

УДК 539.374

И.Э. Келлер, О.Н. Ипанов, А.И. Столбов

Пермский государственный технический университет

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭНДОХРОННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ ТРАЕКТОРИЙ ДЕФОРМАЦИЙ

Abstract

Analytical solutions of endochronic theory of plasticity for two-branched and circular paths in the plane of total strains were found. Dependence of scalar and vector properties delay from loading and material parameters, besides them from the small parameter in intrinsic time measure, was studied.

Постановка задачи. Работа посвящена получению аналитических решений эндохронной теории пластичности для двухзвенной и круговой траекторий в плоскости полных деформаций с целью исследования природы эффектов запаздывания скалярных и векторных свойств материала. Реакция пластического материала именно на сложные траектории деформирования с большой кривизной и изломами выявляет неоднородность, стохастичность его строения и локализацию деформации. Исследуется зависимость полученных решений от параметров нагружения и материала, определяющих эффекты запаздывания, в том числе от малого параметра, фигурирующего в определении “внутреннего времени”. Несмотря на то, что эти вопросы изучались [1-4], аналогичные решения в литературе, по-видимому, не встречаются.

Используются соотношения эндохронной теории пластичности в случае экспоненциального ядра и тождественно единичной функции упрочнения [3]

$$\dot{s} = E\dot{e} - Es_0^{-1}s\dot{z}, \quad (1)$$

$$\dot{z} = \dot{e} - \chi E^{-1}\dot{s}, \quad (2)$$

где s, e – векторы девиаторных пространств напряжений и деформаций (здесь двумерных), z – неубывающий параметр, называемый “внутренним временем”, E, s_0, χ – константы, причем $\chi < 1$ близка к единице. При $\chi = 1$ уравнения становятся сингулярными и сводятся к уравнениям теории течения упруго-идеально-пластической среды с пределом текучести s_0 и модулем упругости E . Этот предельный случай рассматривается отдельно. В случае одноосного монотонного нагружения имеем решение

$$e = z + \chi\lambda^{-1}[1 - \exp(-\alpha^{-1}\lambda z)],$$

$$s = s_0[1 - \exp(-\alpha^{-1}\lambda z)],$$

где $\alpha = 1 - \chi$, $\lambda = Es_0^{-1}$. Асимптотически

$$e \propto z + \chi E^{-1}s_0,$$

откуда видно, что при $e \rightarrow \infty$ $s \rightarrow s_0$ монотонно слева. Вообще, величина s не может достичь s_0 и для произвольной траектории деформаций, а скорость стремления s к

своему максимальному значению s_0 максимальна при одноосном нагружении. Следуя сказанному, имеет смысл ввести параметр $\nu = \frac{s}{s_0}$; $\nu < 1$ при $\alpha \neq 0$ и $\nu = 1$ при $\alpha = 0$.

Критические углы излома. Предварительно определим критические углы излома в точке произвольной плоской траектории нагружения.

1. Разгрузка. Пусть контролируемой переменной является вектор напряжений. Рассмотрим локальный излом траектории напряжений на угол $0 \leq \psi \leq \pi$, тогда $s \cdot \dot{s} = s\dot{s}\cos\psi$, где s, \dot{s} – модули векторов s, \dot{s} . Найдем критический ψ_0 из условия нейтрального нагружения

$$s \cdot \dot{e} = 0. \quad (3)$$

Из (1) и (3)

$$E \frac{dz}{ds} = -\nu^{-1} \cos\psi_0. \quad (4)$$

Из (4) видно, что $\psi_0 > \frac{\pi}{2}$. Из (1) и (2) последовательно

$$\begin{aligned} \dot{z} &= |\alpha E^{-1} \dot{s} + s_0^{-1} s \dot{z}|, \\ (1 - \nu^2) \left(E \frac{dz}{ds} \right)^2 - 2\alpha \nu E \frac{dz}{ds} \cos\psi - \alpha^2 &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

и с использованием (4)

$$\cos\psi_0 = \frac{-\nu\alpha}{\sqrt{1 - \nu^2(1 - 2\alpha)}}. \quad (6)$$

До $\psi_0(\alpha, \nu)$ разгрузка не реализуется. При фиксированном α при $\nu \rightarrow 1$ $\psi_0 \rightarrow \frac{3\pi}{4}$ монотонно и независимо от α . При фиксированном ν при $\alpha \rightarrow 0$ $\psi_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ монотонно. При $\alpha = 0$ отдельно получаем $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$.

2. “Нырок”. Пусть теперь контролируемой переменной является вектор деформаций. Рассмотрим локальный излом траектории деформаций на угол $0 \leq \varphi \leq \pi$, тогда $s \cdot \dot{e} = s\dot{e}\cos\varphi$, где \dot{e} — модуль вектора \dot{e} . Найдем критический φ_0 из условия $d/s = 0$ или

$$s \cdot \dot{s} = 0. \quad (7)$$

Из (1) и (7)

$$\nu \frac{dz}{de} = \cos\varphi_0, \quad (8)$$

откуда $\varphi_0 < \frac{\pi}{2}$. Из (1) и (2) последовательно

$$\begin{aligned} \dot{z} &= |\alpha \dot{e} + \chi s_0^{-1} s \dot{z}|, \\ (\nu^{-2} - (1 - \alpha)^2) \left(\nu \frac{dz}{ds} \right)^2 - 2\alpha(1 - \alpha) \nu \frac{dz}{ds} \cos\varphi - \alpha^2 &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

и с использованием (8)

$$\cos\varphi_0 = \frac{\nu\alpha}{\sqrt{1 - \nu^2(1 - \alpha^2)}}. \quad (10)$$

До $\varphi_0(\alpha, \nu)$ “нырка” не происходит. При фиксированном $\alpha \neq 0$ при $\nu \rightarrow 1$ $\varphi_0 \rightarrow 0$ монотонно и независимо от α . При фиксированном ν при $\alpha \rightarrow 0$ $\varphi_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$. При $\alpha = 0$ отдельно получаем $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$.

3. Неустойчивость материала. Условие неустойчивости материала записывается в виде

$$\dot{s} \cdot \dot{e} = 0. \quad (11)$$

Из (1) и (11)

$$\dot{s}^2 + vE\dot{s}\dot{z}\cos\psi_* = 0 \Leftrightarrow \dot{e}^2 - v\dot{e}\dot{z}\cos\varphi_* = 0. \quad (12)$$

Используя (5) и первое равенство (12), получаем

$$\cos^2 \psi_* = -\frac{1-v^2}{v^2(1-\chi^2)} \leq 0. \quad (13)$$

Единственный имеющий смысл случай $\varphi_* = \frac{\pi}{2}$ реализуется при $v = 1$, что возможно только при $\alpha = 0$. Из (9) и второго равенства (12) либо сразу из $\cos^2 \psi_* + \cos^2 \varphi_* = 1$

$$\cos^2 \varphi_* = \frac{1-\chi^2 v^2}{v^2(1-\chi^2)} \geq 1. \quad (14)$$

Единственный имеющий смысл случай $\varphi_* = 0$ реализуется при $v = 1$, что возможно только при $\alpha = 0$. Итак, материал, описываемый эндохронной моделью, устойчив для любых $\alpha > 0, v < 1$. В предельном случае $\alpha = 0$ имеем неустойчивость при нейтральном нагружении.

Итак, в рамках изучаемой модели при $\alpha \neq 0$ разгрузка может начинаться при изломах в пространстве напряжений $\psi > \frac{\pi}{2}$, а нырок – при изломах в пространстве деформаций $\varphi < \frac{\pi}{2}$, в зависимости от α и v .

Запаздывание скалярных и векторных свойств на двухзвенных траекториях деформаций. В ортобазисе с первым элементом вдоль вектора \dot{e} после излома будем иметь $\dot{e} = (\dot{e}, 0)$, $\mathbf{s} = (s_x, s_y) = s(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, $\dot{\mathbf{s}} = (\dot{s}_x, \dot{s}_y)$, а в момент излома $\bar{\mathbf{s}} = (\bar{s}_x, \bar{s}_y) = \bar{s}(\cos\bar{\vartheta}, \sin\bar{\vartheta})$ и примем $\mathbf{e} = (0, 0)$, $z = 0$. Из (1) для второй компоненты сразу следует

$$s_y = \bar{s}_y \exp(-\lambda z). \quad (15)$$

Исключая переменную \dot{e} из (2) с помощью уравнения (1) для первой компоненты и используя (15), приходим к уравнению

$$(\alpha s'_x + \lambda s_x)^2 = E^2(1 - \chi^2 \beta^2 \exp(-2\lambda z)), \quad (16)$$

где $\beta^2 = \bar{v}^2 \sin^2 \bar{\vartheta}$, $\bar{v} = \bar{s}_0^{-1}$, а штрих есть производная по z . Решение (16) записывается через бета-функцию, причем α входит во все три ее аргумента. Такое решение мало пригодно для исследования, особенно при малых α . Поэтому для малых α (16) сводим к

$$\alpha u' + \lambda u = \lambda s_0 (1 - \chi^2 \beta^2 \exp(-2\lambda z)), \quad (17)$$

где $u = s_x^2$. Решение (17) есть

$$s_x^2 = s_0^2 \left[1 - \frac{\chi^2 \bar{v}^2 \sin^2 \bar{\vartheta}}{1 - 2\alpha} \exp(-2\lambda z) + \left(\frac{\chi^2 \bar{v}^2 \sin^2 \bar{\vartheta}}{1 - 2\alpha} + \bar{v}^2 \cos^2 \bar{\vartheta} - 1 \right) \exp(-\alpha^{-1} \lambda z) \right]. \quad (18)$$

С использованием (15), (18) находим $s^2 = s_x^2 + s_y^2$:

$$s^2 = s_0^2 \left[1 - \frac{\alpha^2 \bar{v}^2 \sin^2 \bar{\vartheta}}{1 - 2\alpha} \exp(-2\lambda z) + \left(\frac{\chi^2 \bar{v}^2 \sin^2 \bar{\vartheta}}{1 - 2\alpha} + v^2 \cos^2 \bar{\vartheta} - 1 \right) \exp(-\alpha^{-1} \lambda z) \right]. \quad (19)$$

Неположительность производной s^2 при $z = 0$ дает условие реализации “нырка” при малых α ,

$$\bar{v}^2 > (\alpha^2 \sin^2 \bar{\vartheta} + 1)^{-1}. \quad (20)$$

В отличие от (10) это приближенное условие всегда дает более осторожную оценку критического угла излома, т.е. требует для реализации “нырка” излом на угол $\bar{\vartheta} \geq \varphi_0$. При ортогональном изломе

$$\bar{v}^2 > (1 + \alpha^2)^{-1},$$

т.е. “нырок” при заданном малом α реализуется при \bar{v} , достаточно близком к единице.

На рис. 1 представлены полученные с помощью (19) кривые $v(z) = ss_0^{-1}$ при различных α , $\bar{\vartheta}$ и \bar{v} . Эти кривые содержат “нырок”, глубина которого, конечно, не зависит от параметризации, и поэтому ограничимся изучением зависимости $v(z)$ вместо $v(e)$. Глубина “нырка” заметно увеличивается с ростом α . Те же тенденции отмечаются при увеличении $0 \leq \bar{\vartheta} \leq \frac{\pi}{2}$. При дальнейшем увеличении угла излома $\frac{\pi}{2} \leq \bar{\vartheta} \leq \pi$ зависимость меняется на обратную, так что имеют место идентичные кривые при $\bar{\vartheta}$ и $\pi - \bar{\vartheta}$. Этот противоречащий эксперименту и здравому смыслу результат обусловлен приближенностью способа решения задачи, не учитывающего знак s_x . По-видимому, при углах излома $\frac{\pi}{2} \leq \bar{\vartheta} \leq \pi$ этот способ “пропускает” участок решения от $\bar{\vartheta}$ до $\pi - \bar{\vartheta}$. Так, в предельном случае $\alpha = 0$ решение показывает отсутствие “нырка” при $\frac{\pi}{2} \leq \bar{\vartheta} \leq \pi$, однако непосредственно видно, что здесь имеет место упругий “нырок”, рельеф которого описывается функцией $s(e) = s_0 + Ee \frac{1 - \sin \bar{\vartheta}}{\cos \bar{\vartheta}}$, где $e \in [0, -2Es_0 \cos \bar{\vartheta}]$ – длина отрезка деформации после излома; в пластичности $s \equiv s_0$, $e > -2Es_0 \cos \bar{\vartheta}$.

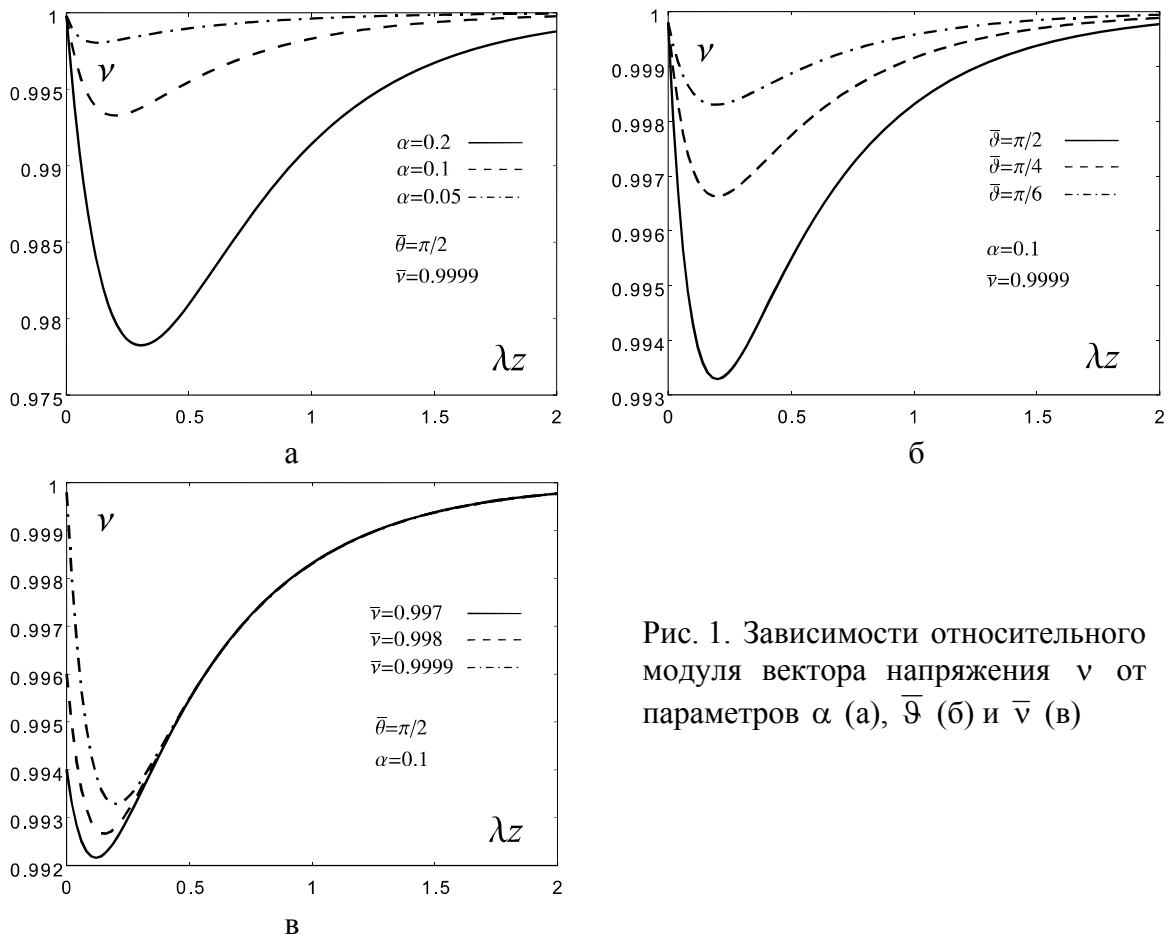


Рис. 1. Зависимости относительного модуля вектора напряжения v от параметров α (а), $\bar{\vartheta}$ (б) и \bar{v} (в)

С помощью (15), (18) можно определить изменение угла сближения:

$$\operatorname{ctg}^2 \vartheta = -\frac{(1-\alpha)^2}{1-2\alpha} + v^{-2} \sin^{-2} \bar{\vartheta} \exp(2\lambda z) + \left[\frac{(1-\alpha)^2}{1-2\alpha} + \operatorname{ctg}^2 \bar{\vartheta} - v^{-2} \sin^{-2} \bar{\vartheta} \right] \exp\left(-\frac{1-2\alpha}{\alpha} \lambda z\right). \quad (21)$$

В предельном случае $\alpha = 0$

$$\sin\vartheta = \sin\bar{\vartheta}\exp(-\lambda z). \quad (22)$$

Интерес здесь представляет зависимость ϑ от контролируемого параметра e , а не от z . Зависимость $e(z)$ в квадратурах при малых α находится интегрированием уравнения (1) для первой компоненты

$$e = E^{-1}(s_x - \bar{s}_x) + s_0^{-1} \int_0^z s_x dz$$

с использованием (18), что приводит к некоторому тяжеловесному выражению.

Для $\alpha = 0$ в предположении, что в точке излома $\bar{s} = s_0$, получаем относительно простую зависимость

$$\exp(\lambda z) = \frac{1}{2}[(1 + \cos\bar{\vartheta})\exp(\lambda e) + \sin^2\bar{\vartheta}(1 + \cos\bar{\vartheta})^{-1}\exp(-\lambda e)]. \quad (23)$$

Асимптотически

$$e \propto z - E^{-1}s_0 \ln \frac{1 + \cos\bar{\vartheta}}{2}. \quad (24)$$

С учетом (23) из (22)

$$\sin\vartheta = 2\sin\bar{\vartheta}[(1 + \cos\bar{\vartheta})\exp(\lambda e) + \sin^2\bar{\vartheta}(1 + \cos\bar{\vartheta})^{-1}\exp(-\lambda e)]^{-1}. \quad (25)$$

Кривая $\vartheta(e)/\bar{\vartheta}$ слабо зависит от угла излома (рис. 2). Для ортогонального излома

$$\exp(\lambda z) = \operatorname{ch}(\lambda e),$$

$$\sin\vartheta = \operatorname{ch}^{-1}(\lambda e), \quad \cos\vartheta = \operatorname{th}(\lambda e),$$

$$e \propto z + \frac{s_0}{E} \ln 2.$$

В случае отсутствия излома $e = z$, а не $z + E^{-1}s_0$ (см. начало статьи), поскольку e здесь не полные, а пластические деформации.

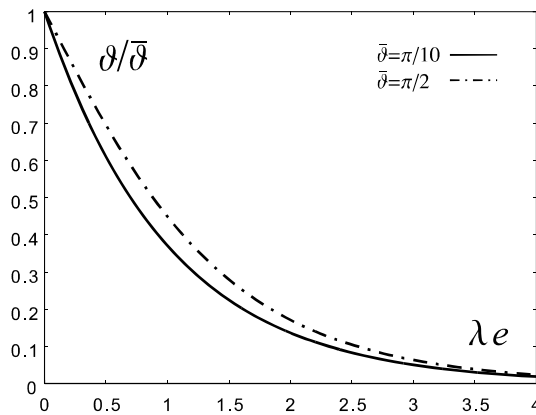


Рис. 2. Зависимость относительного угла сближения от деформации и угла излома

Стационарное решение на круговой траектории деформации. Для траектории деформаций $e = e_0(\cos\theta, \sin\theta)$ стационарное решение будем искать в виде $s = s_*(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, где s_* от параметра θ не зависит. Уравнения (1) тогда примут вид

$$-s_*\sin\vartheta\vartheta' + Ee_0\sin\theta + Es_0^{-1}s_*\cos\vartheta z' = 0, \quad s_*\cos\vartheta\vartheta' - Ee_0\cos\theta + Es_0^{-1}s_*\sin\vartheta z' = 0,$$

где штрих обозначает производную по θ , откуда

$$s_* = Ee_0\cos\Delta, \quad s_*z' = s_0e_0\sin\Delta,$$

где $\Delta \equiv \vartheta - \theta \geq 0$ и учтено, что $\vartheta' = 0$, поскольку в стационарном случае $\theta - \vartheta$ постоянно, откуда

$$z' = E^{-1}s_0 \operatorname{tg}\Delta.$$

Уравнение (2) с учетом этого результата сведется тогда к

$$(1 - \alpha^2)\lambda^2 e_0^2 x^2 - (1 + \lambda^2 e_0^2)x + 1 = 0,$$

где $x = \cos^2 \Delta$, решение которого

$$\cos^2 \Delta = \frac{1}{2}(1 - \alpha^2)^{-1} r^{-2} [1 + r^2 - \sqrt{(1 - r^2)^2 + 4\alpha^2 r^2}]$$

есть функция монотонно убывающая при неограниченном росте $r = \lambda e_0$ от 1 до 0, при этом опережение вектором напряжений вектора деформаций асимптотически стремится к $\frac{\pi}{2}$. Далее

$$s_*^2 = \frac{1}{2} s_0^2 (1 - \alpha^2)^{-1} [1 + r^2 - \sqrt{(1 - r^2)^2 + 4\alpha^2 r^2}]$$

монотонно возрастает при неограниченном росте r от 0 до s_0 . Мощность диссипации

$$w = s_* e_0 \sin \Delta$$

асимптотически линейно зависит от e_0 : $w \propto s_0 e_0$.

На рис. 3 приведены зависимости $\Delta(r)$, $\nu(r) \equiv s_* s_0^{-1}$ и $w(e_0)/s_0$ при $\alpha = 0,5; 0,1$ и 10^{-5} . При стремлении $\alpha \rightarrow 0$ у решений становится заметным “упругий” участок $r \in [0,1]$ или $e_0 \in [0, E^{-1} s_0]$, на котором сосредоточено наибольшее отличие поведения модели с $\alpha \neq 0$ от предельного случая с $\alpha = 0$.

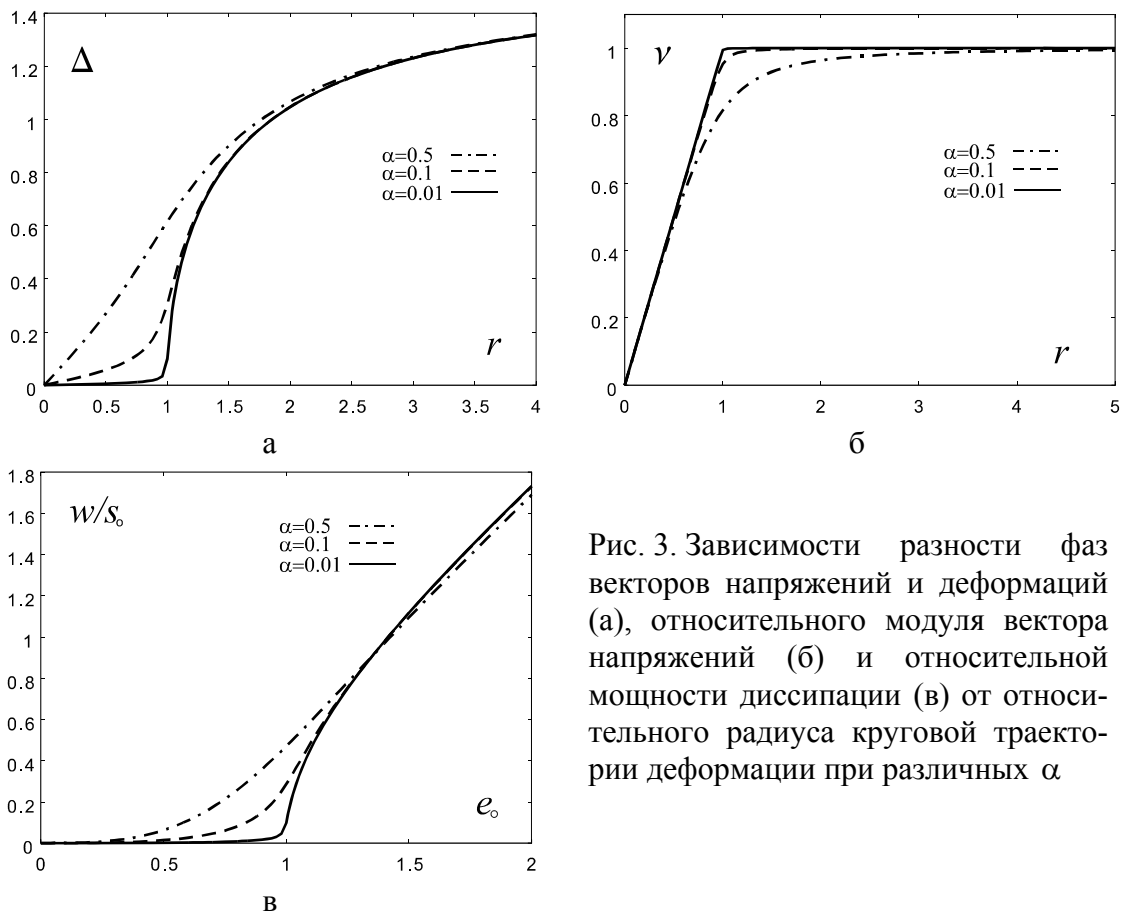


Рис. 3. Зависимости разности фаз векторов напряжений и деформаций (а), относительного модуля вектора напряжений (б) и относительной мощности диссипации (в) от относительного радиуса круговой траектории деформации при различных α

Полученные в данной работе точные и приближенные аналитические решения могут иметь значение при статистико-термодинамическом истолковании эндохронной теории.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке из средств грантов 01-01-00440 Российского фонда фундаментальных исследований и PE-009-0 Американского фонда гражданских исследований и развития (АФГИР).

Библиографический список

1. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. О взаимосвязи теории пластичности, учитывающей микронапряжения, с эндохронной теорией пластичности // Изв. РАН. – МТТ. – 1997. – №4. – С. 99-105.
2. Кадашевич Ю.И., Мосолов А.Б. Вероятностный подход в эндохронных теориях пластичности // ДАН СССР. – 1988. – Т.300. – №5. – С. 1084-1086.
3. Мосолов А.Б., Динариев О.Ю. О траекториях с угловыми точками в теории пластичности без поверхности текучести // Проблемы прочности. – 1986. – №10. – С.14-18.
4. Мосолов А.Б. Нейтральное нагружение в эндохронной модели теории пластичности// ПММ. – 1986. – Т.50. – №2. – С. 331-334.

Получено 19.04.2003