УДК 539.3

В.В. Стружанов

Институт машиноведения УрО РАН

О РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

Abstract

Elasticity theory problems are considered with the given volume and surface forces in the functional energetic spaces of stress and strain tensors. The solutions of these problems are shown to be the orthoprojections of the tensors, which necessary characteristics are determined by the conditions of the problems, on the corresponding subspaces of the energetic space. The method is demonstrated on certain examples.

Метод ортогональных проекций имеет большое значение для решения различных задач математической физики, т.к. позволяет найти обобщенные решения для широкого класса областей [1]. Эффективное применение этого метода в теории упругости стало возможным после введения энергетических гильбертовых пространств тензоров напряжений [1]. В данной работе приведено систематическое изложение результатов, полученных автором в течение ряда лет по проблеме применения метода ортопроекций, основанного на теории энергетических пространств, для решения краевых задач теории упругости при заданных объемных и поверхностных силах [2-7].

Пространства L_2, L_2^v, L_2^t

Пусть V – область в трехмерном евклидовом пространстве R^3, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью Г. Множество вещественных функций, определенных почти везде в V и квадратично суммируемых в V, есть линеал. Определим на этом линеале скалярное произведение, полагая [8]

$$(\varphi, \psi) = \int_V \varphi(x)\psi(x)dV \ ,$$

где x – переменная точка области V. Введя скалярное произведение, этот линеал превращен в вещественное сепарабельное гильбертово пространство $L_2(V)$ с нормой $\|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi)$.

Возьмем теперь линеал векторных функций, каждая из которых имеет компоненты, принадлежащие к классу $L_2(V)$. На данном линеале введем скалярное произведение по формуле

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dV \ ,$$

где $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ – трехмерные векторы, а точка обозначает обычное скалярное произведение векторов. Тем самым получаем гильбертово пространство $L_2^v(V)$ с нормой $\|\mathbf{u}\|^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{u})$, обладающее свойствами пространства $L_2(V)$.

И, наконец, рассмотрим линеал симметричных тензоров второго ранга с компонентами, принадлежащими классу $L_2(V)$. Превратим его в гильбертово пространство, определив на нем скалярное произведение и норму по формулам [9]

$$[\mathbf{p},\mathbf{q}] = \int_V \mathbf{p}\cdot\cdot\mathbf{q}\,dv, \quad \|\mathbf{p}\|^2 = [\mathbf{p},\mathbf{p}],$$

где двумя точками обозначено двойное скалярное произведение тензоров [10]. Данное пространство $L_2^t(V)$ также обладает всеми свойствами пространства $L_2(V)$.

Энергетические пространства тензоров второго ранга

Возьмем симметричный положительно определенный тензор четвертого ранга $\mathbf{S}(x),\ x\in \mathrm{V}$, в общем случае неоднородный и анизотропный. Будем рассматривать его как положительно определенный оператор, действующий в полном гильбертовом пространстве $L_2^t(V)$ по правилу $\mathbf{S}\cdot\cdot\mathbf{p}=\mathbf{q},\ \ \mathbf{p},\mathbf{q}\in L_2^t(V)$. Построим энергетическое пространство $T(V)$ [1], определив на элементах из $L_2^t(V)$ скалярное произведение и норму по формулам

$$(\mathbf{q},\mathbf{p}) = [\mathbf{q},\mathbf{S}\cdot\cdot\mathbf{p}] = \int_V \mathbf{q}\cdot\cdot\mathbf{S}\cdot\cdot\mathbf{p}dV, \quad \|\mathbf{p}\|^2 = (\mathbf{p},\mathbf{p}). \tag{1}$$

Непосредственно проверяется, что данные выражения удовлетворяют всем аксиомам скалярного произведения и нормы [1]. А именно $(\lambda_1\mathbf{q}_1+\lambda_2\mathbf{q}_2,\mathbf{p}) = \lambda_1(\mathbf{q}_1,\mathbf{p})+\lambda_2(\mathbf{q}_2,\mathbf{p})$ $(\lambda_1,\lambda_2 - \mathrm{const},\ \mathbf{p},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2\in T)$; далее в силу положительной определенности тензора $\mathbf{S}$ имеем $(\mathbf{p},\mathbf{p}) = \int_V \mathbf{p}\cdot\cdot\mathbf{S}\cdot\cdot\mathbf{p}dV \ge \lambda\int_V \mathbf{p}\cdot\cdot\mathbf{p}dV \ge 0$ $(\lambda>0)$ и, если $(\mathbf{p},\mathbf{p})=0$, то $\mathbf{p}=0$; наконец, $(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \int_V S_{\alpha\beta\gamma\delta}\ q_{\alpha\beta}\,p_{\gamma\delta}dV = (\mathbf{q},\mathbf{p})$ (суммирование по греческим индексам $\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,2,3$).

Пространство $T(V)$ из-за положительной определенности оператора $\mathbf{S}$ и сепарабельности исходного пространства $L_2^t(V)$ обладает всеми свойствами пространства $L_2^t(V)$ [1].

Выделим в пространстве $T(V)$ подпространства

$$T_1 = \{\mathbf{p}' : \mathbf{e}' = \mathbf{S}\cdot\mathbf{p}',\ \mathbf{e}' = \mathrm{def}\mathbf{u}\}, \quad T_2 = \{\mathbf{p}'' : \nabla\cdot\mathbf{p}'' = 0,\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{p}'' = 0\},$$

замкнутые своими предельными точками. Здесь $\boldsymbol{n}$ – вектор внешней нормали к поверхности Г, $\boldsymbol{u}$ – вектор с компонентами из $L_2(V)$, ∇ – дифференциальный набла-оператор $(\nabla\cdot\mathbf{p}'' = \mathrm{div}\,\mathbf{p}'')$ [10], def– оператор деформации, преобразующий вектора из $L_2^v(V)$ в симметричные тензоры второго ранга, компоненты которого определяются по правилу $e'_{i,j} = (\mathrm{def}\,\mathbf{u})_{ij} = 0{,}5(u_{i,j}+u_{j,i})$, где u_i – координаты вектора, запятой обозначается производная по соответствующей координате x_i точки области $V\ (i,j=1,2,3)$.

Элементы подпространства T_1 можно трактовать как тензоры напряжений, являющиеся решениями краевой задачи теории упругости

$$\nabla\cdot\mathbf{p}' = \mathbf{f}, \quad \mathbf{e}' = \mathrm{def}\ \mathbf{u},\ \mathbf{p}' = \mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{e}',\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{p}' = \mathbf{t} \tag{2}$$

при всевозможных объемных и поверхностных силах. Здесь $\mathbf{f}(x)(x\in V)$ – вектор объемных сил, $\mathbf{t}(x)(x\in\Gamma)$ – вектор поверхностных сил, $\mathbf{C}=\mathbf{S}^{-1}$ – тензор модулей упругости, $\boldsymbol{S}$– тензор модулей податливости, $\mathbf{p}'$ – тензор напряжений, $\mathbf{e}'$ – тензор деформаций, $\nabla \cdot \mathbf{p}' = \mathbf{f}$ – уравнения равновесия, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}' = \mathbf{t}$ – граничные условия в напряжениях. Элементы подпространства T_2 можно трактовать как решения краевой задачи

$$\nabla \cdot \mathbf{p}'' = 0, \quad \mathbf{e}' = \operatorname{def} \mathbf{u}, \mathbf{p}'' = \mathbf{C} \cdot\cdot (\mathbf{e}' - \boldsymbol{\varepsilon}^*), \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}'' = 0 \tag{3}$$

для всевозможных симметричных тензоров второго ранга $\boldsymbol{\varepsilon}^*$. Тензоры $\mathbf{p}''$ представляют собой тензоры собственных самоуравновешенных в области V напряжений, возникающих в теле при создании в нем поля первоначальных (собственных) деформаций, заданного тензором $\boldsymbol{\varepsilon}^*$. При данной трактовке норма (1) задает выражение для потенциальной энергии упругих деформаций.

Пространство T является ортогональной суммой подпространства T_1 и T_2, то есть $T = T_1 \oplus T_2$. Действительно, если $\mathbf{p}' \in T_1$, а $\mathbf{p}'' \in T_2$, то, используя формулу Остроградского – Гаусса, находим

$$(\mathbf{p}'', \mathbf{p}) = \int_V \mathbf{p}'' \cdot\cdot \mathbf{S} \cdot\cdot \mathbf{p}' dV = \int_V \mathbf{p}'' \cdot\cdot \mathbf{e}' dV = \int_V \mathbf{p}'' \cdot\cdot \operatorname{def} \mathbf{u}\, dV = -\int_V \nabla \cdot \mathbf{p}'' \cdot \mathbf{u}\, dV + \int_\Gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}'' \cdot \mathbf{u}\, d\Gamma = 0 .$$

Отсюда подпространства T_1 и T_2 ортогональны. Далее любой тензор $\mathbf{p} \in T$ всегда можно единственным образом представить в виде $\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}''$ $(\mathbf{p}' \in T_1, \mathbf{p}'' \in T_2)$. Предположим, что составляющие тензора $\mathbf{p}$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы в $(V + \Gamma)$. Найдем $\nabla \cdot \mathbf{p} = \mathbf{f}'$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{t}'$ и из решения задачи (2) с данными значениями объемных и поверхностных сил определим $\mathbf{p}' \in T_1$. Теперь достаточно положить $\mathbf{p}'' = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$. Пусть $\mathbf{p}$ – произвольный тензор. В силу сепарабельности пространства T в нем существует счетное всюду плотное множество. Известно [1], что для пространства $L_2(V)$ таковым является в частности множество N непрерывных и непрерывно дифференцируемых в $(V + \Gamma)$ функций. Следовательно, множество M – тензоров с компонентами из N счетно и всюду плотно в T. Отсюда тензор $\mathbf{p}$ можно приблизить элементами из M, т.е. $(\mathbf{p}_\chi, \xi) \to (\mathbf{p}, \xi)$ ($\mathbf{p}_\chi \in M, \xi$ – любой тензор из T). Ясно, что $\mathbf{p}_\chi = \mathbf{p}'_\chi + \mathbf{p}''_\chi$, $\mathbf{p}''_\chi \in T_1, \mathbf{p}''_{\chi\hat{e}} \in T_2$. Пусть $\xi \in T_1$. Тогда $(\mathbf{p}_\chi, \xi) = (\mathbf{p}'_\chi + \mathbf{p}''_\chi, \xi) = (\mathbf{p}'_\chi, \xi) \to (\mathbf{p}', \xi)$, т.е. последовательность $\mathbf{p}'_\chi$ сходится по метрике пространства T к элементу $\mathbf{p}' \in T_1$, так как подпространства T_1 и T_2 содержат все свои предельные точки. Отсюда $(\mathbf{p}, \xi) = (\mathbf{p}', \xi)$ и $(\mathbf{p}, \xi) - (\mathbf{p}', \xi) = 0$. Следовательно, $(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \xi) = 0$, т.е. $\mathbf{p} - \mathbf{p}' \in T_2$.

Аналогично изложенному выше введем на элементах $L_2^t(V)$ энергетическое пространство $H(V)$ положительно определенного оператора $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}$), определив скалярное произведение и норму по формулам

$$(\mathbf{e}, \boldsymbol{\theta})_H = [\mathbf{C} \cdot\cdot \mathbf{e}, \boldsymbol{\theta}] = \int_V \boldsymbol{\theta} \cdot\cdot \mathbf{C} \cdot\cdot \mathbf{e}\, dV, \quad \|\mathbf{e}\|_H^2 = (\mathbf{e}, \mathbf{e})_H, \mathbf{e}, \boldsymbol{\theta} \in L_2^t(V).$$

Гильбертовы пространства T и H линейно изометричны в силу их сепарабельности и бесконечномерности [8]. Оператором линейной изометрии, отображающим H на T, является тензор $\mathbf{C}$. Действительно, пусть $\mathbf{e} \in H$, $\mathbf{p} = \mathbf{C} \cdot\cdot \mathbf{e} \in T$. Тогда отображение H в T осуществляется с сохранением нормы

$$(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = (\mathbf{C} \cdot\cdot \mathbf{e}, \mathbf{C} \cdot\cdot \mathbf{e}) = [\mathbf{S} \cdot\cdot \mathbf{C} \cdot\cdot \mathbf{e}, \mathbf{C} \cdot\cdot \mathbf{e}] = [\mathbf{e}, \mathbf{C} \cdot\cdot \mathbf{e}] = (\mathbf{e}, \mathbf{e})_H .$$

Очевидно, что оператором линейной изометрии, отображающим T на H, является тензор $\mathbf{S}$. Применяя теперь оператор $\mathbf{S}$ к элементам подпространств T_1 и T_2, находим, что эти подпространства линейно изометричны подпространствам

$H_1 = \{\mathbf{e}'; \mathbf{e}' = \operatorname{def} \mathbf{u}\}$, $H_2 = \{\mathbf{e}'' : \mathbf{e}'' = \mathbf{S} \cdot\cdot \mathbf{p}'', \mathbf{p}'' \in T_2\}$ и $H = H_1 \oplus H_2$. Заметим, что элементами подпространства H_1 являются тензоры деформаций, удовлетворяющие условиям совместности ($\operatorname{Jnk} \mathbf{e}' = \operatorname{Jnk} \operatorname{def} \mathbf{u} = 0$ [10], Jnk– оператор несовместности). Элементами подпространства H_2 являются тензоры собственной несовместной деформации, которые вызывают появление полей самоуравновешенных напряжений и связаны с этими напряжениями непосредственно законом Гука. Из данных рассуждений следует, что закон Гука в линейной теории упругости ($\mathbf{p} = \mathbf{C} \cdot\cdot \mathbf{e},\ \ \mathbf{e} = \mathbf{S} \cdot\cdot \mathbf{p}$) осуществляет линейную изометрию между пространствами тензоров деформаций и тензоров напряжений и наоборот.

Ортонормированные базисы

Так как подпространства полного сепарабельного гильбертова пространства сами являются полными сепарабельными гильбертовыми пространствами, то в них существуют ортонормированные базисы [8]. Построим такой базис в подпространстве H_1. Рассмотрим сначала пространство $L_2^v(V)$ и представим его суммой подпространств $L_2'' = \{\mathbf{u}'' : \mathbf{u}'' = \mathbf{A} + \mathbf{\Lambda r}\}$, $L_2' = \left\{\mathbf{u}' : \int_V \mathbf{u}' dV = 0,\ \ \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{u}' dV = 0\right\}$, где $\mathbf{A}$ – произвольный постоянный вектор, $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$ – радиус-вектор переменной точки области V, косой крестик означает векторное произведение векторов, $\mathbf{\Lambda}$ – кососимметричная матрица с постоянными компонентами $\Lambda_{11} = \Lambda_{22} = \Lambda_{33} = 0$, $\Lambda_{12} = -\Lambda_{21} = \gamma$, $\Lambda_{31} = -\Lambda_{13} = \beta$, $\Lambda_{23} = -\Lambda_{32} = \alpha$. Подпространства L_2', L_2'' замкнуты своими предельными точками. Элементами подпространства L_2'' являются все нетривиальные решения уравнения $\operatorname{def} \mathbf{u} = 0$, т.е. векторы жесткого смещения тела V. Элементами подпространства L_2' являются векторы перемещений точек тела V, главный вектор и главный момент которых равны нулю (исключается жесткое смещение тела) и которые связаны с деформацией объема V по правилу $\boldsymbol{\varepsilon} = \operatorname{def} \mathbf{u}$ (производные здесь понимаются в обобщенном смысле). Таким образом, оператор def отображает элементы из L_2' в подпространство H_1.

Подпространства L'' и L_2' ортогональны. Действительно

$$(\mathbf{u}'', \mathbf{u}') = \int_V (\mathbf{A} + \mathbf{\Lambda r}) \cdot \mathbf{u}' dV = \mathbf{A} \cdot \int_V \mathbf{u}' dV + \gamma \int_V (u_1' x_2 - u_2' x_1) dV +$$
$$+ \beta \int_V (u_3' x_1 - u_3' x_3) dV + \alpha \int_V (u_2' x_3 - u_3' x_2) dV = 0$$

(в силу равенства нулю главного вектора и главного момента вектора $\mathbf{u}'$). Кроме того, каждый элемент из L_2^v единственным образом представим суммой $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}''$. Достаточно за $\mathbf{u}''$ взять вектор $\mathbf{A} + \mathbf{\Lambda r}$, где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{\Lambda}$ – решения уравнений $\mathbf{A} \int_V dV = \int_V \mathbf{u} dV$, $\int_V \mathbf{r} \times \mathbf{\Lambda r} dV = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{u} dV$. После этого $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - (\mathbf{\grave{A}} + \mathbf{\Lambda r})$. Итак $L_2^v = L_2' \oplus L_2''$.

Возьмем теперь в $L_2^v(V)$ некоторую последовательность линейно-независимых векторов $\mathbf{u}_k\ (k = 1,2,...)$. Каждый вектор единственным образом представим суммой $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k' + \mathbf{u}_k''$, $\mathbf{u}_k'' \in L_2'', \mathbf{u}_k' \in L_2'$. Действуя на элементы исходной системы оператором def, получаем

$$\operatorname{def} \mathbf{u}_k = \operatorname{def} \mathbf{u}_k' + \operatorname{def} \mathbf{u}_k'' = \mathbf{e}_k' = \operatorname{def} \mathbf{u}_k'',$$

где в силу линейности оператора def последовательность $\mathbf{e}'_k$ является системой линейно-независимых элементов подпространства H_1. Применим к ней процесс ортогонализации Шмидта [8]. Полагаем $\boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{e}'_1,\ \boldsymbol{\kappa}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 / \|\boldsymbol{\omega}_1\|_H$, $\boldsymbol{\omega}_k = \mathbf{e}'_k - \sum_{n=1}^{k-1} (\mathbf{e}'_k, \boldsymbol{\kappa}_n)_H \boldsymbol{\kappa}_n$, $\boldsymbol{\kappa}'_k = \boldsymbol{\omega}_k / \|\boldsymbol{\omega}_k\|_H$, $k > 1$. Полученную ортонормированную систему $\mathbf{e}'_k$ всегда можно достроить до ортонормального базиса подпространства H_1 [8]. Действуя затем на каждый элемент этого базиса оператором изометрии C, находим ортонормальный базис $\mathbf{q}'_k = \mathbf{C} \cdot\cdot \boldsymbol{\kappa}'_k$ подпространства T_1.

Ортонормированные базисы в цилиндрических областях

Возьмем область V_r в виде длинного полого кругового цилиндра с внутренним радиусом a и внешним b. В частном случае $a = 0$. Пусть в V_r задан линеал квадратично суммируемых функций, зависящих лишь от расстояния r от оси цилиндра ($a \le r \le b$). Тогда пространство $L_2^v(V_r) = L_2(a,b)$ и скалярное произведение в нем равно $(\varphi, \psi) = 2\pi \int_a^b \varphi(r)\psi(r) r dr$. Полагаем далее, что пространство $L_2^v(V_r)$ состоит из векторов, направленных по радиусам цилиндра, причем их длина зависит только от r, то есть эти вектора имеют только одну радиальную компоненту из класса $L_2(a,b)$ (остальные две компоненты равны нулю). Теперь пространство $H(V_r)$ состоит из диагональных тензоров с компонентами из $L_2(a,b)$, а именно: $e_{11} = e_r(r),\ e_{22} = e_\theta(r),\ e_{33} = e_z = 0$. Это обусловлено тем, что оператор def отображает элементы из $L_2^v(V_r)$ в подпространство $H_1(V_r)$. Действуя же на векторы из $L_2^v(V_r)$ оператором def, записанным в цилиндрической системе координат, получаем $e'_r = du/dr$, $e'_\theta = u/r$, $e'_z = 0$. Здесь и далее индексом r обозначаем радиальные напряжения и деформации, индексом θ – тангенциальные, индексом z компоненты, направленные вдоль оси цилиндра, производная функции $u(r) \in L_2(a,b)$ в общем случае понимается в обобщенном смысле, т.е. функция v является производной функции u, если для произвольной бесконечно дифференцируемой в замкнутой области и равной нулю в окрестности ее границы функции $\varphi(r)$ выполняется равенство $(u, \varphi'_r) = -(v, \varphi)$, полученное интегрированием по частям выражения, стоящего слева.

Полагая, что тензоры $\mathbf{C}$ и $\mathbf{S}$ в объеме V_r однородны и изотропны, т.е. их компоненты

$$C_{ijmn} = \lambda\, \delta_{ij}\delta_{mn} + \mu(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}),$$

$$S_{ijmn} = -\lambda[2\mu(3\lambda + 2\mu)]^{-1} \delta_{ij}\delta_{mn} + (4\mu)^{-1}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}),$$

где $\lambda = \nu E[(1+\nu)(1-2\nu)]^{-1}$, $\mu = E[2(1+\nu)]^{-1}$ – коэффициенты Ляме, E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона, δ_{ij} – символ Кронекера, определяющий единичный изотропный тензор второго ранга, i, j, m, n =1,2,3, получаем скалярное произведение и норму пространства $H(V_r)$ в виде

$$(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{e})_{H(V_r)} = 2\pi \int_a^b \{\varepsilon_r [(\lambda + 2\mu)e_r + \lambda e_\theta] + \varepsilon_\theta [\lambda e_r + (\lambda + 2\mu)e_\theta]\ \} r dr,$$

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2_{H(V_r)} = 2\pi\int_a^b \left[(\lambda + 2\mu)\left(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2\right) + 2\lambda\,\varepsilon_r\varepsilon_\theta\right] r dr. \tag{4}$$

Отметим, что компоненты тензоров, принадлежащих подпространству $H_1(V_r)$, – суть деформации, имеют место при осесимметричном плоском деформированном состоянии цилиндрической области V_r. Квадрат нормы в выражении (4) определяет удвоенную потенциальную энергию цилиндрического тела единичной высоты.

Перейдем теперь к построению базисов в подпространстве $H_1(V_r)$, используя схему, изложенную выше. Подпространство $L_2^v(V_r)$ состоит из векторов с одной радиальной компонентой $u_r(r)$. Известно [8], что одной из линейно независимых систем функций одной переменной r, заданных в неодносвязной области V_r, является система

$$u_r : r, r^{-1}, r^2, r^{-2}, \ldots \tag{5}$$

Применяя оператор def и ортонормируя полученную линейно-независимую систему тензоров по методу Шмидта с использованием выражений (4), находим ортонормированную систему в $H_1(V_r)$: $\boldsymbol{\kappa}_1', \boldsymbol{\kappa}_2', \ldots$. Затем получаем ортонормированную систему в $H_1(V_r)$: $\mathbf{q}_k' = \mathbf{C}\cdot\cdot\boldsymbol{\kappa}_k'$. Выпишем компоненты нескольких элементов найденной системы

$$q_{1r}' = q_{1\theta}' = c\left(\sqrt{2\pi\, c\left(b^2 - a^2\right)}\right)^{-1}, \;\; c = E\left[(1+\nu)(1-2\nu)\right]^{-1};$$

$$q_{2r}' = -q_{2\theta} = -c(1-2\nu)ba\left(r^2\sqrt{2\pi\, c(1-2\nu)\left(b^2 - a^2\right)}\right)^{-1};\ldots \tag{6}$$

Третий компонент диагонального тензора определяем всегда по формуле $q_z' = \nu\left(q_r' + q_\theta'\right)$.

Дополним систему (5) непрерывными, кусочно-дифференцируемыми функциями специального вида, не изменяющими ее линейной независимости. Имеем

$$u_r : r, \frac{1}{r}, \frac{2}{r}\int_a^r z\lambda(z)dz, r^2, \frac{1}{r^2}, \frac{3}{r^2}\int_a^r z^2\lambda(z)dz, \ldots$$

где функция $\lambda(r)$ принимает значения ноль или единица в заданных отрезках. Ортонормированная система в подпространстве $T_1(V_r)$ имеет вид (компоненты соответствующих тензоров)

$$q_{1r}' = q_{1\theta}' = c\left[2\pi c\left(b^2 - a^2\right)\right]^{-1/2};$$

$$q_{2r}' = -q_{2\theta}' = -c(1-2\nu)bar^{-2}\left[2\pi c(1-2\nu)\left(b^2 - a^2\right)\right]^{-1/2};$$

$$q_{3r}' = A_1\left[-\frac{(1-2\nu)}{r^2}\int_a^r z\lambda(z)dz + \lambda(r)(1-\nu) - B_1\int_a^b r\lambda(r)dr + \right.$$

$$\left. + \frac{2B_2(1-2\nu)}{r^2}\int_a^b \frac{1}{r^3}\left(\int_a^r z\lambda(z)dz\right)dr - \frac{B_2(1-2\nu)}{r^2}\int_a^b \frac{1}{r}\lambda(r)dr\right],$$

$$q_{3\theta}' = A_1\left[\frac{(1-2\nu)}{r^2}\int_a^r z\lambda(z)dz + \lambda(r)\nu - B_1\int_a^b r\lambda(r)dr - \right.$$

$$-\frac{2B_2(1-2\nu)}{r^2}\int_a^b \frac{1}{r^3}\left(\int_a^r z\lambda(z)dz\right)dr + \frac{B_2(1-2\nu)}{r^2}\int_a^b \frac{1}{r}\lambda(r)dr\Bigg],...$$

где $B_1 = \left(b^2 - a^2\right)^{-1}$, $B_2 = a^2 b^2 B_1$, $A_1 = 2c\left[8\pi c(1-\nu)\int_a^b r\lambda(r)dr\left(1 - 2B_1\int_a^b r\lambda(r)dr\right)\right]^{-1/2}$.

Пусть $a = 0$ (область V_r – сплошной цилиндр). Тогда ортонормированный базис строим на основе последовательности

$$u_r : r, r^2, r^3, ... \tag{7}$$

Производя необходимые действия, получаем компоненты тензоров базиса в $T_1(V_r)$:

$$q'_{1r} = q'_{1\theta} = c\left(b\sqrt{2\pi c}\right)^{-1};$$
$$q'_{2r} = M_1\left[(2-\nu)r - b\right],\quad q'_{2\theta} = M_1\left[(1+\nu)r - b\right],$$
$$M_1 = c\left(b^2\sqrt{2\pi c(1-\nu)}/2\right)^{-1};$$
$$q'_{3r} = M_2\left[(3-2\nu)r^2 - \frac{8}{5}b(2-\nu)r + \frac{3}{5}b^2\right],$$
$$q'_{3\theta} = M_2\left[(1+2\nu)r^2 - 8/5\, b(1+\nu)r + 3/5\right],$$
$$M_2 = c\left(b^3\sqrt{2\pi c(1-\nu)}\, 2/75\right)^{-1};\qquad \ldots \tag{8}$$

Дополним систему (9) непрерывными, кусочно-дифференцируемыми функциями специального вида. Имеем

$$u_r : r, \frac{2}{r}\int_0^r z\lambda(z)dz, r^2, \frac{3}{r^2}\int_0^r z^2\lambda(z)dz, ...$$

После выполнения необходимых действий находим ортонормированную систему тензоров в $T_1(V_r)$, компоненты которых

$$q'_{1r} = q'_{1\theta} = c\left(b\sqrt{2\pi c}\right)^{-1};$$
$$q'_{2r} = A_2\left[-\frac{(1-2\nu)}{r^2}\int_0^r z\lambda(z)dz + \lambda(r)(1-\nu) - \frac{1}{b^2}\int_0^b z\lambda(z)dz\right],$$
$$q'_{2\theta} = A_2\left[\frac{1-2\nu}{r^2}\int_0^r z\lambda(z)dz + \lambda(r)\nu - \frac{1}{b^2}\int_0^b z\lambda(z)dz\right],$$
$$A_2 = 2c\left[8\pi c(1-\nu)\int_0^b r\lambda(r)dr\left(1 - \frac{2}{b^2}\int_0^b r\lambda(r)dr\right)\right]^{-1/2};\ ...$$

И, наконец, возьмем линейно-независимую систему

$$u_r : r, \left\{a_1 r, 0 \le r \le a_1;\ a_1^3 r^{-1}, a_1 \le r \le b\right\}, \left\{a_1 r, 0 \le r \le a_1;\ r^2, a_1 \le r \le b\right\}, ... \tag{9}$$

Ей соответствует ортонормированная система тензоров из $T_1(V_r)$ с компонентами

$$q'_{1r} = q'_{1\theta} = c\left(b\sqrt{2\pi c}\right)^{-1};$$
$$q'_{2r} = q'_{2\theta} = A_3,\quad 0 \le r \le a_1,$$
$$q'_{2r} = -A_4 a_1^3\left[b^2(1-2\nu) + r^2\right]/b^2 r^2,$$

$$q'_{2\theta} = A_4 a_1^3 \left[b^2(1-2\nu) - r^2\right] / b^2 r^2 \,, \,,\ a_1 \le r \le b\,,$$
$$A_4 = bc\left[2\pi c\left(b^2 - a^2\right) + 2a_1^4(1-\nu)\right]^{-1/2},\ A_3 = A_4 a_1\left(b^2 - a_1^2\right)/b^2\,;$$
$$q'_{3r} = q'_{3\theta} = 0 \quad 0 \le r < a_1,$$
$$q'_{3r} = A_5\left[(2-\nu)r - b - b^2 a_1^2(1-2\nu)(b+a_1)^{-1} r^{-2} - a_1^2 (b+a_1)^{-1}\right],$$
$$q'_{3\theta} = A_5\left[(1+\nu)r - b + b^2 a_1^2(1-2\nu)(b+a_1)^{-1} r^{-2} - a_1^2 (b+a_1)^{-1}\right], a_1 \le r \le b,$$
$$A_5 = c\left\{\pi c(1-\nu)\left[0{,}25\left(b^4 - a_1^4\right) - 2b^2 a_1^2 (b-a_1)/(b+a_1)\right]\right\}^{-1/2};\ldots \tag{10}$$

Метод ортогональных проекций

Рассмотрим сначала систему уравнений линейной теории упругости (2). Очевидно, что ее решением является некоторый тензор напряжений $\mathbf{p}' \in T_1$, удовлетворяющий условиям $\nabla\cdot\mathbf{p}' = \mathbf{f}$, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}' = \mathbf{t}$ ($\mathbf{f}$, $\mathbf{t}$ – заданные системы векторов, главные вектора и главные моменты которых равны нулю). Найдем коэффициенты разложения этого тензора в ряд Фурье по ортонормальному базису $\mathbf{q}'_k$ подпространства T_1. Применяя формулу интегрирования по частям Остроградского-Гаусса, находим

$$\left(\mathbf{p}', \mathbf{q}'_k\right) = \int_V \mathbf{p}' \cdot\cdot \mathbf{S} \cdot\cdot \mathbf{q}'_k dV = \int_V \mathbf{p}' \cdot\cdot \mathbf{e}'_k dV = \int_V \mathbf{p}' \cdot\cdot \operatorname{def} \mathbf{u}_k dV =$$
$$= -\int_V \nabla\cdot\mathbf{p}'\cdot\mathbf{u}_k dV + \int_\Gamma \mathbf{n}\cdot\mathbf{p}'\cdot\mathbf{u}_k d\Gamma = -\int_V \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}_k dV + \int_\Gamma \mathbf{t}\cdot\mathbf{u}_k d\Gamma,$$

где $\mathbf{u}'_k$ – непрерывные и непрерывно-дифференцируемые функции из $L'_2(V)$. Если $\mathbf{f} \in L_2^v(V)$, а заданный на поверхности Г вектор $\mathbf{t}$ суммируем с квадратом по Г, то интегралы в правой части данного равенства существуют. Тогда обобщенное решение системы (2) представляется в виде ортогонального (в энергетическом пространстве) ряда с вычисленными коэффициентами Фурье

$$\mathbf{p}' = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathbf{p}', \mathbf{q}'_k\right)\mathbf{q}'_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\int_V \mathbf{f}\cdot\mathbf{u}_k dV + \int_\Gamma \mathbf{t}\cdot\mathbf{u}_k d\Gamma\right)\mathbf{q}'_k\ . \tag{11}$$

Этот ряд в силу полноты пространства T сходится как в энергетической метрике, так и в метрике исходного пространства $L_2^t(V)$ [1].

Полученное решение является единственным. Действительно, пусть тензоры $\boldsymbol{\sigma}'_1, \boldsymbol{\sigma}'_2 \in T_1$ – два решения системы (2). Тогда $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}'_1 - \boldsymbol{\sigma}'_2 \in T_1$ также является решением. Однако $\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} = 0, \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} = 0$ и, следовательно, $\boldsymbol{\sigma} \in T_2$, т.е. $\boldsymbol{\sigma} \in T_1 \cap T_2$. Но $T_1 \cap T_2 = 0$. Отсюда $\boldsymbol{\sigma} = 0$ и $\boldsymbol{\sigma}'_1 = \boldsymbol{\sigma}'_2$.

Далее пусть $\mathbf{p}^*$ – любой тензор, удовлетворяющий уравнениям равновесия и граничным условиям задачи (2). Тогда $\mathbf{p}^* - \mathbf{p}' = \mathbf{q}'' \in T_2$ и $\left(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}'_k\right) = \left(\mathbf{q}'' + \mathbf{p}', \mathbf{q}'_k\right) = \left(\mathbf{p}', \mathbf{q}'_k\right)$. Отсюда тензор $\mathbf{p}'$, решающий задачу (2), есть проекция тензора $\mathbf{p}^*$ в подпространство T_1. В этом заключается смысл формулы (15). Так как $\mathbf{p}^* - \mathbf{p}' \in T_2$, то $\left(\mathbf{p}', \mathbf{p}^* - \mathbf{p}'\right) = 0$ и $\left\|\mathbf{p}^*\right\|^2 = \left\|\mathbf{p}'\right\|^2 + \left\|\mathbf{p}^* - \mathbf{p}'\right\|^2 \ge \left\|\mathbf{p}'\right\|^2$. Данное неравенство выражает принцип Кастильяно: из всех тензоров, удовлетворяющих уравнениям равновесия и краевым условиям, заданным в напряжениях, наименьшую потенциальную энергию деформации сообщает телу тензор упругих напряжений [1]. Из приведенных рассуждений следует, что формула (11) фактически решает задачу о минимуме функционала $\left\|\mathbf{p}^* - \boldsymbol{\sigma}'\right\|^2$ при заданном тензоре $\mathbf{p}^*$, т.е. из всех значений $\boldsymbol{\sigma}' \in T_1$ минимум этому функционалу доставляет тензор $\mathbf{p}'$ – решение задачи (2).

Отметим, что формула (11) позволяет находить, по крайней мере приближенно, так называемые слабые решения в тех случаях, когда непрерывных и непрерывно-дифференцируемых решений не существует. При этом уравнения равновесия и условия совместности для соответствующего тензора деформаций удовлетворяются только в обобщенном смысле, а компоненты вектора перемещений могут иметь только первые обобщенные производные.

Перейдем к решению краевой задачи (3). Применяя оператор изометрии $\mathbf{S}$ к определяющему соотношению, получаем равенство $\mathbf{e}'' = \mathbf{e}' - \boldsymbol{\varepsilon}^*$, где $\mathbf{e}'' \in H_2$ $(\mathbf{p}'' \in T_2)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^* \in H$, $\mathbf{e}' \in H_1$ – тензор совместной деформации. Найдем ортопроекции тензора $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ в подпространства H_1 и H_2. Имеем $\mathbf{e}' = Y_1\boldsymbol{\varepsilon}^* \in H_1$, $\mathbf{e}'' = Y_2\boldsymbol{\varepsilon}^* \in H_2$, где Y_1, Y_2 – соответствующие операторы ортогонального проектирования (ортопроекторы). Тогда $\boldsymbol{\varepsilon}' + \boldsymbol{\varepsilon}'' = Y_1\boldsymbol{\varepsilon}^* + Y_2\boldsymbol{\varepsilon}^* = (Y_1 + Y_2)\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\varepsilon}^*$ ($Y_1 + Y_2 = J$, J – единичный оператор). Отсюда $\mathbf{e}'' = \mathbf{e}' - \boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\varepsilon}''$. Очевидно, что данное равенство может быть выполнено, если $\mathbf{e}' = \boldsymbol{\varepsilon}'$. Следовательно, $\mathbf{e}'' = -\boldsymbol{\varepsilon}''$.

Применим теперь оператор изометрии $\mathbf{C}$ к разложению тензора $\boldsymbol{\varepsilon}^*$. Получаем $\mathbf{C}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{C}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}' + \mathbf{C}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}''$ или $\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}' + \boldsymbol{\sigma}''$, где $\boldsymbol{\sigma}^* \in T, \boldsymbol{\sigma}' \in T_1$, $\boldsymbol{\sigma}'' \in T_2$. Очевидно, что $\boldsymbol{\sigma}' = P_1\boldsymbol{\sigma}^*$ – ортопроекция тензора $\boldsymbol{\sigma}^*$ в подпространство T_1, $\boldsymbol{\sigma}'' = P_2\boldsymbol{\sigma}^*$ – ортопроекция в подпространство T_2 (P_1, P_2 – соответствующие ортопроекторы). Отсюда $\mathbf{p}'' = \mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{e}'' = -\mathbf{C}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}'' = -P_2\boldsymbol{\sigma}''$. Таким образом, решением задачи (3) является взятая со знаком минус проекция элемента $\boldsymbol{\sigma}^* \in T$ $\left(\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{C}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*\right)$ в подпространство T_2. При этом совместные деформации, возникающие в теле, определяются тензором $\mathbf{e}' = \mathbf{S}\cdot\cdot P_1\boldsymbol{\sigma}^*$. Отметим, что и в данном случае возможно нахождение слабых решений, т.к. никаких ограничений, кроме принадлежности пространству T, на тензор $\boldsymbol{\sigma}^*$ не накладывается.

Приведем некоторые следствия, вытекающие из полученного результата. Во-первых, зачастую удобнее находить решение задачи (3) в следующем виде:

$$\mathbf{p}'' = -P_2\boldsymbol{\sigma}^* = -(J - P_1)\boldsymbol{\sigma}^* = P_1\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^* = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{q}'_k\right)\mathbf{q}'_k - \boldsymbol{\sigma}^*, \qquad (12)$$

т.е. сначала осуществить проекцию тензора $\boldsymbol{\sigma}^*$ в подпространство T_1.

Во-вторых, если $\boldsymbol{\varepsilon}^* \in H_1$, то в теле возникают деформации $\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon}^*$ без образования напряжений. Если $\boldsymbol{\varepsilon}^* \in H_2$, то в теле возникает самоуравновешенное поле напряжений без образования совместных деформаций, т.е. без изменения геометрии тела.

Напряжения в цилиндрических телах при плоской деформации

Рассмотрим несколько примеров применения изложенного метода ортогональных проекций.

<u>Задача Ляме</u>. Решим задачу об определении напряжений в толстостенной трубе. На внешней границе с радиусом b заданы одинаковые векторы внешних сил, имеющие одну направленную к центру трубы радиальную компоненту $(-t)$ (равномерное внешнее давление). Внутренняя граница с радиусом a свободна от нагрузки. Объемные силы отсутствуют.

Для более эффективного применения методики желательно на начальной стадии, используя внешние признаки задачи, сделать некоторые правдоподобные допущения относительно перемещений. Это позволит построить в подпространстве T_1 такой базис, при котором ряд Фурье, получающийся в результате операции проектирования, сходился бы достаточно быстро. В данном случае вектор перемещений имеет одну радиальную компоненту, зависящую только от расстояния от оси трубы. Эта компонента может быть представлена непрерывными и непрерывно-дифференцируемыми необходимое число раз функциями от r, в том числе и обладающими сингулярностями при $r = 0$.

Следовательно, можно воспользоваться последовательностью (5), элементы которой обладают указанным свойством. Базис в подпространстве $T_1(V_k)$, соответствующий последовательности перемещений (5), задан выражениями (6).

Для применения формулы (11) необходимо перейти от базисных напряжений к перемещениям, определяя из закона Гука деформацию $e'_\theta = E^{-1}\left[q_\theta\left(1-\nu^2\right) - q_r \nu(1+\nu)\right]$ и затем перемещение $u = \varepsilon_\theta r$ из одного из соотношений Коши. В результате получаем $u_1 = r k_1,\ u_2 = r^{-1} k_2, \ldots,$ где $k_1 = \left[2\pi c\left(b^2 - a^2\right)\right]^{-1/2}$, $k_2 = ba\left[2\pi c(1-2\nu)\left(b^2 - a^2\right)\right]^{-1/2}$. Теперь по формуле (15) с использованием выражений (6) определяем искомые напряжения

$$\sigma'_r = m_1 q'_{1r} + m_2 q'_{2r} = -t b^2 \left(b^2 - a^2\right)^{-1}\left(1 - a^2 r^{-2}\right),$$
$$\sigma'_\theta = m_1 q'_{1\theta} + m_2 q'_{2\theta} = -t b^2 \left(b^2 - a^2\right)^{-1}\left(1 + a^2 r^{-2}\right),$$
$$\sigma'_z = \nu\left(\sigma'_r + \sigma'_\theta\right) = -2\nu t b^2 \left(b^2 - a^2\right)^{-1},$$

где $m_1 = -\int_0^{2\pi} t b k_1 b\, d\varphi$, $m_2 = -\int_0^{2\pi} t b^{-1} k_2 b\, d\varphi$, – коэффициенты Фурье.

Отметим, что коэффициенты $m_3 = 0$ и данное решение являются точными, совпадающими с хорошо известными в литературе [11].

<u>Закалочные напряжения</u>. Рассмотрим длинный сплошной цилиндр с радиусом основания b. Пусть в результате закалки в нем реализовано поле первоначальных (собственных) деформаций, определяемых тензором $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ с компонентами $\varepsilon^*_r = \varepsilon^*_\theta = \varepsilon^*_z = \left\{\gamma\rho\left(b - a_1\right)^{-1}\left(r - a_1\right),\ a_1 \le r \le b,\ 0,\ 0 \le r \le a_1\right\}$ (закалка по линейному закону до радиуса a_1). Здесь ρ – объемное содержание новой фазы материала, возникшей в результате закалки, в поверхностном слое, γ – параметр свободной структурной деформации новой фазы. Подставляя тензор $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ в физические соотношения закона Гука, находим тензор $\boldsymbol{\sigma}^*$ с компонентами $\sigma^*_r = \sigma^*_\theta = \sigma^*_z = \left\{\gamma\rho E(1-2\nu)^{-1}\left(b - a_1\right)^{-1}\left(r - a_1\right),\ a_1 \le r \le b,\ 0,\ 0 \le r \le a_1\right\}$.

Можно предположить, что в этом случае радиальные перемещения непрерывны, но их производная терпит разрыв при $r = a_1$. Отсюда целесообразно использовать последовательность (9) и базис (10). Производя необходимые действия по формуле (12) с учетом выражения (4), находим

$$\sigma''_r = \sigma''_\theta = E'\left(b/3 - a_1/3 + a_1^3/6b^2\right), \quad 0 \le r \le a_1;$$
$$\sigma''_r = E'\left[(b-r)/3 + a_1^3\left(b^{-2} - r^{-2}\right)/6\right],$$
$$\sigma''_\theta = E'\left[(b-2r)/3 + a_1^3\left(b^{-2} + r^{-2}\right)/6\right], \quad a_1 \le r \le b.$$

Если торцевые концы цилиндра свободны от нагрузки, то возникают еще напряжения

$$\sigma''_z = \sigma''_r + \sigma''_\theta = \{2E'\left(b/3 - a_1/3 + a_1^3/6b^2\right), \quad 0 \le r \le a_1;$$

$$E'\left[\left(2b-3r\right)/3 + a_1^3/3b^2\right], \quad a_1 \le r \le b \; \}.$$

Здесь $E' = \gamma\rho E[(1-\nu)(b-a_1)]^{-1}$.

Отметим, что остальные члены ряда в формуле (12) равны нулю и данное решение является точным.

Полагая $a_1 = 0$ (закалка на всю глубину), находим следующие выражения для напряжений:

$$\sigma''_r = E\gamma\rho[3b(1-\nu)]^{-1}(b-r), \qquad \sigma''_\theta = E\gamma\rho\left[3b(1-\nu)^{-1}\right](b-2r),$$

$$\sigma''_z = E\gamma\rho[3b(1-\nu)]^{-1}(2b-3r).$$

Заметим, что тот же результат получается, если спроектировать тензор $\boldsymbol{\sigma}^*$ при $a_1 = 0$ в подпространство $T_1(V_r)$, используя базис (8).

Последовательность перемещений (7) и базис (8) также можно применить для решения задачи с первоначальными деформациями $\varepsilon_r^* = \alpha r, \varepsilon_\theta^* = \beta r, \varepsilon_z^* = \psi r$ $(0 \le r \le b, \alpha, \beta, \psi - \mathrm{const})$. Производя необходимые действия, получаем

$$\sigma''_r = n(R-r), \quad \sigma''_\theta = n(R-2r), \text{ где } n = -E\left[3\left(1-\nu^2\right)\right]^{-1}(\alpha - 2\beta - \psi\nu).$$

Пусть теперь закалке подвергается труба с внутренним радиусом a, причем закалка осуществляется изнутри на всю толщину. Имеем

$$\varepsilon_r^* = \varepsilon_\theta^* = \varepsilon_z^* = \gamma\rho(b-r)(b-a)^{-1},$$

$$\sigma_r^* = \sigma_\theta^* = \sigma_z^* = \gamma\rho(b-r)(b-a)^{-1}(1-2\nu)^{-1}.$$

В этом случае целесообразно использовать последовательность перемещений (5) и базис (6). Используя формулу (12), находим

$$\sigma''_r = l_1 r + l_2 r^{-2} - l_3, \quad \sigma''_\theta = 2l_1 r - l_2 r^{-2} - l_3,$$

где $l_1 = \gamma\rho E l_4$, $l_2 = \gamma\rho E b^2 a^2 l_4$, $l_3 = \gamma\rho E\left(b^2 + ba + a^2\right)$, $l_4 = [3(1-\nu)(b-a)]^{-1}$.

Заметим, что приведенные решения совпадают с решениями данных задач, полученных традиционными методами.

Приведены основные положения метода ортогональных проекций решения краевых задач линейной теории упругости при заданных поверхностных и объемных силах. Отмечена возможность получения слабых решений.

Работа выполнена в соответствии с программой интеграционного проекта с СО РАН.

Библиографический список

1. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
2. Стружанов В.В. Методы определения полей собственных напряжений. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1983. – 48 с.
3. Стружанов В.В. Определение напряженно-деформированного состояния методом ортогональных проекций // Свойства материалов и качества машин: Сб. науч. трудов. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. – С. 44-57.

4. Мавлютов И.Г., Стружанов В.В. Об одном критерии оптимальности остаточных напряжений // Динамика и прочность тяжелых машин: Сб. науч. трудов / Днепропетровский гос. ун-т. – Днепропетровск, 1987. – С.121-125.
5. Стружанов В.В. Определение усадочных напряжений в компонентах стохастически армированных композитов // Прикладная механика. – 1982. – Т. 18. № 5. – С. 62-66.
6. Стружанов В.В. Об увеличении несущей способности элементов конструкций // Пробл. прочности. – 1976. – № 2. – С. 54-59.
7. Соколов А.Г., Стружанов В.В. Об одной задаче оптимизации напряжений в упругом теле // ПММ. – 2001. – Т.65. Вып. 2. – С. 317-323.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
9. Балакришнан А.В. Прикладной функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
10. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
11. Тимошенко С.П., Гудьер Д. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

Получено 17.06.2004.