

УДК 539.42 : 620.172.254

М.А.Соковиков**Институт механики сплошных сред УрО РАН****ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ МЕДИ
В ПЛОСКОЙ ВОЛНЕ СЖАТИЯ****Abstract**

In the present work, the evolution of the elastic-plastic wave profile is investigated. A mathematical model is constructed to describe the main features of elastic-plastic wave propagation in copper taking into account the non-linear behavior of the ensemble of interacting microspheres.

Многочисленными экспериментальными исследованиями показано, что важными дефектами структуры, определяющими релаксационные свойства и кинетику разрушения реальных материалов, являются микросдвиги, микротрещины – типичные дефекты мезоуровня. [1-6]. Так, многочисленные структурные исследования процессов нагружения с различными скоростями указывают на определяющую роль в явлениях пластического деформирования согласованного поведения ансамбля этих микродефектов. В данном исследовании построена математическая модель, описывающая основные черты пластического деформирования при высокоскоростном нагружении с учетом нелинейного поведения ансамбля взаимодействующих микросдвигов.

Значительное внимание вопросам природы пластической деформации уделено в работах научного направления, возглавляемого академиком В.Е.Паниным [7–9], в которых развивается представление о деформируемом твердом теле как о многоуровневой системе, в которой пластическое течение развивается как последовательная эволюция потери сдвиговой устойчивости на различных масштабных уровнях: микро, мезо и макро.

В данной работе используется ранее разработанная теория [10–12], в которой методами статистической физики и термодинамики необратимых процессов изучается влияние микросдвигов на упругие и релаксационные свойства твердых тел. Определяющие уравнения сред с микросдвигами имеют следующий вид:

$$\sigma_{ik} = L_1 e_{ik}^p - L_2 \dot{p}_{ik}, \quad \Pi_{ik} = L_2 e_{ik}^p - L_3 \dot{p}_{ik}, \quad (1)$$

Здесь p_{ik} – тензор, характеризующий интенсивность и преимущественную ориентацию микросдвигов; $\Pi_{ik} = \partial F / \partial p_{ik}$ – термодинамическая сила, действующая на систему, когда p_{ik} отличается от равновесного (F – свободная энергия среды с микросдвигами); σ_{ik}, e_{ik}^p – тензоры напряжений и скоростей пластических деформаций; L_i – кинетические коэффициенты, зависящие от p_{ik} . Определяющие уравнения материала (1) включают соотношения релаксационного типа для тензора напряжений и уравнения

движения для параметра p_{ik} . В этих уравнениях учтены "перекрестные" эффекты: влияние микродвигов на релаксационные процессы и пластичности на кинетику роста p_{ik} . В дальнейшем рассматривается случай, когда пластическая деформация подчиняется условию $e_{ii}^p = 0$ (пластическая несжимаемость материала), а среднее напряжение $\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$ определяется через упругие составляющие тензора деформаций.

В рамках данной теории были определены характерные реакции материалов на образование дефектов.

Рассмотрим пластину меди, у которой два размера по x и по y гораздо больше размера по z . Поэтому, используя гипотезу о плоском деформированном состоянии

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0$$

и вводя изменение объема

$$\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}, \quad (2)$$

получаем $\varepsilon = \varepsilon_{zz}$. Принимая, что в волнах напряжений умеренной интенсивности деформации малы, имеем

$$\frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad (3)$$

где v_z – скорость по z .

Записывая уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad (4)$$

уравнение движения для случая плоской деформации

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}, \quad (5)$$

используя закон Гука

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \lambda \varepsilon + 2G \varepsilon_{zz}^e, \\ \sigma_{xx} &= \lambda \varepsilon + 2G \varepsilon_{xx}^e, \\ \sigma_{yy} &= \lambda \varepsilon + 2G \varepsilon_{yy}^e, \end{aligned} \quad (6)$$

где λ – первая постоянная Ляме, G – модуль сдвига, ε – объемная деформация,

$$\sigma = K \varepsilon, \quad (7)$$

где σ – среднее напряжение, K – модуль объемного сжатия,

$$\begin{aligned} K &= \lambda + \frac{2}{3}G, \\ \sigma'_{zz} &= \sigma_{zz} - \sigma, \end{aligned} \quad (8)$$

где σ'_{zz} – компонента девиатора тензора напряжений,

получаем

$$\begin{aligned} \sigma'_{zz} = \sigma_{zz} - \sigma &= \lambda \varepsilon + 2G \varepsilon_{zz}^e - K \varepsilon = \lambda \varepsilon + 2G \varepsilon_{zz}^e - \left(\lambda + \frac{2}{3}G \right) \varepsilon = \lambda \varepsilon - \lambda \varepsilon + 2G \left(\varepsilon_{zz}^e - \frac{1}{3} \varepsilon \right), \\ \sigma'_{zz} &= 2G \left(\varepsilon_{zz}^e - \frac{1}{3} \varepsilon \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Используя представление о малости деформаций, для упругопластической среды имеем

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^e + \varepsilon_{zz}^p,$$

где $\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{zz}^e, \varepsilon_{zz}^p$ – суммарная, упругая, пластическая деформации.

Отсюда

$$\sigma'_{zz} = 2G \left(\varepsilon_{zz} - \frac{1}{3} \varepsilon - \varepsilon_{zz}^p \right). \quad (10)$$

Используя уравнение (9), справедливое для любого напряженного состояния для плоской волны, с учетом (3), (4) запишем

$$\frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial t} = 2G \left(\frac{2}{3} \frac{\partial v_z}{\partial z} - \dot{\varepsilon}_{zz}^p \right). \quad (11)$$

Вводим удельный объем

$$V = \rho_0 / \rho, \quad (12)$$

где ρ_0 – начальное значение плотности, ρ – текущее значение плотности

Уравнение неразрывности приобретает вид

$$\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (13)$$

Используя уравнения (5), (7), (11), (12), запишем

$$\frac{\rho_0}{V} \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial t} = 2G \left(\frac{2}{3} \frac{\partial v_z}{\partial z} - \dot{\varepsilon}_{zz}^p \right), \quad (15)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = K \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (16)$$

Уравнения, описывающие пластические свойства среды, имеют вид

$$\sigma'_{zz} = l_1 \dot{\varepsilon}_{zz}^p - l_2 \frac{\partial p_{zz}}{\partial t}, \quad (17)$$

$$P_{zz} = l_2 \dot{\varepsilon}_{zz}^p - l_3 \frac{\partial p_{zz}}{\partial t}. \quad (18)$$

Динамическое воздействие на пластину описывается граничным условием

$$\sigma_{zz}(0, t) = f(t), \quad (19)$$

где $f(t)$ – функция, описывающая импульс нагрузки формы, близкой к прямоугольной.

Тыльная сторона пластины свободна от нагрузки,

$$\sigma_{zz}(h, t) = 0. \quad (20)$$

Система должна удовлетворять начальным условиям

$$v_z(z, 0) = \sigma_{zz}(z, 0) = p_{zz}(z, 0) = 0, \quad (21)$$

$$z \in [0, 1], t \in [0, \infty),$$

здесь ρ – плотность материала; t – время; z – пространственная координата; v_z – компонента вектора скорости; $\sigma_{zz}, \sigma'_{zz}, \dot{\varepsilon}_{zz}, \dot{\varepsilon}_{zz}^p, p_{zz}$ – компоненты тензоров напряжений, дивергента напряжений, скоростей деформаций, скоростей пластических деформаций, параметра плотности микросдвигов; σ – среднее напряжение; K – модуль объемного сжатия, h – толщина пластины, l_1, l_2, l_3 – кинетические коэффициенты, $P_{zz} = \frac{\partial F}{\partial p_{zz}}$, где

F – свободная энергия.

Обезразмерим систему (13) – (21). Введем безразмерные параметры

$$\bar{\sigma}_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{G},$$

$$\bar{t} = \frac{t}{\Delta t}, \text{ где } \Delta t = l_1 / G,$$

$$\bar{z} = \frac{z}{h},$$

где h – толщина пластины,

$$\bar{v} = \frac{v_{zz}}{h} \frac{l_1}{G},$$

$$\bar{\Pi}_{zz} = \frac{\Pi_{zz}}{G}.$$

Получаем систему уравнений в безразмерном виде

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} = \alpha V \frac{\partial \bar{\sigma}_{zz}}{\partial \bar{z}}, \quad (22)$$

$$\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}'_{zz}}{\partial \bar{t}} = 2 \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} - \bar{\varepsilon}_p \right), \quad (24)$$

$$\bar{\varepsilon}_p = \bar{\sigma}'_{zz} + \frac{l_2}{l_1} \frac{\partial p_{zz}}{\partial \bar{t}} \quad (25)$$

$$\frac{\partial p_{zz}}{\partial \bar{t}} = \frac{l_2}{l_3} \bar{\varepsilon}_p - \Pi', \quad (26)$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{t}} = \frac{K}{G} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}}, \quad (27)$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = \bar{\sigma}'_{zz} + \bar{\sigma}, \quad (28)$$

где $\alpha = \frac{l_1^2}{\rho_0 G h^2}$, $\Pi' = \Delta t \cdot \Pi_{zz} = \frac{l_1}{G} \Pi_{zz} = l_1 \bar{\Pi}_{zz}$.

Функция Π' аппроксимировалась выражением

$$\Pi' = -A \cdot \bar{\sigma}'_{zz} \cdot \exp(-p_a / p_{zz}) + B(p_{zz} - p_b), \quad (29)$$

где A, B, p_a, p_b – параметры аппроксимации.

Численное исследование системы (22)–(29) проводилось методом конечных разностей. Использовались следующие значения констант для меди:

$$\begin{aligned} \rho &= 8,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad E = 1,12 \cdot 10^{11} \text{ Па}, \quad G = 0,408 \cdot 10^{11} \text{ Па}, \\ l_1 &= 1,0 \cdot 10^5 \text{ н}\cdot\text{с}, \quad l_2 = 0,45 \cdot 10^5 \text{ н}\cdot\text{с}, \quad l_3 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ н}\cdot\text{с}, \\ A &= 57,0, \quad B = 0,25 \cdot 10^{-2} \cdot A, \quad p_a = -1,5 \cdot 10^{-3}, \quad p_b = -1,5 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

На рис.1,2 приведены результаты численного моделирования распространения волн напряжений при амплитуде нагружения $\sigma_0 = 3,0 \cdot 10^9$ Па, длительности импульса $\Delta t_0 = 3,675 \cdot 10^{-7}$ с, толщине медной пластины $h = 5,0 \cdot 10^{-3}$ м.

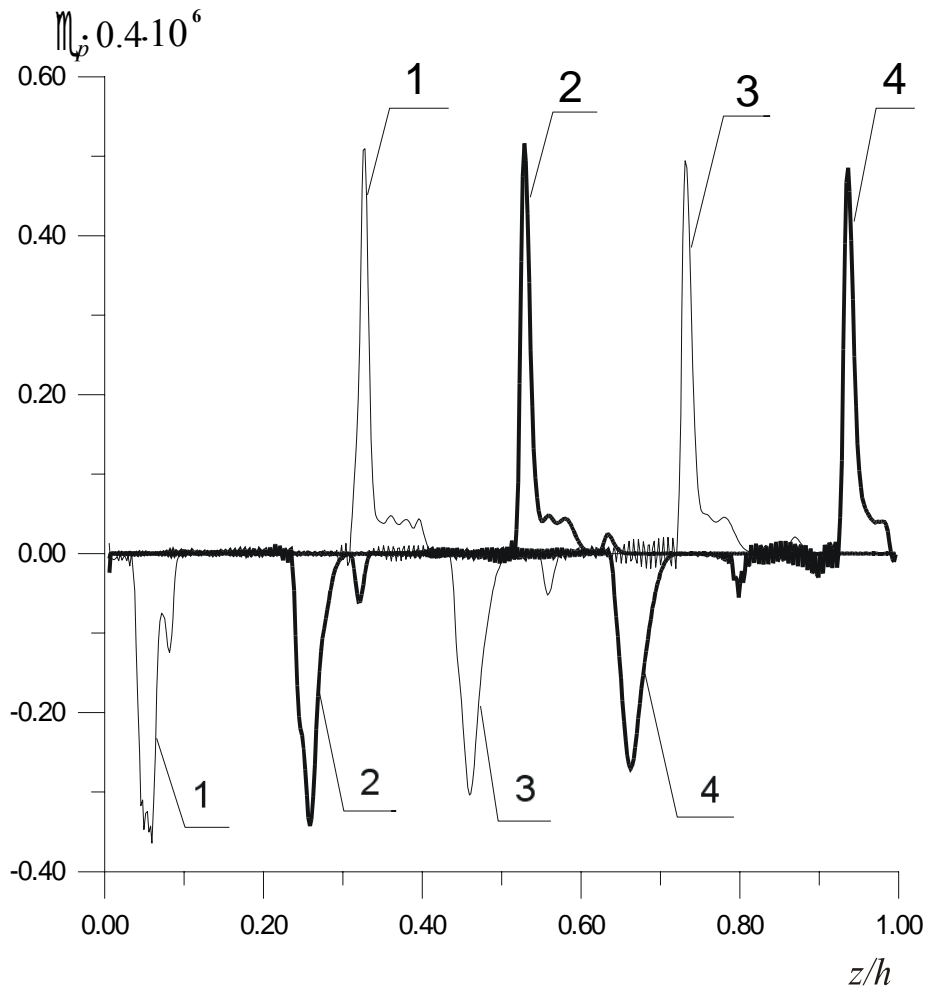


Рис.1. Эволюция плоской волны нагрузки: скорость пластической деформации $\dot{\epsilon}_{zz}^p$ в различные моменты времени: 1 – при $t = 0,42$ мкс; 2 – при $t = 0,66$ мкс; 3 – при $t = 0,91$ мкс; 4 – при $t = 1,15$ мкс

При распространении упругопластической волны на переднем фронте в области напряжений, приблизительно соответствующих пределу упругости Гюгонио, реализуется скачкообразное увеличение скорости пластических деформаций $\dot{\epsilon}_{zz}^p$ (см. рис.1), обусловленное кинетическим переходом по параметру плотности микросдвигов, приводящее к существенному росту темпа релаксации девиаторных компонент тензора напряжений и выделению упругого предвестника (см. рис.2).

На заднем фронте реализуется ступенька соответствующая сначала упругой, а затем пластической разгрузке (см. рис.2).

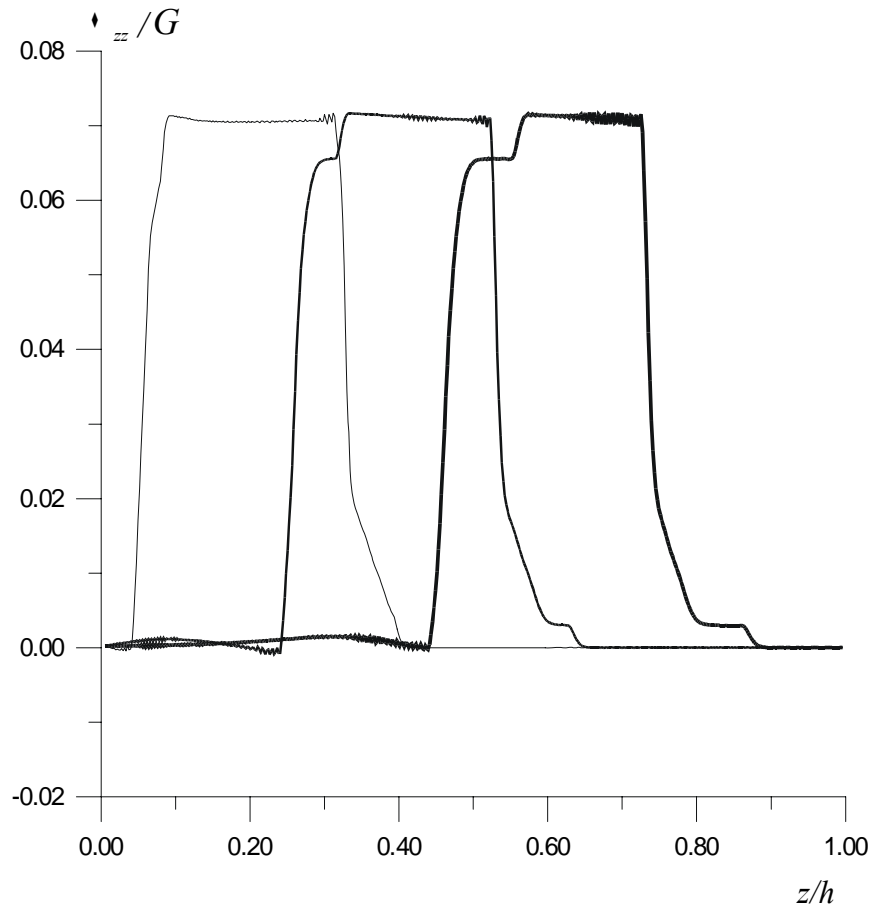


Рис.2. Распространение плоской волны нагрузки:
напряжение σ_{zz} в различные моменты времени: 1 – при
 $t = 0,66$ мкс; 2 – при $t = 0,91$ мкс; 3 – при $t = 1,15$ мкс

Численное моделирование проводилось методом конечных разностей второго порядка точности.

Кинематические величины, в частности скорость, вычислялись в узлах конечно-разностной сетки, напряжения, скорости деформаций, значения параметра плотности микросдвигов вычислялись в центрах ячеек. Вычисление значений в центрах ячеек происходило со сдвигом на половину шага по времени.

Величина шага по времени выбиралась в соответствии с условием устойчивости Куранта.

Достоверность расчетов оценивалась путем численного эксперимента при существенном изменении шагов по координате и времени.

При реализации численного алгоритма моделирования распространения упругопластической волны напряжения использовалось предположение о том, что инварианты тензоров величин, описывающих трехмерное напряженное состояние, подчиняются тем же закономерностям, что и соответствующие величины при одномерном напряженном состоянии. Поэтому при распространении фронта волны оценивалась скорость деформации. Для этой скорости деформации решались уравнения поведения среды с микросдвигами. На каждом шаге по времени определялось эффективное напряжение. Для перехода к трехмерному напряженному состоянию

использовалась процедура приведения к кругу текучести с использованием вычисленного эффективного напряжения.

Библиографический список

1. Владимиров В.И. Физическая природа разрушения металлов. – М.: Металлургия, 1984. – 280 с.
2. Финкель В.М. Физика разрушения.– М.: Металлургия, 1970.–376 с.
3. Тамуж В.П., Куксенко В.С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.
4. Макклинток Ф., Аргон А. Деформация и разрушение материалов. – М.: Мир, 1970. – 454 с.
5. Регель В.Р., Слуцкер А.И., Томашевский Э.Е. Кинетическая природа прочности твердых тел. – М.: Наука, 1974. – 560 с.
6. Пластическая деформация и разрушение кристаллических тел /В.И. Бетехтин, В.И. Владимиров, А.Г. Кадомцев, А.И. Петров //Проблемы прочности. – 1979.– №7.–С.38–45; №8.–С.51–57; №9.–С.3–9.
7. Панин В.Е., Лихачев В.А., Гриняев Ю.В. Структурные уровни деформации твердых тел. – Новосибирск: Наука, 1985.– 229 с.
8. Структурные уровни пластической деформации и разрушения /В.Е. Панин, Ю.В. Гриняев, В.И. Данилов и др. – Новосибирск: Наука, 1990. – 225 с.
9. Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов. В 2 т. /Под ред. В.Е.Панина. – Новосибирск: Наука, 1995. – 297 с. и 320 с.
10. Наймарк О.Б. О термодинамике деформации и разрушение твердого тела с микротрещинами /Институт механики сплошных сред, АН СССР. – Свердловск, 1982.– С.3–34.
11. Naimark, O.B. Kinetic transition in ensembles of microcracks and some nonlinear aspects of fracture //Proceedings IUTAM Symposium on nonlinear analysis of fracture. – Kluwer, The Netherlands, 1996.
12. Беляев В.В., Наймарк О.Б. Кинетические переходы в средах с микротрещинами и разрушение металлов в волнах напряжений //Журнал прикладной механики и технической физики.–1987.–№1.–С.163–171.

Получено 9.06.2004.