УДК 539.3

С.А. Корнеев

Омский государственный технический университет

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ НА ВЫБОР МАТЕРИАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ СРЕДЫ ПРИ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ

Abstact

In the article the procedure of the thermodynamic coordinated choice of the material parameters of medium (the specific heat, the bulk modulus, the shear modulus and coefficient of temperature stress) is given, permitting to avoid infringement of the first and second laws of thermodynamics at statement of the thermo-plasticity problems.

В основе теории термопластичности лежат уравнения движения [1]

$$\rho_0\, \partial^2 u_i \big/ \partial t^2 = \partial\sigma_{ij} \big/ \partial x_j + \rho_0 b_i\,, \tag{1}$$

уравнение энергии

$$\rho_0 c(\theta)\partial\theta/\partial t = -\partial q_i/\partial x_i + \sigma_{ij}\, \partial\varepsilon_{ij}\big/\partial t + \rho_0\beta\,, \tag{2}$$

закон Фурье для вектора теплового потока

$$q_i = -\Lambda(\theta)\partial\theta/\partial x_i \tag{3}$$

и выражение для линейного тензора деформации

$$\varepsilon_{ij} = 0{,}5\left(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i\right). \tag{4}$$

Здесь σ_{ij} – компоненты тензора напряжений в декартовой системе координат, x_i, u_i – векторы смещения точки среды, b_i – вектор внешних массовых сил, β – плотность внешних массовых источников теплоты, θ – абсолютная температура, c – удельная теплоёмкость при постоянной деформации, Λ – коэффициент теплопроводности, ρ_0 – плотность в отсчётной конфигурации, которую имеет среда в начальный момент времени, находясь при определённой температуре θ_0 и гидростатическом давлении p_0.

Система уравнений (1) – (4) является незамкнутой. Для её замыкания можно воспользоваться, например, определяющими соотношениями теории пластического течения [2]. Согласно данной теории тензор деформации представляется суммой упругой и пластической составляющих:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{e} + \varepsilon_{ij}^{p}\,. \tag{5}$$

Если среда пластически несжимаемая ($\varepsilon_{kk}^{p} = 0$), то объёмная деформация носит упругий характер, $\varepsilon = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{kk}^{e}$. Тензор напряжений разлагается на шаровой тензор и девиатор,

$$\sigma_{ij} = \sigma\delta_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}\,, \tag{6}$$

где δ_{ij} – символы Кронекера. Для среднего напряжения $\sigma = \sigma_{kk}$ берётся зависимость

$$\sigma = -p_0 - \gamma(\theta - \theta_0) + K\varepsilon\,, \tag{7}$$

где $\gamma(\theta)$, $K(\theta)$ – коэффициент температурных напряжений и модуль объёмного сжатия соответственно. Девиатор упругой деформации подчиняется закону Гука

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^{e} = \tilde{\sigma}_{ij} / (2\mu), \tag{8}$$

где $\mu(\theta)$ – модуль сдвига. Из соотношения (8) получается следующее выражение для приращения девиатора упругой деформации (здесь и далее штрих указывает на производную по температуре):

$$d\tilde{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{e}} = \frac{d\tilde{\sigma}_{ij}}{2\mu(\theta)} - \frac{\mu'(\theta)}{2[\mu(\theta)]^2}\tilde{\sigma}_{ij}d\theta\,. \tag{9}$$

Далее постулируется, например, существование гладкой поверхности текучести (κ – параметр упрочнения)

$$\Phi\left(\sigma_{ij}, \theta, \varepsilon_{ij}^{p}, \kappa\right) = 0 \tag{10}$$

и принимается ассоциированный закон течения

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda\, \partial\Phi / \partial\sigma_{ij}\,. \tag{11}$$

Соотношение (11) устанавливается из принципа максимума Мизеса [3, 4]. Для множителя Лагранжа выполняется обычное правило [2]

$$d\lambda = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \Phi < 0 \quad \text{или} \quad \Phi = 0,\, d'\Phi \le 0, \\ \ne 0, & \text{если} \quad \Phi = 0,\, d'\Phi > 0, \end{cases}$$

где $d'\Phi$ определяется следующей формулой:

$$d'\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij} + \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}d\theta.$$

В результате из (5), (9), (11) получается выражение

$$d\tilde{\varepsilon}_{ij} = d\tilde{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{e}} + d\varepsilon_{ij}^{\mathrm{p}} = \frac{d\tilde{\sigma}_{ij}}{2\mu(\theta)} - \frac{\mu'(\theta)}{2[\mu(\theta)]^2}\tilde{\sigma}_{ij}\mathrm{d}\theta + d\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ij}}\,,$$

которое при заданной функции (10) замыкает систему уравнений (1)-(4), (7). Например, если материал обладает изотропным упрочнением, то можно воспользоваться условием пластичности [5]

$$\Phi = \sqrt{\tilde{\sigma}_{ij}\tilde{\sigma}_{ij}} - \varphi(\kappa, \theta),\ \kappa = \int \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^{p}\,,$$

где $\varphi(\kappa, \theta)$ – некоторая экспериментально определяемая функция. В этом случае согласно (11) будет выполняться соотношение

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda\tilde{\sigma}_{ij}\,,$$

указывающее на соосность тензора скоростей пластической деформации и девиатора тензора напряжений.

Термодинамические ограничения на значения материальных параметров среды

При решении конкретных задач термопластичности надо задать материальные параметры среды, в частности, удельную теплоёмкость $c(\theta)$, модуль объёмного сжатия $K(\theta)$, модуль сдвига $\mu(\theta)$ и коэффициент температурных напряжений $\gamma(\theta)$. Как правило, их значения берутся из опытных данных. И здесь необходимо обеспечить согласованность делаемого выбора с законами термодинамики.

Согласно первому и второму началам термодинамики в области упругого деформирования должно выполняться соотношение [6]

$$\rho_0 df = -\rho_0\eta d\theta + \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}\,, \tag{12}$$

где f, η – удельная (на единицу массы) свободная энергия и энтропия соответственно. Из уравнения (12) следует, что

$$\sigma_{ij} = \rho_0 \left(\partial f / \partial \varepsilon_{ij}\right)_\theta, \ \eta = -\left(\partial f / \partial \theta\right)_{\varepsilon_{ij}}. \tag{13}$$

Согласно принятому уравнению состояния Дюамеля – Неймана (6) – (8)

$$\sigma_{ij} = \left[-p_0 - \gamma(\theta)(\theta - \theta_0) + K(\theta)\varepsilon_{kk}\right]\delta_{ij} + 2\mu(\theta)\left(\tilde{\varepsilon}_{ij} - \varepsilon^{\mathrm{p}}_{ij}\right).$$

Подставив данное выражение в первое соотношение (13) и учтя неизменность пластической деформации в области упругого деформирования, интегрированием при постоянной температуре получаем

$$\rho_0 f = F(\theta) - \left[p_0 + \gamma(\theta)(\theta - \theta_0)\right]\varepsilon_{kk} + 0{,}5K(\theta)\varepsilon^2_{kk} + \mu(\theta)\left(\tilde{\varepsilon}_{ij} - \varepsilon^p_{ij}\right)\left(\tilde{\varepsilon}_{ij} - \varepsilon^p_{ij}\right), \tag{14}$$

где $F(\theta)$ – постоянная интегрирования. Исходя из второго соотношения (13), зависимости (14) и выражения для удельной теплоёмкости [7]

$$c = \theta\left(\partial \eta / \partial \theta\right)_{\varepsilon_{ij}},$$

находим

$$\rho_0 c/\theta = -F''(\theta) + \left[2\gamma'(\theta) + \gamma''(\theta)(\theta - \theta_0)\right]\varepsilon_{kk} - 0{,}5K''(\theta)\varepsilon^2_{kk} - \mu''(\theta)\left(\tilde{\varepsilon}_{ij} - \varepsilon^p_{ij}\right)\left(\tilde{\varepsilon}_{ij} - \varepsilon^p_{ij}\right).$$

Если удельная теплоёмкость принимается зависящей только от температуры, то должны выполняться равенства

$$\rho_0 c/\theta = -F''(\theta), \ K''(\theta) = 0, \ \mu''(\theta) = 0, \ 2\gamma'(\theta) + \gamma''(\theta)(\theta - \theta_0) = 0. \tag{15}$$

Следовательно, для модуля объёмного сжатия и модуля сдвига могут быть взяты либо фиксированные значения

$$K = K(\theta_0), \ \mu = \mu(\theta_0),$$

либо линейные температурные зависимости

$$K = K(\theta_0) + K'(\theta_0)(\theta - \theta_0), \ \mu = \mu(\theta_0) + \mu'(\theta_0)(\theta - \theta_0).$$

При этом коэффициент температурных напряжений должен быть постоянным,

$$\gamma = \gamma(\theta_0).$$

Последнее вытекает из третьего равенства (15) и конечности величины γ при $\theta = \theta_0$.

Выводы

При постановке задач термоупругости в расширенном диапазоне изменения температуры необходимо согласовывать выбор эмпирических зависимостей для удельной теплоёмкости, модуля объёмного сжатия, модуля сдвига и коэффициента температурных напряжений с термодинамическими соотношениями. Если удельная теплоёмкость считается зависящей только от температуры, то для модуля объёмного сжатия и модуля сдвига могут быть взяты либо фиксированные значения, либо линейные температурные зависимости. При этом коэффициент температурных напряжений должен быть постоянным. Если для указанных величин требуются более точные зависимости, к примеру, квадратичные, то тогда нужно брать более точное выражение для теплоёмкости. Такой согласованный выбор материальных параметров среды позволяет избежать нарушения первого и второго начал термодинамики.

Библиографический список

1. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1978. – 287 с.
2. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
3. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. – М.: Физматлит, 2001. – 704 с.

4. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
5. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 407 с.
6. Шемякин Е.И. Введение в теорию упругости. – М.: Изд-во МГУ, 1993. – 96 с.
7. Базаров И.П. Термодинамика. – М.: Высш. шк., 1991. – 376 с.

Получено 30.06.05.