УДК 539.3

Б.Е. Победря, Р.С. Якушев

Московский государственный университет

О СТРУКТУРНОЙ МЕХАНИКЕ РЕЗИНОКОРДНЫХ КОМПОЗИТОВ

Abstract

The setting of the dynamic problem for rubber-cord composite with nonlineare elastic components with taking account of moment stresses is given. For describing of internal friction the dissipation function is introduced into heat inflow equation. The technique of homogenization for the formulated problem is described. The setting of problem of zero approximation theory is considered.

При моделировании процессов деформирования важное значение имеет учет изменения структуры вещества. Для феноменологического описания этого изменения используются различные способы. Один из таких способов описан в работе [1]. В ней предложены схемы экспериментального нахождения ядер релаксации и ползучести для линейных вязкоупругих композитов с учетом возможных фазовых переходов.

Другим способом служит привлечение нелокальных определяющих соотношений. Чаще всего для этого рассматривается «полярная среда» или среда Коссера [2]. В ней кроме обычных напряжений Пиолы

$$\underset{\sim}{\pi} = \vec{p}^{\,i} \otimes \vec{e}_i = p^{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

вводятся моментные напряжения μ^{ij}

$$\underset{\sim}{\mu} = \vec{\mu}^{\,i} \otimes \vec{e}_i = \mu^{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j .$$

Кинематика такой среды обогащается введением вектора поворота $\vec{\omega} = \omega^i \vec{e}_i$ и спин-вектора $\overrightarrow{M} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ [4].

Градиент вектора поворота носит название тензора изгиба-кручения κ_{ij} [5].

$$\kappa_{ij} = \nabla_j \omega^i \vec{e}^{\,i} \otimes \vec{e}_j .$$

Уравнение движения сплошной среды, являющееся следствием постулата изменения количества движения, записывается в виде

$$\rho \frac{d^2 u^j}{dt^2} = \rho f^j + \nabla_i p^{ij}, \tag{1}$$

где ρ – массовая плотность среды в отсчетной конфигурации [6], u^j – компоненты вектора перемещения, f^j – плотность массовых сил.

Следствием постулата об изменении кинетического момента являются уравнения

$$J \frac{d^2 \omega^j}{dt^2} = JM^j + \nabla_i \mu^{ij} + \frac{1}{\sqrt{g}} \in^{jkl} p_{kl}, \tag{2}$$

где J – плотность моментов инерции, M^j – компоненты вектора массовых моментов.

Все принятые здесь обозначения соответствуют работам [6], [7].

Пусть определяющие соотношения резинокордного композита [8] описываются заданием некоторого упругого потенциала W :

$$W = W(\underset{\sim}{F}, \underset{\sim}{\kappa}, \underset{\sim}{\chi}, T, \xi) \equiv W(f), \tag{3}$$

где $\underset{\sim}{F}$ – градиент деформации [9] или градиент места [1], $\underset{\sim}{\chi}$ – тензор структуры [2].

Здесь аргумент ξ означает, что потенциал зависит от некоторых, вообще говоря, от криволинейных координат:

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial \xi^i}, \quad g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j, \quad g = \det|g_{ij}|, \quad \underset{\sim}{F} = e^i \otimes \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i}, \quad F_{ij} = g_{ij} + \nabla_j u_i \tag{4}$$

Тогда напряжения Пиолы определяются согласно (3)

$$p^{ij} = \frac{\partial W(f)}{\partial F_{ij}}, \quad \mu^{ij} = \frac{\partial W(f)}{\partial \kappa_{ij}} \tag{5}$$

Для тензора структуры примем соотношения [10]:

$$\chi^{ij} = \chi^{ij}(\underset{\sim}{F}, \underset{\sim}{\kappa}, T, \xi) \equiv W(f) \tag{6}$$

(конкретный вид функции (5) обсуждается в работе [2]).

Как следствие законов термодинамики имеем уравнение притока тепла [7]:

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \rho q + w^* + \Lambda^{ij} T_{,j} \nabla_i (\Lambda^{ij} \nabla_j T) - T \frac{d}{dt}[\alpha_{ij} p^{ij}(f) + \beta_{ij} \mu^{ij}(f)], \tag{7}$$

где c_p – теплоемкость, q – массовый приток тепла, α_{ij}, β_{ij} – компоненты тензоров теплового расширения, Λ^{ij} – компоненты тензора теплопроводности $\underset{\sim}{\Lambda} = \Lambda^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$, а функция рассеивания w^* после конкретизации рассматриваемой модели считается известной,

$$w^* = w^*(f). \tag{8}$$

Упругое тело является обратимой моделью [7], но для учета эффекта тепловыделения в результате деформирования в резинокордных композитах упругую модель описывают иногда не только упругим потенциалом (3), а и функцией рассеивания (8).

Конкретное выражение функции (8) можно задать, например, следующим образом:

$$w^* = p^{ij} \frac{d}{dt}(F_{ij} - \alpha_{ij} T) + \mu^{ij} \frac{d}{dt}(\kappa_{ij} - \beta_{ij} T).$$

Пусть заданы некоторые начальные условия при $t = t_0$:

$$T = T^0, \quad u^j = U_0^j; \quad \frac{du^j}{dt} = V_0^j, \quad \omega^j = Q_0^j; \quad \varphi^j = \Phi_0^j \tag{9}$$

и граничные условия на поверхности $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, ограничивающий занимаемый телом объем,

$$u^j|_{\Sigma_1} = u_0^j; \quad p^{ij}(f) n_i|_{\Sigma_2} = s_0^j;$$

$$\omega^j|_{\Sigma_1} = \omega_0^j; \quad \mu^{ij}(f) n_i|_{\Sigma_2} = S_0^j; \quad \Lambda^{ij} \nabla_j T n_i|_{\Sigma} = \eta(T|_{\Sigma} - T_c^0), \tag{10}$$

где η – коэффициент теплоотдачи, u_0^j, ω_0^j, s_0^j, S_0^j, U_0^j, V_0^j, Q_0^j, Φ_0^j, T^0, T_c^0 – заданные на границе тела «входные данные».

Итак, задача А заключается в решении семи дифференциальных уравнений (1), (2), (7), в которых нужно учесть (3)-(5), относительно семи величин u^j, ω^j и T при удовлетворении начальных данных (9) и граничных условий (10).

Заметим, что материальные функции определяющих соотношений (5) и величины ρ, c_p, Λ^{ij} являются разрывными функциями координат. Так что, речь может идти только об обобщенном решении поставленной задачи.

Чтобы найти его, воспользуемся методом осреднения [11]. Для этого введем малый геометрический параметр α и наряду с лагранжевыми координатами ξ^i, которые назовем медленными, введем «быстрые» координаты ζ^i:

$$\zeta = \frac{\xi}{\alpha}.$$

Тогда уравнения (1), (2), (7) запишем соответственно в виде

$$\frac{d^2 u^j}{dt^2} = f^j + \frac{1}{} p^{ij}{}_{|i}(f) + p^{ij}{}_{,i}(f);$$

$$J\frac{d^2\omega^j}{dt^2} = JM^j + \frac{1}{\alpha}\mu^{ij}{}_{|i}(f) + \mu^{ij}{}_{,i}(f) + \frac{1}{\sqrt{g}} \in^{jkl} p_{kl}(f); \tag{11}$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \rho q + w^* + \frac{1}{\alpha}\Lambda^{ij}{}_{|j}T_{,i} + \Lambda^{ij}T_{,ij},$$

где вертикальной чертой обозначается ковариантная производная по быстрой переменной, а запятой – по медленной.

Решение задачи (11), (9), (10) ищем в виде асимптотического разложения по параметру α,

$$u^j = \sum_{m=1}^{\infty}\alpha^m \sum_n N_{(n)}^{(m)j}(F);$$

$$\omega^j = \sum_{m=1}^{\infty}\alpha^m \sum_n \tilde{N}_{(n)}^{(m)j}(F), \tag{12}$$

где аргументом F является совокупность переменных

$$(\zeta, \nabla\vec{v}, ..., \nabla^m\vec{v}, \nabla\frac{\partial}{\partial t}\vec{v}, ..., \nabla^{m-2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{v}, ..., \nabla^{m-2n}\frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}}\vec{v}, \nabla\vec{\varphi}, ...$$

$$..., \nabla^m\vec{\varphi}, \nabla\frac{\partial}{\partial t}\vec{\varphi}, ..., \nabla^{m-2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\varphi}, ..., \nabla^{m-2n}\frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}}\vec{\varphi}),$$

а локальные функционалы $N_{(n)}^{(m)j}$ и $\tilde{N}_{(n)}^{(m)j}$ таковы, что

$$N_{(0)}^{(0)j} = v^j; \quad \tilde{N}_{(0)}^{(0)j} = \varphi^j; \quad N_{(n)}^{(m)j} = \tilde{N}_{(n)}^{(m)j} = 0 \text{ при } m < 2n, \quad m < 0, \quad n < 0.$$

Поэтому суммирование в (12) производится так, чтобы выполнялось неравенство $m - 2n \geq 0$.

$$T = \vartheta(\xi, t) + \sum_{m=1}^{\infty}\alpha^m \sum_n P_{(n)}^{(m)}{}_{i_1,\dots,i_{m-2n}}(\zeta, t)\frac{\partial^n}{\partial t^n}\vartheta_{i_1,\dots,i_{m-2n}}(\xi, t), \tag{13}$$

где суммирование по n происходит от $n = 0$ так, чтобы все верхние индексы m были положительны. Оператор дифференцирования по времени отрицательного порядка тождественно равен нулю, а нулевого порядка – единичному оператору.

Вычисляем соответствующие производные разложений (12), (13) и разлагаем определяющие соотношения (5) и локальные функционалы $N_{(n)}^{(m)j}$, $\tilde{N}_{(n)}^{(m)j}$ в ряды по геометрическому параметру α. Результаты таких процедур подставляем в уравнения (1), (2), (7) и приравниваем величины при одинаковых степенях α некоторым тензорам, зависящим только от медленных координат. Одним словом, применяем технику осреднения, описанную подробно в [11].

Таким образом, исходная задача А сводится к двум рекуррентным последовательностям задач. В первой из них решаются задачи для однородной среды с приведенными (эффективными) характеристиками (задачи B_i ; i = 0,1,…). Каждая последующая задача B_{i+1} отличается от предыдущей B_i входными данными.

Во второй рекуррентной последовательности решаются задачи C_i (i = 0,1,…) для неоднородной среды в области, представляющей собой элемент структуры композита. Задачи C_i не являются начально-краевыми, они должны удовлетворять условиям сопряженности при переходе от одного элемента структуры к другому. Задача C_{i+1} отличается от задачи C_i входными данными. В результате решения каждой из них находятся локальные функционалы, а по ним – эффективные определяющие соотношения, которые используются при решении задач B_i . Отметим, что только задачи B_0 и C_0 являются нелинейными. Все остальные задачи B_1, B_2, …; C_1, C_2, … – линейные.

Согласно теории нулевого приближения [11] в разложениях (12), (13) достаточно сохранить слагаемые с α в нулевой и первой степени.

Тогда задача нулевого приближения состоит в разыскании величин $\vec{u}$, $\vec{\omega}$ и T :

$$\begin{gathered} u^j = v^j(\xi,t) + \quad [N^j(\zeta,\nabla\vec{v},\nabla\vec{\varphi}) + \omega^j(\xi,t)]; \\ \omega^j = \varphi^j(\xi,t) + \quad [\tilde{N}^j(\zeta,\nabla\vec{\varphi},\nabla\vec{v}) + \omega\psi^j(\xi,t)]; \\ T = \vartheta(\xi,t) + \alpha[P^j(\zeta)\,\vartheta_{,i}(\xi,t) + \theta(\xi,t)], \end{gathered} \tag{14}$$

где $\vec{v}$, $\vec{\varphi}$ и ϑ находятся из решения задачи теории эффективного модуля B_0 [11]:

$$<\rho>\frac{d^2v^j}{dt^2} = <\rho> f^j + h^{ij}{}_{,i}(\nabla\vec{v},\nabla\vec{\varphi});$$

$$<J>\frac{d^2\varphi^j}{dt^2} = <J> M^j + H^{ij}{}_{,i}(\nabla\vec{\varphi},\nabla\vec{v}) + \frac{1}{\sqrt{g}}\in^{jkl} h_{kl}(\nabla\vec{v},\nabla\vec{\varphi}); \tag{15}$$

$$<\rho c_p>\frac{d\vartheta}{dt} = <\rho> q + <w^*> + \overset{0}{\Lambda}{}^{ij}\;\vartheta_{,ij} - \vartheta\frac{d}{dt}[\alpha^0_{ij}h^{ij}(\nabla\vec{v},\nabla\vec{\varphi}) + \beta^0_{ij}H^{ij}(\nabla\vec{\varphi},\nabla\vec{v})] \tag{16}$$

с начальными данными при $t = t_0$:

$$\vartheta = T^0; \quad v^j = U^j_0; \quad \frac{dv^j}{dt} = V^j_0; \quad \varphi^j = \mathrm{Q}^j_0; \quad \frac{d\varphi^j}{dt} = \Phi^j_0 \tag{17}$$

и граничными условиями:

$$v^j|_{\Sigma_1} = u^j_0, \quad h^{ij}(\nabla\vec{v},\nabla\vec{\varphi})n_i|_{\Sigma_2} = s^j_0;$$

$$\varphi^j|_{\Sigma_1} = \quad {}^j_0; \quad \mathrm{H}^{ij}(\nabla\vec{\varphi},\nabla\vec{v})n_i|_{\Sigma_2} = S^j_0; \quad \overset{0}{\Lambda}{}^{ij}\;\vartheta_{,j}n_i|_{\Sigma} = \quad {}^0(\vartheta|_{\Sigma} - T^0_c). \tag{18}$$

Величины ω^j, ψ^j и θ, входящие в (14), определяются из решения однородных уравнений равновесия:

$$h^{ij}{}_{,i}(\nabla\vec{\omega},\nabla\vec{\psi}) = 0; \quad H^{ij}{}_{,i}(\nabla\vec{\psi},\nabla\vec{\omega}) = 0$$

и стационарного уравнения теплопроводности

$$\overset{0}{\Lambda}{}^{ij}\;\vartheta_{,ij} = 0,$$

при частичном удовлетворении граничных условий

$$\omega^j|_{\Sigma_1} = -N^j(\zeta,\nabla\vec{v},\nabla\vec{\varphi})|_{\Sigma_1}; \quad \psi^j|_{\Sigma_1} = -\tilde{N}^j(\zeta,\nabla\vec{\varphi},\nabla\vec{v})|_{\Sigma_1}; \quad \vartheta|_{\Sigma} = 0.$$

Локальные функционалы определяются из решения уравнений (задача C_0)

$$W^{ij}{}_{|i}(L) = 0 ; \quad \widetilde{W}^{ij}{}_{|i}(L) = 0 , \tag{19}$$

$$(\Lambda^{mn} P^{i}{}_{|m} + \Lambda^{in})_{|n} = 0 . \tag{20}$$

Здесь аргументом L является выражение $g_{kl} + v_{l,k} + \varphi_{l,k} + N_{l|k} + \widetilde{N}_{l|k}$.

После решения уравнений (19), (20) и удовлетворения условий сопряженности при переходе от одного элемента к другому получаем эффективные характеристики:

$$h^{ij} = < W^{ij}(L) > , \quad H^{ij} = < \widetilde{W}^{ij}(L) > , \quad \overset{0}{\Lambda}{}^{ij} = < \Lambda^{ik} P^{j}{}_{|k} + \Lambda^{ij} > ,$$

$$\eta^0 = < \eta > , \quad \alpha^0_{ij} = < \alpha^{ij} > , \quad \beta^0_{ij} = < \beta^{ij} > . \tag{21}$$

После нахождения эффективных характеристик (21) может быть решена задача B_0 теории эффективного модуля (15)-(18), а значит, и задачи теории нулевого приближения (14).

Отметим, что теорией нулевого приближения в отличие от теории эффективного модуля можно описать разрывы в тангенциальных напряжениях и тепловых потоках.

Библиографический список

1. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
2. Победря Б.Е. Об учете структурных изменений в механике композитов // Конструкции из композитных материалов. – 2000. – Вып. 2. – С. 19-25.
3. Cosserat E., Cosserat F. Theorie descorpes deformables. – Paris: Herman, 1909.
4. Nowacki W. Teoria niesymetryczney sprężystości. – Warszawa: PWN, 1981. – 380 s.
5. Де Вит Р. Континуальная теория дислокаций. – М.: Мир, 1977. – 208 с.
6. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. – М.: Изд-во МГУ, 1986. – 264 с.
7. Победря Б.Е. Модели механики сплошных сред // Изв. РАН. МТТ. – 2000. – № 3. – С. 47-59.
8. Победря Б.Е., Якушев Р.С. О динамике резинокордных композитов // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. – 2004.
9. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. –592 с.
10. Победря Б.Е., Родригес А. Моделирование структуры в механике композитов // Механика композитных материалов. – 2001. – Т. 37. – №5/6. – С. 709-730.
11. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 366 с.

Получено 21.05.2004.