[\Psi(z)-\frac{\Delta t}{\Delta x}\cdot z^2\right];$$

$$\Psi(z)=\begin{cases}|z|, & |z|\geq\delta\\ \dfrac{\left(z^2+\delta^2\right)}{2\delta}, & |z|<\delta\end{cases};$$

$\lambda^{(1)}_{i+0,5}=(u+a)_{i+0,5}$, $\lambda^{(2)}_{i+0,5}=(u)_{i+0,5}$, $\lambda^{(3)}_{i+0,5}=(u-a)_{i+0,5}$ – собственные числа матрицы Якоби,

$$A=\frac{\partial f(U)}{\partial U},$$

а оставшиеся величины в (10)–(12) определяются из следующих соотношений:

$$g^{l}_{k}=\min\operatorname{mod}\left(\alpha^{l}_{k-0,5},\alpha^{l}_{k+0,5}\right);$$
$$k=i,i+1; \qquad (13)$$
$$\Theta^{l}_{i+0,5}=g^{l}_{i}+g^{l}_{i+1}-\alpha^{l}_{i+0,5}.$$

Другие нелинейные функции, выполняющие ту же роль, что и (13) для (10) и (11), могут быть представлены в следующем виде [19]:

$$c=\alpha^{l}{}_{i-0,5};\qquad d=\alpha^{l}{}_{i+0,5};$$

либо

$$q^{l}_{i}=\frac{\left(c^2+\delta\right)\cdot d+\left(d^2+\delta\right)\cdot c}{c^2+d^2+2\cdot\delta},\qquad 10^{-7}\leq\delta\leq 10^{-5}; \qquad (14)$$

либо

$$q^{l}_{i}=s\cdot\max\left[0,\ \min\left(2\cdot|d|,\ s\cdot c\right),\ \min\left(|d|,\ 2\cdot s\cdot c\right)\right];$$
$$\text{s = sign(d)}; \qquad (15)$$

либо

$$q_i^l = \min\bmod\left(2\cdot c,\ \ 2\cdot d,\ \ \frac{c+d}{2}\right);$$

или (16)

$$q_i^l = \min\bmod\left(2\cdot c,\ \ 2\cdot \mathrm{d},\ \ 2\cdot a,\ \ \frac{\mathrm{c}+\mathrm{a}}{2}\right).$$

3. УПВ-схема метода крупных частиц

Как известно, в рассматриваемом методе переход с одного временного слоя на другой осуществляется путем проведения трех этапов: эйлерова, лагранжева и заключительного [11, 13, 57 и др.]. Для удобства и краткости изложения в данном разделе объединим лагранжев и заключительный этапы и будем считать, что при конструировании разностных схем метода крупных частиц повышенного порядка точности переход от времени t к времени $t+\Delta t$ выполняется в два этапа. На первом этапе используется некоторая схема в переменных Лагранжа (расчет в локально-лагранжевых координатах). На втором этапе осуществляется пересчет параметров на исходную эйлерову сетку, что соответствует одной из многих возможных трактовок метода [17 и др.].

Многолетние разносторонние исследования разностных схем метода крупных частиц (результаты которых отражены, например, в монографии [18]) показали, что построение схем повышенной точности для данного метода целесообразно проводить согласованно для пространственных и временных координат с учетом дополнительных требований относительно полной консервативности, энтропийности и монотонности схем.

Подавление осцилляций, порождаемых применением в алгоритме метода схем второго и выше порядков точности по пространственной координате, первоначально могло осуществляться, например, путем введения надлежаще подобранных членов искусственной диссипации на заключительном этапе (см. [10, 14], а также главы 4 и 9 в монографии [18]). Для базовых разностных схем метода первого порядка точности вполне достаточно одного лишь рационального управления величиной аппроксимационной вязкости схем метода при обоснованном использовании значений скоростей, вычисленных на предыдущем (эйлеровом) этапе для определения потоков через границы ячеек (см. главы 9 и 15 в монографии [18]).

Во многих алгоритмах метода крупных частиц использовались устойчивые монотонные разностные схемы первого порядка точности по времени. Применение схем повышенной точности по пространственной координате с сохранением точности $\sim \mathrm{O}(\Delta t)$ по времени сопровождалось, как правило, развитием явлений неустойчивости при продвижении решений по временным шагам, что явилось одним из побуждающих факторов использования неявных схем на эйлеровом этапе (см. главы 5, 9, 15, 22 в [18]).

В главе 15 монографии [18] показано, что применение полунеявных схем метода позволяет определять промежуточные значения давления $\tilde{p}_i^{n+1}$ с точностью $\sim \mathrm{O}(\Delta t^2)$ и обеспечивать необходимую устойчивость счета. Особо было отмечено, что существенного (почти на порядок) повышения точности и устойчивости можно добиться при использовании полей давления ($\tilde{p}_{i\pm0,5}^{n+1}$), вычисленных не в центрах ячеек, а на их границах (см. стр. 972 в главе 15 монографии [18]). Тем не менее суммарная точность оставалась $\sim \mathrm{O}(\Delta t, \Delta x)$ из-за использования линейных схем первого порядка точности при расчете конвективных членов.

Как показано в главе 19 монографии [18], разностный оператор конвективных членов в методе крупных частиц может быть представлен в виде

$$\left\langle div\left(U\cdot\overline{W}\right)\right\rangle_i^n\cdot\Delta V=\sum_k\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\left(U\cdot W_k\right)_{i+1}\cdot F_{(m+)_k}-\left(U\cdot W_k\right)_{i-1}\cdot F_{(m-)_k}}{2}+\\(W_k)_i\cdot\dfrac{\left(U\right)_{i+1}\cdot F_{(m+)_k}-\left(U\right)_{i-1}\cdot F_{(m-)_k}}{2}-\\\dfrac{\left(W_k\right)_{(mo+)_k}+\left(W_k\right)_{(mo-)_k}}{2}\cdot\\\left[\left(U\right)_{(mo+)_k}-\left(U\right)_{(mo-)_k}\right]\cdot F_{m_k}\end{array}\right\},\tag{17}$$

где

$$m_k=i+\frac{sign\left(W_k\right)}{2};\qquad m\pm=i\pm 0{,}5;$$

$$(mo\pm)_k=(m\pm)_k+\frac{\mathrm{sign}\left(\mathrm{W_k}\right)}{2}.$$

Здесь W_k – проекция вектора скорости $\boldsymbol{W}$ на x_k-е координатное направление, ΔV – объем, а F_m – площадь m-й грани ячейки. Последние два члена в конструкции разностного оператора (17), по существу, и определяют наличие диссипативных членов, обеспечивающих не только устойчивость счета, но и точность $\sim \mathrm{O}\left(\Delta x\right)$.

С учётом выражения (17) для потока $\tilde{f}_{i+0,5}$ из (5) получаем

$$\tilde{f}_{i+0,5}^n=\frac{1}{2}\cdot\left[f_{i+1}+f_i-\left|W_k\right|_{mo+}\cdot\left(U_{i+1}-U_i\right)\right],\tag{18}$$

где корректирующий поток –

$$q_{i+0,5}^n=-\frac{1}{2}\cdot\left|W_k\right|_{mo+}\cdot\left(U_{i+1}-U_i\right).\tag{19}$$

Сопоставляя (19) с (6)–(7), можно заключить, что для обеспечения точности $\sim \mathrm{O}\left(\Delta t,\Delta x^2\right)$ в (18) следует вместо (19) использовать (6)–(7).

Алгоритм метода крупных частиц тогда примет следующий вид:

- эйлеров этап

$$\left(\tilde{U}_i^n\right)^I=\left(U_i^n\right)^I-\frac{\Delta t}{\rho_i^n}\cdot\sum_k\frac{\left(f_{i+1}^n\right)^I-\left(f_{i-1}^n\right)^I}{2\cdot\Delta x_k};\tag{20}$$

$$U^I=\left[u,\ E\right]^T;$$

$$f(U)^I=\left[p,p\cdot u\right]^T;$$

- лагранжев этап

$$(\Delta M)_{(m+)_k}^n=\frac{\left(f\right)_i^n+\left(f\right)_{i+1}^n}{2}\cdot F_{(m+)_k};\tag{21}$$

- заключительный этап

а) $$\frac{\tilde{U}_i^{n+1}-\tilde{U}_i^n}{\Delta t}=-\sum_k\frac{\Delta M_{(m+)_k}^n-\Delta M_{(m-)_k}^n}{\Delta x_k};\tag{22}$$

б) $$U_i^{n+1}=\tilde{U}_i^{n+1}-\Delta t\cdot\sum_k\frac{q_{m+}^n-q_{m-}^n}{\Delta x_k}.\tag{23}$$

Отметим, что использование на лагранжевом этапе величин с «волнами», полученных на эйлеровом этапе, приводит к большему «размазыванию» разрывов. Это понятно, так как при определении значений q_m следует использовать значения приращений и параметры (при вычислении матриц) не с нижнего слоя, а после выполнения шага (22). В этом случае вместо $q\left(U^n\right)^n_{m+}$ вычисляются значения $q\left(\widetilde{U}^{n+1}\right)^n_{m+}$.

Библиографический список

1. Акжолов М.Ж. Исследование методом Давыдова обтекания полупроницаемого обратного конуса // Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред: Матер. III междун. конгресса – М.: НАПН РФ, 2000. – С. 111.
2. Андерсон В., Таннехиллб Дж., Плеттер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2 т. – М.: Мир, 1990. – 728 с.
3. Бормашенко Г.В. Вычислительные пространства Давыдова в задачах нефтегазового комплекса // Нефть и газ 2003. – М.: Мин-во образования Российской Федерации, Рос. гос. ун-т нефти и газа им. И.М. Губкина, 2003. – С. 52, 67, б.
4. Бояршинов М.Г., Харченко А.В. Сравнение результатов моделирования методом крупных частиц Давыдова движения газовой струи в трехмерной и двумерной постановках // Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред: Матер. III междун. конгресса – М.: НАПН РФ, 2000. – С. 26.
5. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
6. Давыдов Ю.М. Исследование устойчивости разностных схем на границах расчётной области методом дифференциальных приближений // Доклады академии наук СССР. – 1979. – Т. 244. – № 6. – С. 1298–1302.
7. Давыдов Ю.М. Структура аппроксимационной вязкости // Доклады академии наук СССР. – 1979. – Т. 245. – № 4. – С. 812–815.
8. Давыдов Ю.М. Многопараметрические схемы расщепления для решения пространственно-трёхмерных нестационарных задач // Доклады академии наук СССР. – 1979. – Т. 247. – № 6. – С. 1346–1350.
9. Давыдов Ю.М. Пакет прикладных программ КРУЧА. – М.: ВЦ АН СССР, 1979. – 150 с. // Алгоритмы и программы: Инф. бюлл. – М.: ВНТИЦ. – 1980. – № 4 (36). – П004355. – С. 39.
10. Давыдов Ю.М. Дифференциальные приближения и представления разностных схем. – М.: МФТИ, 1981. – 131 с.
11. Давыдов Ю.М. Крупных частиц метод // Математическая энциклопедия. Т. 3. – М.: Советская энциклопедия, 1982. – С. 125–129.
12. Давыдов Ю.М. Архитектурная матрица аппроксимационной вязкости // Доклады академии наук СССР. – 1984. – Т. 278. – № 4. – С. 789–792.
13. Давыдов Ю.М. Крупных частиц метод // Математический энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1988. – С. 303–304.

14. Давыдов Ю.М. Современная нелинейная теория разностных схем газовой динамики. – М.: НИИ парашютостроения, 1991. – 104 с.
15. Давыдов Ю.М. Устойчивость полета парашютов // Доклады академии наук. – 1998. – Т. 363. – № 5. – С. 626–631.
16. Давыдов Ю.М. Фундаментальные проблемы парашютостроения // Фундаментальные и прикладные проблемы технологии машиностроения / Орловский гос. техн. ун-т. Орёл, 2000. – С. 33–44.
17. Давыдов Ю.М. Аэродинамика, гидроупругость и устойчивость полёта парашютных систем. – М.: НАПН РФ, 2000. – 256 с. / Изд-е 2-е, доп. – М.: НАПН РФ, НИИ парашютостроения, 2001. – 306 с.
18. Давыдов Ю.М., Давыдова И.М., Егоров М.Ю., Липанов А.М. и др. Численное исследование актуальных проблем машиностроения и механики сплошных и сыпучих сред методом крупных частиц. Т. 1 – Т. 5. / Под ред. Ю.М. Давыдова. – М.: НАПН, 1995. – 1658 с.
19. Давыдов Ю.М., Давыдова И.М., Егоров М.Ю. Совершенствование и оптимизация авиационных и ракетных двигателей с учетом нелинейных нестационарных газодинамических эффектов / Под ред. Ю.М. Давыдова. – М.: НАПН РФ, 2002. – 303 с.
20. Давыдов Ю.М., Егоров М.Ю. Численное моделирование нестационарных переходных процессов в активных и реактивных двигателях / Под ред. Ю.М. Давыдова. – М.: НАПН РФ, 1999. – 272 с.
21. Давыдов Ю.М., Косолапов Е.А. Численное моделирование двухфазных течений в соплах методом крупных частиц. – М.: НАПН, 1998. – 86 с.
22. Давыдова И.М. Об информационных структурах алгоритмов метода крупных частиц // Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред: Матер. юбилейного международ. симп. – М.: НАПН РФ, МАИ, 1997. – С. 35.
23. Давыдова И.М. Об операционных шаблонах решения задач механики сплошных и сыпучих сред // Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред: Матер. юбилейного международ. симп. – М.: НАПН РФ, МАИ, 1997. – С. 91.
24. Давыдова И.М. Алгоритмы метода крупных частиц для супер–ЭВМ // Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред : Матер. II международ. симп. – М.: НАПН РФ, МАИ, 1997. – С. 20.
25. Давыдова И.М. Построение эффективных алгоритмов расчета на супер-ЭВМ нестационарных процессов в авиационных и ракетных двигателях. – М.: ИМВС РАН, 2002. – Препринт № 1. – 2002.
26. Давыдова И.М. Нелинейные разностные схемы для расчета авиационных и ракетных двигателей. – М.: ИМВС РАН, 2002. – Препринт № 3. – 2002.
27. Давыдова И.М., Давыдов Ю.М. Об особенностях решения вычислительных задач на современных и перспективных вычислительных машинах // Вычислительные процессы и системы. Вып. 2 / Под ред. Г.И. Марчука. – М.: Наука, 1985. – С. 162–172.

28. Давыдова И.М., Давыдов Ю.М. Разработка алгоритмов и программ решения задач газовой динамики и физики плазмы для векторно-конвейерной вычислительной машины. – Москва-Владивосток: ДВО АН СССР, ИМГиГ, 1990. – 40 с.
29. Егоров И.В., Иванов Д.В. Применение полностью неявных монотонных схем для моделирования плоских внутренних течений // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 1996. – Т. 36. – № 12. – С. 91 – 107.
30. Егоров М.Ю. Исследование методом крупных частиц Давыдова внутренней баллистики современного артиллерийского выстрела // Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред: Матер. II международ. симп. – М.: НАПН РФ, МАИ, 1999. – С. 23.
31. Жмакин А.И., Попов Ф.Д., Фурсенко А.А. Метод сглаживания при расчете разрывных течений газа. // Алгоритмы и математическое обеспечение для физических задач. № 2. – Л.: Физико-техн. ин-т, 1977. – С. 63 – 72.
32. Захаров Н.С., Руденко В.В. Исследование методом крупных частиц Давыдова параметров лазерной плазмы при воздействии излучения с промоделированной интенсивностью // Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред: Матер. III международ. симп. – М.: НАПН РФ, МАИ, 2000. – С.42.
33. Кельберг В.М., Егоров М.Ю. Численное моделирование волновых процессов в газодинамических устройствах // Метод крупных частиц: теория и приложения : Труды II Всесоюзной конфер. Москва, 5–7.02.87 / НИИ парашютостроения. – М., 1988. – С. 74–87. – Депонир. в ВИМИ 21.02.89., № Д07729, вып. 12 за 1988.
34. Козлов И.Н., Романов Г.С., Суворов А.Е. Применение TVD-схем для моделирования газодинамических течений со сферической или цилиндрической симметрией // Инж.-физ. журнал. – 1993. – Т. 65. – № 3. – С. 296–301.
35. Колган В.П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно - разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Уч. зап. ЦАГИ. – 1972. – Т. 3. – № 6. – С. 68–77.
36. Колган В.П. Применение операторов сглаживания в разностных схемах высокого порядка точности // Журнал вычисл. матем. и матем физ. – 1978. – Т. 18. – № 5. – С. 1340–1345.
37. Кондрашов В.В. Исследование многопараметрических численных схем метода крупных частиц (МКЧ). – Минск: Изд-во Ин-та тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова АН БССР, 1986. – Часть 1. Препринт № 5. – 17 с.; Часть 2. Препринт № 6. – 24 с.
38. Численное моделирование методом крупных частиц Давыдова двухфазных течений в соплах для газодинамической системы пожаротушения / В.В. Костюк, И.А. Лепешинский, А.В. Воронецкий, Г.В. Моллесон, А.В. Ципенко, А.А. Яковлев Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред: Матер. III международ. симп. – М.: НАПН РФ, МАИ, 2000. – С. 44.
39. Кутушев А.Г., Кутенков В.В. Математическое моделирование методом крупных частиц Давыдова нестационарного импульсного выброса газодисперсной среды из

ствольных установок // Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред: Матер. III международ. симп. – М.: НАПН РФ, МАИ, 2000. – С. 46.
40. Лукин А.Н. Численное моделирование методом Давыдова физико-химических процессов, используемых в передовой технологии воспламенения заряда крупногабаритного РДТТ с большим удлинением // Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред: Матер. III международ. симп. – М.: НАПН РФ, МАИ, 2000. – С. 48.
41. Модорский В.Я., Соколкин Ю.В. Применение метода крупных частиц Давыдова для исследования быстропротекающих нелинейных динамических процессов в пористых материалах // Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред: Матер. III международ. симп. – М.: НАПН РФ, МАИ, 2000. – С.52–53.
42. Моллесон Г.В., Стасенко А.Л. Моделирование натекания струи с испаряющимся дисперсным экраном на преграду методом крупных частиц Давыдова // Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред: Матер. III международ. симп. – М.: НАПН РФ, МАИ, 2000. – С. 54.
43. Нестеров Д.О. Расчет методом Давыдова двойного фильтра // Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред: Матер. III международ. симп. – М.: НАПН РФ, МАИ, 2000. – С. 55.
44. Рихтмайер Р.Д., Мортон Х. Разностные методы решения краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 420 с.
45. Родионов А.В. Численный метод решения уравнений Эйлера с сохранением аппроксимации на деформируемой сетке // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 1996. – Т. 36. – № 3. – С. 117–129.
46. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
47. Ташлыков Д.Н., Шмотин Ю.Н. Решение методом крупных частиц Давыдова задачи об устойчивости к автоколебаниям лопаток компрессора // Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред: Матер. III международ. симп. – М.: НАПН РФ, МАИ, 2000. – С. 56.
48. Терентьев А.Д. Теоретическое исследование характеристик ракетного двигателя на основе совмещённого эйлерово-лагранжева подхода метода крупных частиц Давыдова // Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред: Матер. III международ. симп. – М.: НАПН РФ, МАИ, 2000. – С. 99–101.
49. Тутурин В.А. Расчет процесса торможения аэроупругого парашюта методом Давыдова // Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред: Матер. III международ. симп. – М.: НАПН РФ, МАИ, 2000. – С. 140.
50. Уваров Г.А. Расчет методом Давыдова задач нефтегазового комплекса // Фундаментальные и прикладные проблемы технологии машиностроения. – Орел: Изд-во Орловск. гос. техн. ун-та, 2000. – С. 262–264.
51. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т.1–Т.5. – М.: Мир, 1991. – 1054 с.
52. Чечейбаев А.Б. Дифференциальные приближения второго порядка разностных схем метода Давыдова для расчета фильтрационных течений // Актуальные проблемы

состояния и развития нефтегазового комплекса. – М.: Мин-во общего и проф. образования РФ,. Рос. гос. ун-т нефти и газа им. И.М. Губкина, 2001. – С. 65.

53. Anderson W.K., Thomas J.L., Van Leer B. Comparison of Finite Volume Flux Vector Splittings for the Euler Equations // AIAA J. – 1986. – Vol. 24. – № 9. – P. 1453–1460.
54. Boris J.P., Book D.L. Flux - Corrected Transport 1. A Fluid transport algorithm that works // J. Comp. Phys. – 1973. – Vol.11. – № 1. – P. 38–69.
55. Boris J.P., Book D.L. Solution of the Continuity Equation by the Method of Flux - Corrected Transport // Methods in Comp. Phys. – 1976. – Vol. 16. – P. 85–129.
56. Colella P., Woodward P.R. The Piecewise – Parabolic Method (PPM) for Gas – Dynamical Simulations. // J. Comp. Phys. – 1989. – Vol.54. – № 1. – P. 174–201.
57. Davydov Yu.M. Large-particle method // In: Encyclopaedia of Mathematics. Vol. 5. – Dordrecht / Boston / London: Kluver academic publishers, 1990. – P. 358–360.
58. Harten A. A High Resolution Scheme for Hyperbolic Conservation Laws // J. Comp. Phys. – 1983. – Vol. 49. – № 3. – P. 357 – 393 (publication from NYU Report, Oct.1981).
59. Harten A., Lax P.D. On a Class of High Resolution Total – Variation – Stable Finite-Difference Schemes // SIAM J. of Numerical Analysis. – 1984. – Vol.21. – № 1. – P. 1 – 23. (publication from NYU Report, Oct.1982).
60. Lax P.D., Wendroff B. Systems of Conservation Laws // Comm. Pure and Appl. Math. – 1960. – Vol. 13. – P. 217–237.
61. Montaque J.-L., Yee H.C., Vinokur H. Comparative Study of High Resolution Shock - Capturing Schemes for a Real Gas // AIAA J. – 1989. – Vol. 27. – № 10. – P. 1332–1346.
62. Roe P.L. Approximate Rieman Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes // J. Comp. Phys. – 1981. – Vol. 43. – № 2. – P. 357–372.
63. Sagaidacnyi A.A. Davydov's Method for Gas-Hydrodynamic Problems // Нефть и газ 2003. – М.: Мин-во образования Российской Федерации, Рос. гос. ун-т нефти и газа им. И.М. Губкина, 2003. – С. 9.
64. Steger J.L., Warming R.F. Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Application to Finite - Difference Methods // J. Comp. Phys. – 1981. – Vol. 40. – № 2. – P. 263–293.
65. Sundar K., Sriramulu V., Ramakrishna M. Comparison of High Resolution Schemes Applied to Flows Containing Strong Shocks // AIAA J. – 1995. – Vol. 33. – № 11. – P. 2087–2091.
66. Van Albada G.D., Van Leer B., Roberts W.W.Jr. A Comparative Study of Computational metods in Cosmic Gas Dynamics // Astron. Astrophys. – 1982. – Vol. 108. – P. 76–101.
67. Van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme II. Monotonicity and Conservation in a Second - Order Scheme // J. Comp. Phys. – 1974. – Vol.14. – № 2. – P. 361–370.
68. Van Leer B. Flux - Vector Splitting for the Euler Equations // Lecture Notes in Physics. – 1982. – Vol. 170. – P. 507–512.
69. Yee H.C. Construction of Explicit and Implicit Symmetric TVD Schemes and heir Applications // J. Comp. Phys. – 1987. – Vol. 68. – № 2. – P. 151–79.

70. Yee H.C., Shinn J.L. Semi – Implicit and Fulli Implicit Shock – Capturing Methods for Nonequiblibrium Flows // AIAA J. – 1989. – Vol. 27. – № 3. – P. 299–307.
71. Yee H.C., Warming R.F., Harten A. A High Resolution Numerical Technique for Inviscid Gas - Dynamic Problems with Weak Solutions // Lecture Notes in Physics. – 1982. – Vol. 170. – P. 546–552.
72. Yee H.C., Warming R.F., Harten A. Implicit Total Variation Diminishing (TVD) Schemes for Steady - State Calculations // J. Comp. Phys. – 1985. – Vol. 57. – № 3. – P. 327–360.

Получено 7.07.2003