УДК 152. 972

Е.А. Митюшов

Уральский государственный технический университет

АНИЗОТРОПНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ФУНКЦИИ И КРИТЕРИИ ПРЕДЕЛЬНОСТИ

Abstract

The orthonormed bases for different symmetry types and anisotropic properties of six-dimensional space were found. Moreover, the phenomenological criteria of limitation for different anisotropic elasto-plastic materials were obtained.

Анизотропные тензорные пространства

Следуя работе [1], рассмотрим шестимерное пространство $S \equiv \mathrm{sym}E \otimes E \subset T_2 \equiv E \otimes E$ симметричных тензоров второго ранга. Здесь E – векторы 3-мерного евклидова векторного пространства E^3.

В шестимерном пространстве S существует такой ортонормированный базис $\omega^{(k)}$ $(k = 1,2,\ldots,6)$, при котором любой симметричный тензор второго ранга α представим в виде

$$\alpha = \sum_{k=1}^{6} \alpha_k \omega^{(k)}, \quad \omega^{(k)} \cdot \omega^{(l)} = \omega_{ij}^{(k)} \omega_{ij}^{(l)} = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \end{cases},$$

где $\alpha_k \in R$ – координаты симметричного тензора в данном тензорном базисе.

При этом

$$\alpha_k = \alpha \cdot \omega^{(k)}.$$

Помимо линейных операций сложения тензоров и умножения тензора на число введем операцию умножения двух тензоров в фиксированном базисе $\omega^{(k)}$ $(k = 1,2,\ldots,6)$.

Определение 1. *Произведением двух симметричных тензоров второго ранга* α *и* β *в базисе* $\omega^{(k)}$ $(k = 1,2,\ldots,6)$ *называется тензор* $\alpha\beta \in S$, *определяемый равенством*

$$\alpha\beta = \sum_{k=1}^{6} \alpha_k \beta_k \omega^{(k)},$$

где α_k, β_k *– координаты тензоров* α *и* β *в базисе* $\omega^{(k)}$ $(k = 1,2,\ldots,6)$.

Дадим еще одно определение.

Определение 2. *Директором ортонормированного базиса* $\omega^{(k)}$ $(k = 1,2,\ldots,6)$ *называется тензор*

$$\omega = \sum_{k=1}^{6} \omega^{(k)}.$$

Базис $\omega^{(k)}$ $(k = 1,2,\ldots,6)$ инвариантен относительно преобразований симметрии векторного пространства E^3.

В случае ортотропной симметрии ортонормированный базис

$$\omega^{(1)} = \begin{Vmatrix} \omega_1^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^{(1)} \end{Vmatrix}, \ \omega^{(2)} = \begin{Vmatrix} \omega_1^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^{(2)} \end{Vmatrix}, \ \omega^{(3)} = \begin{Vmatrix} \omega_1^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^{(3)} \end{Vmatrix},$$

$$\omega^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \ \omega^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \ \omega^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Используя кватернионное представление числовых троек $\left(\omega_1^{(k)}, \omega_2^{(k)}, \omega_3^{(k)}\right)$, составляющих ортонормированный базис в пространстве R^3 [2], имеем

$$\omega^{(1)} = \begin{Vmatrix} p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2(p_1 p_2 - p_0 p_3) & 0 \\ 0 & 0 & 2(p_0 p_2 + p_1 p_3) \end{Vmatrix}$$

$$\omega^{(2)} = \begin{Vmatrix} 2(p_0 p_3 + p_1 p_2) & 0 & 0 \\ 0 & p_0^2 - p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(p_2 p_3 - p_0 p_1) \end{Vmatrix},$$

$$\omega^{(3)} = \begin{Vmatrix} 2(p_1 p_3 - p_0 p_2) & 0 & 0 \\ 0 & 2(p_0 p_1 + p_2 p_3) & 0 \\ 0 & 0 & p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 + p_3^2 \end{Vmatrix},$$

$$\omega^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \ \omega^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \ \omega^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

При этом $p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$.

Ортотропия при объемной изотропии (один из базисных тензоров является шаровым)

$$\omega^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\omega^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1 + q_2 + q_2^2}} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - q_2 \end{Vmatrix}, \omega^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1 + q_3 + q_3^2}} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - q_3 \end{Vmatrix},$$

$$\omega^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \ \omega^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \ \omega^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

где $q_{2,3} = t \pm \sqrt{1 + t + t^2}$.

Тетрагональная симметрия и трансверсальная изотропия

$$\omega^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2+q_1^2}}\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & q_1\end{Vmatrix},\ \omega^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2+q_2^2}}\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & q_2\end{Vmatrix},\omega^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix},$$

$$\omega^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{Vmatrix},\ \omega^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{Vmatrix},\ \omega^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Vmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix},$$

где $q_{1,2} = t \pm \sqrt{2+t^2}$.

Кубическая симметрия

$$\omega^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix},\ \omega^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{Vmatrix},\ \omega^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix},$$

$$\omega^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{Vmatrix},\ \omega^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{Vmatrix},\ \omega^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Vmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}.$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что полученные базисы являются ортонормированными.

Можно также убедиться, что при соответствующих преобразованиях симметрии пространства E^3 произведение тензоров не меняется, а скалярное произведение $\alpha \cdot \beta$ – это скалярное произведение тензора $\alpha\beta$ с директором тензорного базиса, то есть:

$$\alpha \cdot \beta = (\alpha\beta) \cdot \omega .$$

Определение 3. *Анизотропным тензорным пространством $\widetilde{S}$ называется тензорное пространство S, в котором введена операция умножения двух тензоров в фиксированном тензорном базисе.*

В пространстве $\widetilde{S}$ выполняются аксиомы ассоциативно-коммутативного кольца с единицей и делителями нуля:

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
2. $(\alpha + \beta) + \delta = \alpha + (\beta + \delta)$;
3. $\exists\, 0 : \alpha + 0 = \alpha$;
4. $\forall\, \alpha \in \widetilde{S}\ \exists (-\alpha) : \alpha + (-\alpha) = 0$;
5. $\alpha\beta = \beta\alpha$;
6. $(\alpha\beta)\delta = \alpha(\beta\delta)$;
7. $(\alpha + \beta)\delta = \alpha\delta + \beta\delta$;
8. $\alpha\omega = \alpha$.

Кроме того, для элементов, не являющихся делителями нуля:

9. $\forall\, \alpha \in \widetilde{S}\quad \left(\prod_{k=1}^{6} \alpha_k \neq 0\right) \exists\, \alpha^{-1} : \alpha\alpha^{-1} = \omega$;
10. $\dfrac{\alpha}{\beta} = \alpha\beta^{-1}$ $\left(\prod_{k=1}^{6} \beta_k \neq 0\right)$.

Директор базиса – это тензорная единица пространства $\tilde{S}$, а в силу принятых аксиом в этом пространстве можно выполнять алгебраические, функциональные, дифференциальные и интегральные операции.

Легко проверяются алгебраические тождества

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2; \quad \alpha^{-1}-(\alpha+\omega)^{-1}=\alpha^{-1}(\alpha+\omega)^{-1},\ \prod_{k=1}^{6}\alpha_k\neq 0,\ \alpha\neq-\omega.$$

В тензорном пространстве $\tilde{S}$ может быть введена метрика, при этом расстояние между двумя точками (элементами) пространства определим формулой

$$\rho(\alpha',\alpha'')=\sqrt{\alpha'\cdot\alpha''},$$

а также может быть введен угол разориентации между двумя тензорами α' и α'' соотношением

$$\varphi=\arccos\frac{\alpha'\cdot\alpha''}{\sqrt{\alpha'\cdot\alpha'}\sqrt{\alpha''\cdot\alpha''}}.$$

Аналогичным образом может быть определено анизотропное пространство $\tilde{T}_4\equiv\tilde{S}\otimes\tilde{S}$ тензоров четвертого ранга, симметричных по первым двум и последним двум индексам и парам крайних индексов. Базисом данного пространства, инвариантным относительно преобразований симметрии векторного пространства E^3, является система $\omega^{(k)}\otimes\omega^{(k)}$ $(k=1,2,\ldots,6)$, а тензорной единицей – тензор

$$I=\sum_{k=1}^{6}\omega^{(k)}\otimes\omega^{(k)} \quad \text{или} \quad I_{ijmn}=\sum_{k=1}^{6}\omega_{ij}^{(k)}\omega_{mn}^{(k)}.$$

При этом

$$\omega^{(k)}\otimes\omega^{(k)}\cdot\omega^{(l)}\otimes\omega^{(l)}=\omega_{ij}^{(k)}\omega_{mn}^{(k)}\omega_{ij}^{(l)}\omega_{mn}^{(l)}=\begin{cases}0, & k\neq l\\ 1, & k=l\end{cases}.$$

Анизотропные тензор-функции тензорного аргумента

Областью $D\subset\tilde{S}$ анизотропного тензорного пространства $\tilde{S}$ назовем множество тензоров $\alpha=\sum_{k=1}^{6}\alpha_k\omega^{(k)}$, $\alpha_k\in M_k\subset R$.

Будем говорить, что в области D пространства $\tilde{S}$ задана анизотропная тензор-функция $f(\alpha)$ соответствующей симметрии, если указан закон, по которому каждому тензору α из D ставится в соответствие тензор $f(\alpha)\in\tilde{S}$. В базисе $\omega^{(k)}$ $(k=1,2,\ldots,6)$ этот закон может быть представлен в виде

$$f(\alpha)=\sum_{k=1}^{6}\varphi_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_6)\omega^{(k)} \quad , \quad \varphi_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_6)=f(\alpha)\ \cdot\omega^{(k)},$$

где $\varphi_k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_6)$ – скалярные функции, определенные при $\alpha_k\in M_k$.

Введем в рассмотрение элементарные анизотропные тензор-функции тензорного аргумента, как обобщение обычных элементарных функций, равенствами:

1. Степенная функция

$$\alpha^p=\sum_{k=1}^{6}\alpha_k^p\omega^{(k)},\ p\in R.$$

2. Логарифмическая функция

$$\ln\alpha = \sum_{k=1}^{6} \ln\alpha_k \omega^{(k)} .$$

3. Основная показательная функция

$$e^{\alpha} = \sum_{k=1}^{6} e^{\alpha_k} \omega^{(k)} .$$

4. Тригонометрические функции

$$\sin\alpha = \sum_{k=1}^{6} \sin\alpha_k \omega^{(k)} , \qquad \cos\alpha = \sum_{k=1}^{6} \cos\alpha_k \omega^{(k)} .$$

5. Полином

$P_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{6} P_n(\alpha_k)\omega^{(k)}$, n – целая степень тензорного полинома, $P_n(\alpha_k)$ – полиномы над полем вещественных чисел.

6. Рациональная функция

$$\frac{P_n(\alpha)}{Q_m(\alpha)} = \sum_{k=1}^{6} \frac{P_n(\alpha_k)}{Q_m(\alpha_k)} \omega^{(k)} , \quad n, m \text{ – целые степени тензорных полиномов.}$$

Данная функция не определена для значений α_k, являющихся корнями уравнений $Q_m(\alpha_k) = 0$.

Нетрудно убедиться, что для введенных элементарных анизотропных тензор-функций выполняются аналогичные обычным элементарным функциям свойства

$$n\ln\alpha = \ln\alpha^n , \qquad \ln e^{\alpha} = \alpha ,$$

$$e^{\alpha} e^{\beta} = e^{\alpha+\beta} , \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \omega .$$

Аналогично определяется анизотропная тензорная функция тензорного аргумента в пространстве $\widetilde{T}_4$,

$$f(\alpha) = \sum_{k=1}^{6} \varphi_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6)\omega^{(k)} \otimes \omega^{(k)} \quad , \quad \varphi_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6) = f(\alpha) \cdot \omega^{(k)} \otimes \omega^{(k)} ,$$

$$\alpha \in \widetilde{T}_4 , \ f(\alpha) \in \widetilde{T}_4 .$$

Критерии предельности

Воспользуемся предложенным математическим аппаратом для получения феноменологических критериев предельности некоторых анизотропных материалов.

Рассматривая пространство напряжений Σ, элементами которого являются тензоры напряжения в данной точке анизотропного тела ($\sigma \in \Sigma \subset \widetilde{S}$), предельную поверхность представим равенством

$$f(\sigma) \cdot \omega = 1 .$$

Для ортоторопных материалов, представляя, в частности, функцию $f(\sigma)$ тензорным полиномом второй степени

$$f(\sigma) = \alpha\sigma^2 + \beta\sigma$$

$$\left(\alpha = \sum_{k=1}^{6} \alpha_k \omega^{(k)} , \quad \beta = \sum_{k=1}^{6} \beta_k \omega^{(k)} , \ \sigma = \sum_{k=1}^{6} \sigma_k \omega^{(k)} , \ \sigma^2 = \sum_{k=1}^{6} \sigma_k^2 \omega^{(k)} \right)$$

и совмещая векторы базиса пространства E^3 с главными осями анизотропии, имеем

$$\alpha_1\sigma_1^2 + \alpha_2\sigma_2^2 + \alpha_3\sigma_3^2 + \alpha_4\sigma_4^2 + \alpha_5\sigma_5^2 + \alpha_6\sigma_6^2 +$$

$$+ \beta_{.1}\sigma_1 + \beta_2\sigma_2 + \beta_3\sigma_3 + \beta_4\sigma_4 + \beta_5\sigma_5 + \beta_6\sigma_6 = 1.$$

В предположении, что предельное состояние инвариантно к смене заданного направления сдвига на противоположное, имеем

$$\alpha_1\sigma_1^2+\alpha_2\sigma_2^2+\alpha_3\sigma_3^2+\alpha_4\sigma_4^2+\alpha_5\sigma_5^2+\alpha_6\sigma_6^2+\beta_1\sigma_1+\beta_2\sigma_2+\beta_3\sigma_3=1\,.$$

Данное феноменологическое уравнение предельной поверхности содержит девять размерных материальных констант и три безразмерных параметра, определяющих вид базисных тензоров $\omega^{(k)}$ $\left(k=1,2,3\right)$ анизотропного тензорного пространства. При дополнительных гипотезах физического характера число параметров, подлежащих экспериментальному определению, может быть уменьшено.

Для пространственно-армированного композита кубической симметрии, направления армирования которого совпадают с осями симметрии третьего и четвертого порядка куба в E^3, с учетом возможного разрушения по разным физическим механизмам (разрыв армирующих волокон при растяжении и потеря их устойчивости при сжатии) приходим, в простейшем случае, к четырехконстантной поверхности прочности в шестимерном пространстве напряжений

$$\alpha_1\sigma_1^2+\alpha_2\sigma_2^2+\alpha_3\sigma_3^2+\alpha_4\sigma_4^2+\alpha_5\sigma_5^2+\alpha_6\sigma_6^2+\beta_1\sigma_1=1,\quad \alpha_2=\alpha_3,\quad \alpha_4=\alpha_5=\alpha_6,$$

$$\sigma_1=\sigma\cdot\omega^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}\right),\quad \sigma_2=\sigma\cdot\omega^{(2)}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}-2\sigma_{33}\right),$$

$$\sigma_3=\sigma\cdot\omega^{(3)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma_{11}-\sigma_{22}\right),\ \sigma_4=\sigma\cdot\omega^{(4)}=\sqrt{2}\sigma_{23},\ \sigma_5=\sigma\cdot\omega^{(5)}=\sqrt{2}\sigma_{31},$$

$$\sigma_6=\sigma\cdot\omega^{(6)}=\sqrt{2}\sigma_{12}.$$

Физический смысл материальных констант этого уравнения становится ясным, если рассмотреть четыре независимых напряженных состояния:

$$1)\,\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}=\eth_{+},\quad \sigma_{23}=\sigma_{31}=\sigma_{12}=0\,;$$

$$2)\,\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}=-\eth_{-},\quad \sigma_{23}=\sigma_{31}=\sigma_{12}=0;$$

$$3)\,\sigma_{11}=-\sigma_{22}=\tau_1,\quad \sigma_{33}=\sigma_{23}=\sigma_{31}=\sigma_{12}=0\,;$$

$$4)\ \sigma_{23}=\tau_2,\quad \sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}=\sigma_{31}=\sigma_{12}=0,$$

где p_+ и p_- – предельные напряжения всестороннего растяжения и сжатия; τ_1 и τ_2 – предельные напряжения простого сдвига в плоскости, проходящей через оси симметрии второго и четвертого порядка, в направлениях осей второго и четвертого порядка соответственно.

Подстановка этих соотношений в уравнение поверхности прочности дает

$$3\alpha_1 p_+^2+\sqrt{3}\beta_1 p_+=1;\ 3\alpha_1 p_-^2-\sqrt{3}\beta_1 p_-=1;\ 2\alpha_2\tau_1^2=1;\ 2\alpha_4\tau_2^2=1\,,$$

откуда

$$\alpha_1=\frac{1}{3p_+p_-};\ \beta_1=\frac{p_--p_+}{\sqrt{3}p_+p_-};\ \alpha_2=\frac{1}{2\tau_1^2};\ \alpha_4=\frac{1}{2\tau_2^2}\,.$$

При независимости предельного состояния от шаровой части тензора напряжений при условии $\tau_1=\tau_2=\tau$, переходя к пятимерному пространству чистых сдвигов [3], получаем простейшую поверхность прочности изотропного материала в виде уравнения сферы в пятимерном пространстве

$$\sigma_2^2+\sigma_3^2+\sigma_4^2+\sigma_5^2+\sigma_6^2=2\tau^2,$$

что соответствует широко применяемой энергетической теории прочности или условию текучести Губера–Мизеса–Генки математической теории пластичности.

Библиографический список

1. Рыхлевский Я. О законе Гука // ПММ. – 1984. – Т. 48. – Вып.3.– С.420 – 435.
2. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 384 с.
3. Ильюшин А.А. Пластичность. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.

Получено 15.06.2004