

УДК 629.7.017

М. В. Усанин

Пермский государственный технический университет

**ПРИМЕНЕНИЕ АКУСТИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ ДЛЯ РАСЧЕТА
ЗВУКА В ДАЛЬНОМ ПОЛЕ**

Abstract

The purpose of this paper is the numerical implementation of algorithm for calculation of an integral of Fowcs Williams–Hawkings equation in case, when its right hand side represents given sources, distributed on a fixed permeable surface. Algorithm was verified on two test problems.

Вывод уравнения Фокс Вильямса–Хоукинга

Приведем вывод волнового уравнения Фокс Вильямса–Хоукинга, следуя работе [1], для общего случая, когда поверхность, внутри которой распределены источники (поверхность Кирхгоффа), предполагается подвижной. Пусть $f(\vec{x}, t) = 0$ представляет собой уравнение подвижной поверхности, охватывающей регион, в котором происходит генерация звука (рис.1), \vec{x} – пространственная координата, t – время.

Рассмотрим задачу нахождения звукового поля в открытой области внешней к поверхности $f(\vec{x}, t) = 0$. Примем, что $f > 0$ во внешней области и $f < 0$ внутри поверхности, тогда функция Хэвисайда $H(f) = 1$, если $f > 0$ и $H(f) = 0$, если $f < 0$. Кроме того, предположим, что $f(\vec{x}, t)$ определена так, что $\nabla f = \vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности $f(\vec{x}, t) = 0$. Это предположение не является ограничением общности, так как всегда можно переопределить f как $f/|\nabla f|$. Следует отметить, что поверхность $f(\vec{x}, t) = 0$ не предполагается непроницаемой. Пусть, кроме того, поверхность может двигаться со скоростью с компонентами v_i так, что

$$\frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t} + v_i \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial x_i} = 0. \tag{1}$$

В этом случае

$$\frac{\partial H(f)}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial t} = -v_i \frac{\partial H}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x_i} = -v_i \frac{\partial H}{\partial x_i} = -v_i \delta(f) \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{2}$$

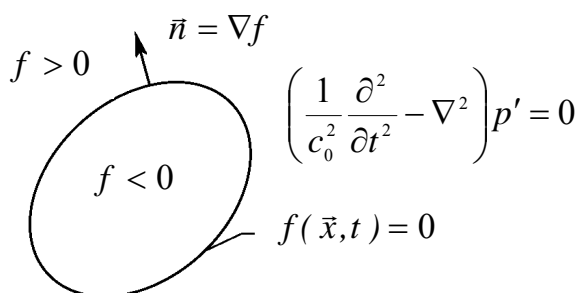


Рис.1. Подвижная деформируемая поверхность $f(\vec{x}, t) = 0$

Продолжим все поля газодинамических параметров внутри поверхности $f(\vec{x}, t) = 0$ величинами, относящимися к невозмущенному потоку. Это продолжение задачи на все неограниченное пространство необходимо, чтобы при решении волнового уравнения можно было использовать функцию Грина волнового уравнения для неограниченного пространства, которая имеет простой вид. Таким образом, при прохождении через поверхность $f(\vec{x}, t) = 0$ все газодинамические параметры будут терпеть разрыв. Предположим, кроме того, что параметры потока не имеют никаких других разрывов, кроме разрывов при переходе через поверхность $f(\vec{x}, t) = 0$.

Уравнение непрерывности и сохранения импульса во внешней области $f > 0$ при отсутствии массовых сил имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j + p \delta_{ij} - \tau_{ij})}{\partial x_j} = 0, \quad (4)$$

где ρ – плотность, p – давление, u_i – компоненты скорости, $\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right]$ – тензор вязких напряжений, μ – коэффициент динамической вязкости, δ_{ij} – дельта Кронекера.

Умножив уравнения (3) и (4) на функцию Хэвисайда и используя выражение (2), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} ((\rho - \rho_0)H(f)) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i H(f)) = \rho_0 v_i \frac{\partial H}{\partial x_i} + \rho (u_i - v_i) \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i H(f)) + \frac{\partial}{\partial x_j} ((\rho u_i u_j + p \delta_{ij} - \tau_{ij})H(f)) = (\rho u_i (u_j - v_j) + p \delta_{ij} - \tau_{ij}) \frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad (6)$$

где ρ_0 – средняя плотность.

Уравнение Фокс Вильямса–Хоукингса может быть получено из (5) и (6) следующим образом. Сначала возьмем производные по времени от обеих частей уравнения (5), затем возьмем дивергенцию от обеих частей уравнения (6) и потом вычтем последнее уравнение из первого. Наконец, вычтем $\nabla^2 (c_0^2 (\rho - \rho_0)H(f))$ из обеих сторон полученного уравнения и перегруппируем полученное выражение так, чтобы волновой оператор, действующий на $c_0^2 (\rho - \rho_0)H(f)$, стоял в левой части. Таким образом, получим уравнение, которое называют уравнением Фокс Вильямса–Хоукингса для подвижной проницаемой поверхности:

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) (c_0^2 (\rho - \rho_0)H(f)) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (T_{ij} H(f)) + \frac{\partial}{\partial t} ((\rho_0 v_n + \rho (u_n - v_n)) \delta(f)) - \frac{\partial}{\partial x_i} (((p - p_0) n_i - \tau_{ij} n_j + \rho u_i (u_n - v_n)) \delta(f)) \quad (7)$$

Здесь введены следующие обозначения: $n_i = \partial f / \partial x_i$ – компоненты внешней единичной нормали к $f = 0$, $u_n = u_i n_i$ – локальная скорость среды в направлении нормали, $v_n = v_i n_i$ – локальная нормальная скорость поверхности $f = 0$, $T_{ij} = \rho u_i u_j + ((p - p_0) - c_0^2 (\rho - \rho_0)) \delta_{ij} - \tau_{ij}$ – тензор Лайтхилла, c_0 – скорость звука.

Из уравнения (7) видно, что правая часть зависит от неизвестных скоростей и

давлений в среде, поэтому, строго говоря, не может рассматриваться как внешний заданный источник и должна быть определена из общих уравнений аэродинамики. Лайтхиллом [2] предложено рассматривать правую часть уравнения (7) как заданное эквивалентное нестационарному потоку распределение акустических источников, которые излучают в идеальную неподвижную среду. Это допущение получило название акустической аналогии Лайтхилла. Его применение возможно, когда несущественно взаимодействие звуковых волн с потоком.

Будем считать, что расположение поверхности Кирхгоффа выбрано так, что с ее наружной части распространение возмущений происходит линейно, т.е. $(p - p_0) = c_0^2(\rho - \rho_0)$, кроме того, и сама поверхность находится в линейной зоне, поэтому вкладом тензора вязких напряжений и тензора Лайтхилла можно пренебречь. Ограничимся теперь рассмотрением неподвижной проницаемой поверхности $f = 0$. С учетом этих предположений уравнение (7) примет вид

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) p'H(f) = \frac{\partial}{\partial t} ((\rho u_n) \delta(f)) - \frac{\partial}{\partial x_i} (((p - p_0)n_i + \rho u_i u_n) \delta(f)), \quad (8)$$

где через $p' = p - p_0$ обозначено звуковое давление.

Решение уравнения (8) может быть найдено аналитически с использованием функции Грина для свободного пространства [3].

Рассмотрим волновое уравнение следующего общего вида

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) p' = Q(\vec{y}, \tau). \quad (9)$$

Решение уравнения (9) может быть получено в виде

$$p'(\vec{x}, t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \int Q(\vec{y}, \tau) G(\vec{x}, t | \vec{y}, \tau) d^3 y d\tau, \quad (10)$$

где $G(\vec{x}, t | \vec{y}, \tau)$ – функция Грина, которая удовлетворяет волновому уравнению для импульсного точечного источника, расположенного в точке $\vec{x} = \vec{y}$ и излучающего импульс в момент времени $t = \tau$, т.е.

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) G = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta(t - \tau). \quad (11)$$

Кроме того, на функцию G накладывается следующее условие:

$$G = 0 \text{ при } t < \tau. \quad (12)$$

Для свободного пространства существует единственная функция, удовлетворяющая уравнению (11) и условию (12). Она имеет вид

$$G(\vec{x}, t | \vec{y}, \tau) = \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} \delta\left(t - \tau - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c_0}\right). \quad (13)$$

Используя (13), можно получить следующий вид решения уравнения (8):

$$4\pi p'(\vec{x}, t) = \int_{f=0} \left[\frac{\rho_0 \dot{U}_n}{r} \right] dS + \frac{1}{c_0} \int_{f=0} \left[\frac{\dot{L}_r}{r} \right] dS + \int_{f=0} \left[\frac{L_r}{r^2} \right] dS, \quad (14)$$

где введены обозначения $U_n = \left(\frac{\rho u_i}{\rho_0} \right) n_i$, $L_r = ((p - p_0)n_i + \rho u_i u_n) r_i$, $r_i = \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|}$ – компоненты единичного вектора в направлении от точки на поверхности Кирхгоффа до

точки наблюдения, $r = |\vec{x} - \vec{y}|$ – расстояние между точкой наблюдения и точкой на поверхности Кирхгоффа. Точка над величинами в (14) означает производную по времени, а величины в квадратных скобках берутся в момент времени $\tau = t - r/c_0$.

Для нахождения интеграла (14) используются методы численного интегрирования. Рассмотрим интеграл следующего общего вида:

$$4\pi p'(\vec{x}, t) = \int_{f=0} \left[\frac{Q(\vec{y}, \tau)}{r} \right] dS, \quad (15)$$

где $Q(\vec{y}, \tau)$ – заданная функция положения источника и времени.

Интегрирование в формуле (15) происходит по поверхности $f = 0$, а интегранд рассматривается во время излучения звука, т.е. в во время $\tau = t - r/c_0$.

Наиболее простым и распространенным методом численного определения интеграла (15) является следующий. Поверхность $f = 0$ разбивается на набор плоских элементов, для каждого из которых интегранд вычисляется в центральной точке элемента, в соответствующее этой точке запаздывающее время и умножается на площадь элемента [4]. После этого производится суммирование по всем элементам. Таким образом, исходный интеграл аппроксимируется выражением

$$4\pi p'(\vec{x}, t) \approx \sum_{i=1}^N \left[Q\left(\vec{y}_i, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}_i|}{c_0}\right) / |\vec{x} - \vec{y}_i| \right] \Delta S_i, \quad (16)$$

где N – общее количество элементов, \vec{y}_i – центральная точка i -й панели.

Тестовые задачи

В качестве первой тестовой задачи для верификации правильности алгоритма была использована задача об излучении сферических волн точечным источником.

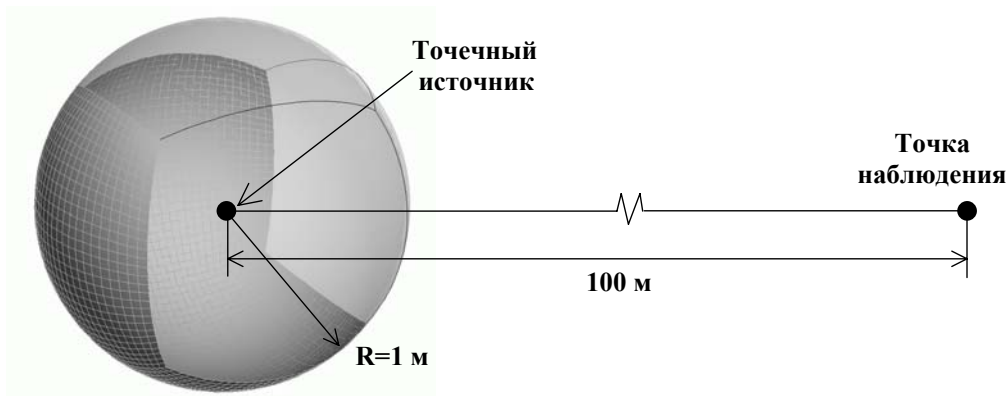


Рис.2. Задача о точечном источнике

Аналитическое решение для этой задачи в сферических координатах имеет вид

$$p' = -\frac{\rho_0 \omega A}{r} \sin\left(\omega\left(\frac{r}{c_0} - t\right)\right), \quad \rho' = \frac{\rho_0 \omega A}{c_0^2 r} \sin\left(\omega\left(\frac{r}{c_0} - t\right)\right), \quad (17)$$

$$u = -\frac{\omega A}{c_0 r} \sin\left(\omega\left(\frac{r}{c_0} - t\right)\right) - \frac{A}{r^2} \cos\left(\omega\left(\frac{r}{c_0} - t\right)\right).$$

В качестве поверхности Кирхгоффа была взята сфера радиусом 1 метр (рис.2), на которой в соответствии с формулами (17) задавались пульсации давления плотности и

скорости. Расчеты были выполнены для двух вариантов разбиения сферы на элементы. Для первого варианта расчетная сетка составляла 600 (6x10x10) элементов, для второго – 5400 (6x30x30). Точка наблюдения находилась на расстоянии 100 метров от центра сферы. Значения констант, при которых проводились расчеты, были взяты следующие: $A=10$ Па, $\omega=2000\pi$ рад/с, $p_0=101325$ Па, $\rho_0=1,22$ кг/м³, $c_0=340$ м/с. Полученные сигналы в сравнении с аналитическим решением представлены на рис.3. Из рисунка видно, что при уменьшении размеров элементов решение приближается к аналитическому и для второго варианта практически с ним совпадает. Отношение длины волны излучаемого звука к линейному размеру элемента для второго варианта составляет примерно 6,5. Таким образом, можно сделать оценку для выбора густоты сетки на поверхности Кирхгоффа: для правильного описания дальнего звукового поля необходимо около семи элементов на длину волны излучения.

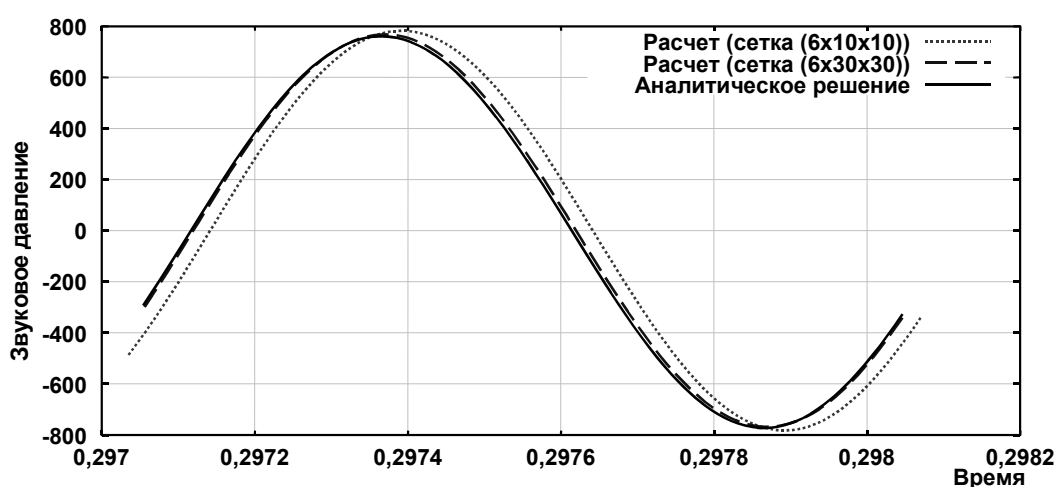


Рис.3. Пульсации давления на расстоянии 100 метров от источника

В качестве второй тестовой задачи для применения алгоритма (16) численного интегрирования выражения (14) был выбран случай излучения звука при обтекании цилиндра потоком вязкого газа. Условия проведения эксперимента и спектр экспериментально измеренного уровня звукового давления были взяты из статьи [5]. Для нахождения нестационарных полей давления, скорости и плотности вокруг цилиндра был использован газодинамический пакет Fluent версии 6.1. Вид расчетной области показан на рис.4. Количество узлов расчетной сетки составило 303000.

При проведении газодинамического расчета задавались следующие граничные условия: на входе (рис.4) – скорость набегающего потока 15 м/с, температура 290 К; на выходе и верхней и нижней границах – открытая граница с атмосферным давлением (101325 Па) и температурой 290 К. Диаметр цилиндра – 10 мм, длина цилиндра в расчете взята равной трем диаметрам (реальная длина в эксперименте 50 см.). На боковых поверхностях ставились условия периодичности. Число Рейнольдса для заданного режима течения составляет порядка 10^4 .

При расчете использовался неявный метод контрольных объемов со вторым порядком точности по пространству и по времени и LES подход для моделирования турбулентности. Газодинамический расчет проводился в два этапа, сначала решение выводилось на периодический режим. Для примера на рис.4 приведено полученное в расчете мгновенное поле скорости в среднем по длине цилиндра сечении. Затем производилась запись в файлы нестационарных полей давления, плотности и скорости

на четырех выбранных поверхностях с шагом по времени 0,0001 с в течение 1000 шагов. Выбранные поверхности Кирхгофа представляют собой цилиндрические поверхности с радиусом, равным 0,5; 1, 1,5 и 2 диаметра цилиндра, и осью, совпадающей с осью цилиндра (см. рис.4). Будем называть их соответственно 0,5D, 1D, 1,5D и 2D.

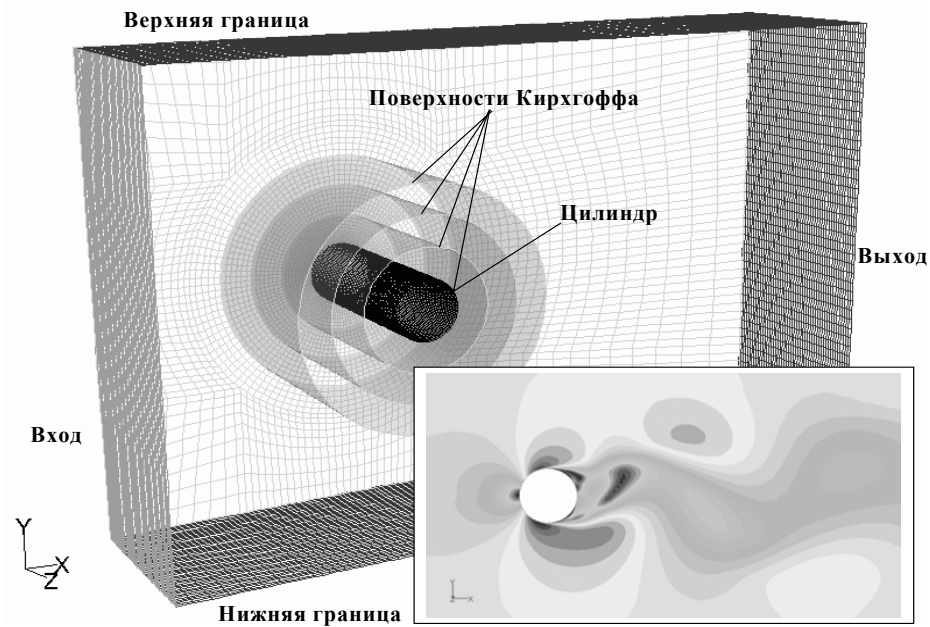


Рис.4. Вид расчетной области

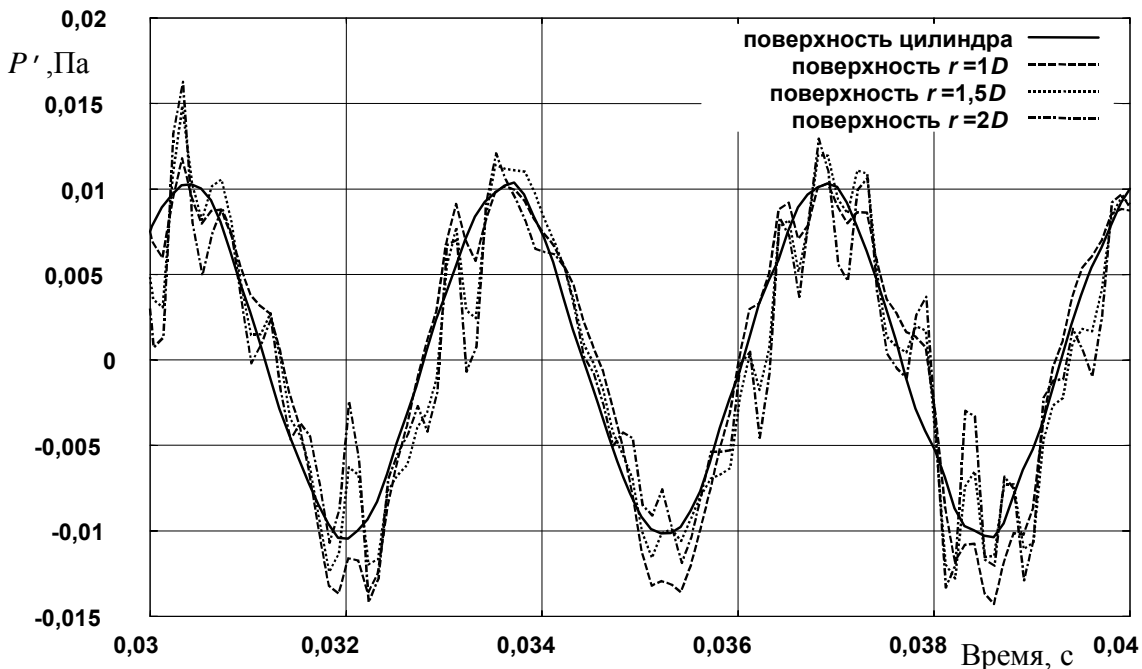


Рис.5. Звуковое давления в точке наблюдения

Нестационарные поля на поверхностях 0,5D, 1D, 1,5D и 2D последовательно использовались для численного вычисления интеграла (14) в точке, где производился замер уровня звука в эксперименте. Эта точка находится на расстоянии 1 м над

цилиндром, в средней точке по его длине, в плоскости, проходящей через ось цилиндра. Сигнал в этой точке, полученный для различных поверхностей Кирхгоффа, представлен на рис.5.

Из рисунка видно, что чем больше радиус, на котором располагается поверхность Кирхгоффа, тем больше гармоник присутствует в сигнале. Это связано с тем, что при увеличении радиуса все больше источников охватывается поверхностью Кирхгоффа. Начинают учитываться не только дипольные источники, связанные с силовым взаимодействием цилиндра и потока (как в случае совпадения поверхности Кирхгоффа с поверхностью цилиндра $0,5D$), но также и квадрупольные источники, связанные с турбулентностью в охваченной поверхностью Кирхгоффа области течения.

Для полученных сигналов было выполнено преобразование Фурье и найден уровень звукового давления в децибелах. Результат представлен на рис.6. Из рисунка видно, что результаты расчета качественно правильно воспроизводят основную частоту срыва вихрей. Экспериментальное выражение для основной частоты срыва вихрей имеет вид [6]

$$f = Sh \frac{u}{D}, \quad (18)$$

где $Sh \approx 0.2$ – число Струхаля для цилиндра, u – скорость потока, D – диаметр цилиндра. Используя (18), получим значение основной частоты $f \approx 300$ Гц, что совпадает с основной частотой в эксперименте и хорошо согласуется с полученной численно ($f \approx 310$ Гц).

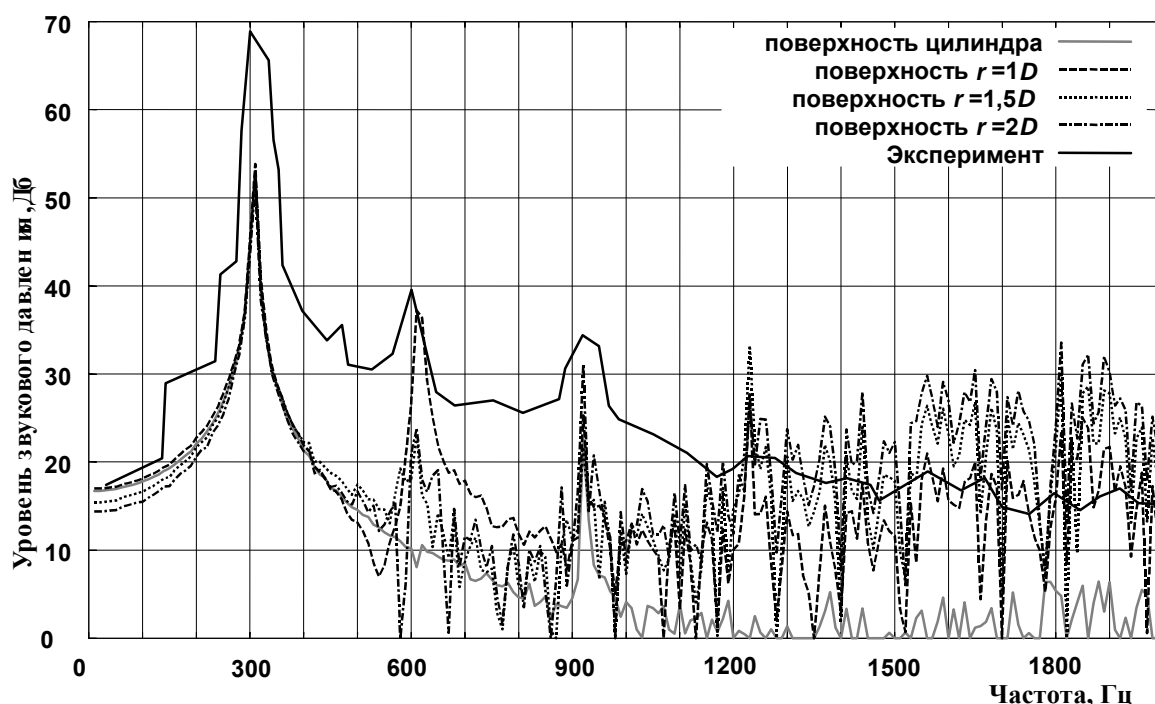


Рис.6. Уровень звукового давления в точке наблюдения

Расхождение по величине уровня звукового давления на основной частоте можно объяснить тем, что в расчетах, с целью экономии вычислительных ресурсов длина цилиндра была взята значительно меньше, чем в реальном эксперименте, следовательно, суммарная мощность источников получилась меньше. Для выяснения этого вопроса воспользуемся теорией Филлипса для оценки интенсивности звука при обтекании цилиндра [3]. Согласно ей для “коротких” цилиндров, т.е. для которых

можно считать, что по всей длине цилиндра срыв вихрей происходит синфазно, имеет место следующее выражение для интенсивности звука в точке, лежащей в плоскости, проходящей через ось цилиндра перпендикулярно течению газа на расстоянии r от оси цилиндра,

$$I_1 = \frac{\kappa^2 Sh^2 l^2 \rho_0 u^6}{32c_0^3 r^2}, \quad (19)$$

где l – длина цилиндра, κ – константа, принимающая значения от 0,5 до 1. Принимая $Sh=0,2$, $\rho_0=1,22$ кг/м³, $u=15$ м/с, $c_0=340$ м/с, $r=1$ м для значений $\kappa=0,5$ и $\kappa=1$, получим следующие оценки интенсивности звука для цилиндра, использовавшегося в расчете ($l=0,03$ м): $I_1^{\kappa=0,5}=0,99848e-7$ Вт/м², $I_1^{\kappa=1}=0,39939e-6$ Вт/м². Для сравнения с расчетом пересчитаем интенсивности в уровни звукового давления. Согласно формуле $L = 10 \log(I/I_0)$, где $I_0=1e-12$ Вт/м² – предел слышимости, получаем уровни: $L_1^{\kappa=0,5}=50$ дБ, $L_1^{\kappa=1}=56$ дБ, то есть примерно такие же, как получаются в расчете $L^{расч}=54$ дБ.

Сравним теперь, как согласуется теория Филлипса с экспериментальными данными. Для “длинных” цилиндров, т.е. для которых длина цилиндра велика по сравнению с расстоянием, на котором срываются с цилиндра вихри коррелированы,

$$I_2 = \frac{17D\kappa^2 Sh^2 l \rho_0 u^6}{32c_0^3 r^2}. \quad (20)$$

Вычислим интенсивность звука для цилиндра, использовавшегося в эксперименте ($l=0,5$ м). Для $\kappa=0,5$ и $\kappa=1$ получим $I_2^{\kappa=0,5}=0,943e-5$ Вт/м², $I_2^{\kappa=1}=0,377e-4$ Вт/м², что соответствует уровням звука $L_2^{\kappa=0,5}=69,75$ дБ и $L_2^{\kappa=1}=75,77$ дБ. Экспериментальный уровень на основной частоте срыва вихрей составляет $L^{эксп}=68$ дБ (см. рис.6), т.е. теория несколько завышает уровень звукового давления, но все равно достаточно хорошо согласуется с экспериментом.

Таким образом, заниженные расчетные значения уровня звукового давления на основной частоте могут быть объяснены меньшей длиной цилиндра, использовавшегося в расчете.

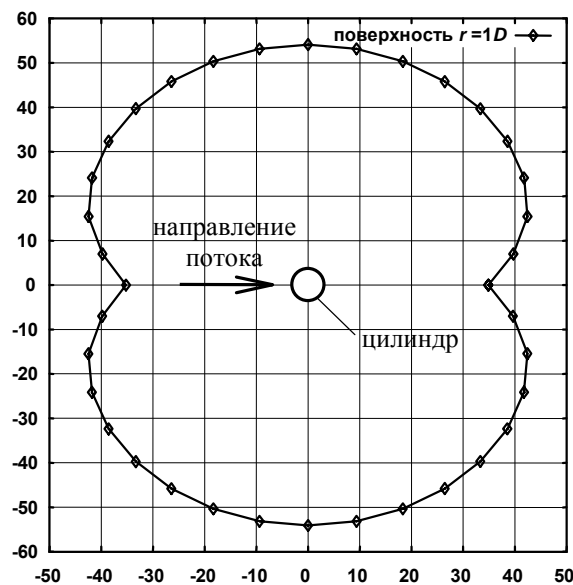


Рис.7. Направленность на частоте 310 Гц

Сравнение результатов, полученных для разных поверхностей Кирхгоффа, показывает, что для всех поверхностей уровень звукового давления на основной частоте срыва вихрей получается примерно одинаковый. Различия проявляются в предсказании гармоник основной частоты. Наиболее близки к экспериментальным данным результаты, полученные с использованием поверхности $1D$. Для этой поверхности была проведена серия расчетов для нахождения направленности излучения. Точки наблюдения располагались на радиусе 1 м через 10 градусов в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, проходящей через его середину. Зависимость уровня звукового давления от угла для основной частоты срыва вихрей (310 Гц) представлена на рис.7.

Как видно из графика, направленность имеет форму восьмерки, что характерно для дипольных источников звука.

Библиографический список

1. Brentner K.S., Farassat F. Modeling Aerodynamically Generated Sound of Helicopter Rotors //Progress in Aerospace Sciences. – 2003.– 39(2-3). P. 83-120
2. Мунин А.Г., Кузнецов В.М., Леонтьев Е.А. Аэродинамические источники шума. – М.: Машиностроение, 1981. – 248 с.
3. Голдстейн М.Е. Аэроакустика. – М.: Машиностроение, 1981. – 294 с.
4. Prieur J., Rahier G. Aeroacoustic Integral Methods. Formulation and Efficient Numerical Implementation //Aerospace Science and Technology. – 2001. – №.5. – P. 457-468
5. Perie F. Recent Developments in Acoustic Analysis. Convex Conference. Detroit. June 5-7. – 1995 (статья доступна в Интернете www.mcube.fr/M-Cube/post/Convex95.pdf)
6. Блохинцев Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды. – М.: Наука, 1981. – 208 с.

Получено 24.07.2004.