УДК 539.3

В.А. Еремеев

Ростовский государственный университет

О ЛОКАЛЬНОЙ ГРУППЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ В МЕХАНИКЕ МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕД

Abstract

The new definition of local symmetry group of micropolar shell is proposed. Our local group definition based on the invariance of response function with respect to such transformations of reference configuration which are undistinguishable in terms of response to experiment. We consider only those diffeomorphisms which preserve the location of a common point of a shell and its tangent plane at this point. The relation are obtained between strain measures and response function (surface energy density) of the shell which are correspond to two different reference configurations sharing a common point and tangent space. The relations can be written in terms of four tensors and these quadruples form a local symmetry group. The response function is invariant with respect such local transformations of a reference configuration which are formed by elements of the local symmetry group. Analog of Noll's rule is established. Special subgroups and corresponding constitutive equations are given. The representations of constitutive equation of some classes of anisotropic and isotropic liquid and solid membranes and shells are given.

Становление и развитие механики сплошной среды тесно связаны с появлением и обобщенных математических моделей, рассматривающих частицу материала не как материальную точку, а как более сложный объект, наделенный дополнительными свойствами, описывающими микроструктуру материала. В значительной степени выдающимся этапом в развитии механики сплошной среды явилась работа братьев Эжена и Франсуа Коссера [1], в которой описана модель, впоследствии получившая названия *континуума Коссера* или *микрополярной среды*. В рамках этой модели каждая «микрочастица», образующая тело, представляет собой абсолютно твердое тело. Другими словами, учитывается не только изменение центров тяжести «микрочастиц», но и их ориентации. Таким образом, в рамках континуума Коссера учитывается вращательное взаимодействие частиц. Наряду с обычным полем напряжений в микрополярной среде присутствуют также и моментные напряжения.

Начиная с работы Э. и Ф. Коссера [1], опубликованной в 1909 г., механика микрополярной среды (континуума Коссера) получила значительное развитие в основополагающих работах Э.Л. Аэро и соавторов [2–4], В.И. Ерофеева [5], П.А. Жилина [6], Л.М. Зубова и соавторов [7–15], В.Т. Койтера [16], Р.Д. Миндлина и Г.Ф. Тирстена [70], В. Новацкого [20, 21], В.А. Пальмова [17], Р.А. Тупина [18], Л.И. Шкутина [22–24], К. Эрингена [25, 26, 27–32], а также в работах других авторов [33–47].

Более общие модели сред, содержащие бóльшее число степеней свободы (микроморфные среды или среды с микродеформацией), изучались В.И. Ерофеевым [5], Л.М. Зубовым [15], В.Т. Койтером [16], Р.А. Тупиным [18], К. Эрингеном [29, 30] и др. Механика сред с внутренними степенями свободы изучалась также М.А. Гузевым, И.А. Куниным, В.П. Мясниковым [58–60].

Модель микрополярной среды (континуума Коссера) нашла значительные приложения в механике твердого тела и жидкости. Отметим здесь только некоторые приложения к моделированию гранулированных и сыпучих сред, поликристаллических тел, композитов, геоматериалов, а в последнее время также и в наномеханике [46, 48, 49, 50].

Практически важный случай моментной среды – жидкие кристаллы исследовались Э.Л. Аэро [89], П. де Женом [90], А.С. Сониным [91], Дж. Эриксеном [92]. Модели жидких сред с микровращениями и моментными напряжениями, получивших название микрополярных жидкостей, в определенной степени получили даже бóльшее развитие по сравнению с твердым телом. Они ведут свое начало от работ Э.Л. Аэро [3] и К.Эрингена [27]. Реологические уравнения вязкоупругих моментных тел содержатся в работах О.Ю. Динариева и В.Н. Николаевского, К. Эрингена [28, 34]. Обширный обзор литературы по механике микрополярных жидкостей содержится в монографии [56]. Там же даны примеры применения теории моментных жидкостей в микрофильтрации и капиллярной дефектоскопии. Разным вопросам гидромеханики микрополярных жидкостей посвящены также работы [5, 10, 12, 26, 31, 39–41, 47, 51–55]. Отметим приложения микрополярной гидродинамики к исследованиям магнитных жидкостей [93, 94].

Отметим также, что наряду с трехмерными моделями сплошной среды идеи Коссера получили значительное развитие в теории пластин, оболочек и стержней [6, 15, 22–24, 42, 43, 45, 68, 69, 83, 84, 95–98].

В данной работе дано определение локальной группы материальной симметрии для нелинейно упругого континуума Коссера (микрополярной среды). Группа симметрии образована такими преобразованиями отсчетной конфигурации (начального состояния тела, от которого отсчитываются деформации), которые сохраняют инвариантной форму уравнения состояния для плотности потенциальной энергии деформации. Элементы группы представляют собой триплеты (упорядоченные тройки тензоров). Таким образом, уравнения состояния упругой среды оказываются нечувствительными к изменению отсчетной конфигурации, порождаемому элементами группы симметрии. Другими словами, с физической точки зрения преобразования отсчетной конфигурации, входящие в группу симметрии материала, невозможно определить экспериментально. Данное определение позволяет дать определения твердого, жидкого микрополярного тела, а также рассмотреть различные случаи анизотропии. На основе группы симметрии могут быть выписаны различные варианты уравнений состояния и указаны ограничения на тензоры материальных постоянных. Такие ограничения позволяют существенно понизить число материальных постоянных, подлежащих определению в ходе эксперимента. Кроме того, симметрии материала могут быть использованы в получении решений уравнений равновесия полуобратным методом.

В рамках механики простых материалов определение локальной группы материальной симметрии приведено во многих монографиях по нелинейной теории упругости и механике сплошной среды (см., например, [27, 62, 63]). Локальная группа материальной симметрии простого материала является подгруппой полной унимодулярной группы. Определение группы симметрии на случай микрополярной среды обобщено в [32]. Здесь группа симметрии представляет собой множество триплетов (троек тензоров). Вместе с тем авторы [32] ограничились только определением, не развивая теорию групп симметрии подобно [27]. Кроме того, авторы [32] не учли разную природу входящих в уравнения состояния тензоров. Дело в том, что одни аргументы уравнений состояния микрополярной среды являются истинными или полярными тензорами, в то время как другие – аксиальными или псевдотензорами. Основное отличие между аксиальными и полярными объектами состоит в том, что они по-разному преобразуются при отображении инверсии пространства [64, 65]. Примером псевдовектора является векторное произведение двух полярных векторов $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, а псевдотензора – $\mathbf{I}\times\mathbf{a}$ ($\mathbf{I}$ – единичный тензор). Различие между полярными и аксиальными объектами обычно в теории тензорного исчисления, теории электромагнетизма. В теории микрополярной среды псевдовекторами оказываются векторы объемных и поверхностных внешних моментов, вектор угловой скорости, а псевдотензорами – меры и тензоры изгибной деформации, тензор моментов. В данной работе такое различие учтено и показано, что оно может оказаться существенным.

В связи с развитием группы симметрии следует отметить, что по сравнению с трехмерным случаем больше «повезло» двухмерному – теории оболочек. Группа симметрии для упругих мембран была развита [66, 67], где, по существу, результаты трехмерного случая были легко перенесены на двухмерный. Свойство изотропии для упругих мембран введено в [66] и распространено на случай термоупругих мембран в [67].

Существенные усложнения в структуре уравнений состояния двухмерной среды (оболочки), состоящие в появлении нескольких аргументов – мер метрической и изгибной деформации, повлекли усложнения и в структуре группы симметрии. Кроме того, следует отметить существование различных моделей в теории оболочек. Исследования группы симметрии и симметрии уравнений состояния оболочек в рамках модели оболочек типа Нагхди [68, 69] (поверхности с набором деформируемых директоров) проводились в работах [70–78]. В частности, в [75] предложена процедура получения группы симметрии оболочки на основе группы симметрии трехмерного материала, из которого сделана оболочка. Для уравнений состояния упругих двухслойных мембран группа симметрии введена в [76], где также получены соответствующие представления для скалярно-, векторно- и тензорнозначных изотропных функций деформации мембраны. Наиболее обширное по охвату типов уравнений состояния исследование симметрии выполнено в [77, 78], где были рассмотрены уравнения состояния простых материальных поверхностей, материальных поверхностей с уравнением состояния второго порядка, а также поверхностей Коссера, на которых задано кинематически независимое от перемещений векторное поле директора. Элементами введенной в [77, 78] группы симметрии являются тройки (триплеты) соответствующих преобразований. Симметрии уравнений состояния оснащенных полем директора поверхностей как тройка соответствующих линейных преобразований рассматривались в [70, 71], где построены возможные инварианты, т.е. величины, не изменяющиеся на преобразованиях, образующих группу симметрии. Понятие группы симметрии для поверхностей, оснащенных директором, использовалось в [73].

Локальная группа материальной симметрии для оболочек типа Кирхгоффа – Лява, которая в определенной степени является частным случаем теории второго порядка, обсуждалась в [79, 80].

В случае общей нелинейной теории оболочек (оболочек типа Коссера), в которой деформация оболочки описывается при помощи радиус-вектора несущей поверхности и собственно ортогонального тензора поворота [81–83], введение локальной группы симметрии рассматривалось в работах [6, 81–88]. В [6, 81, 85] авторы ограничились случаем твердых оболочек, группа симметрии рассматривалась как подгруппа общей ортогональной группы. Более общий случай рассматривался в [86–88]. В [86, 87] была учтена зависимость энергии деформации от тензора кривизны поверхности оболочки в начальной конфигурации, и локальная группа материальной симметрии была образована четверками тензоров, описывающих деформацию отсчетного состояния оболочки. В [88] авторами была рассмотрена зависимость энергии деформации от тензора структуры оболочки, который лишь в частном случае может совпасть с обычным тензором кривизны. Кроме того, в [88] впервые в общем случае построения группы симметрии была учтена разница между аксиальными и полярными объектами. Более подробно история вопроса, связанного с построением группы симметрии для сред с дополнительными степенями свободы (как трехмерных, так и двухмерных), обсуждалась в [86, 88].

1. Основные соотношения микрополярной среды

Уравнения равновесия континуума Коссера вместе с динамическими краевыми условиями в геометрии отсчетной конфигурации имеют вид [6, 8, 11, 12, 16–18]

$$\operatorname{Div}\mathbf{T}+\rho\mathbf{f}=\mathbf{0},\qquad \operatorname{Div}\mathbf{M}-\left(\mathbf{T}\mathbf{F}^{T}\right)_{\times}+\rho\mathbf{c}=\mathbf{0},\qquad \mathbf{F}=\operatorname{Grad}\mathbf{x},\qquad \mathbf{X}\in V, \tag{1}$$

$$\mathbf{T}\mathbf{n}-\mathbf{f}_{\mathbf{s}}=\mathbf{0},\ \mathbf{M}\mathbf{n}-\mathbf{c}_{\mathbf{s}}=\mathbf{0},\ \ \mathbf{X}\in\partial V_{f}.$$

Здесь $\mathbf{T}$ и $\mathbf{M}$ – тензоры напряжений и моментных напряжений типа Пиолы – Кирхгоффа первого рода, ρ – плотность материала, $\mathbf{f}$ и $\mathbf{c}$ – массовые плотности сил и моментов, $\mathbf{f}_s$ и $\mathbf{c}_s$ – распределенные по части поверхности тела ∂V_f силы и моменты, $\mathbf{n}$ – вектор единичной нормали к телу, Div и Grad – операторы дивергенции и градиента в отсчетной конфигурации (в лагранжевом описании), $\mathbf{F}$ – градиент деформации, индексом $\times$ обозначен векторный инвариант тензора второго ранга, например, для диады $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ выполняется соотношение $\left(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\right)_{\times}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

Положение частиц среды в отсчетной конфигурации (начальном состоянии) описывается вектором $\mathbf{X}$, а в деформированном (актуальной конфигурации) – вектором $\mathbf{x}$ соответственно. Ориентация частиц в отчетной конфигурации задается тройкой ортонормированных векторов $\mathbf{D}_k$ ($k=1,2,3$), в то время как ориентация частиц в актуальной конфигурации – триэдром $\mathbf{d}_k$ ($k=1,2,3$). Изменение ориентации частиц в процессе деформации микрополярной среды описывается собственно ортогональным тензором микроповорота $\mathbf{Q}=\mathbf{d}_k\otimes\mathbf{D}_k$.

Для гиперупругой среды можно ввести функцию плотности потенциальной энергии деформации $W=W\left(\mathbf{F},\operatorname{Grad}\mathbf{Q}\right)$. Следуя работам [8, 10, 11] с использованием принципа материальной индифферентности, можно показать, что энергия деформации зависит от двух тензоров: тензора деформации $\mathbf{E}$ и изгибной деформации $\mathbf{K}$, определяемых соотношениями

$$\mathbf{E}=\mathbf{Q}^{T}\mathbf{F}-\mathbf{I},\ \ \mathbf{K}=\mathbf{Q}^{T}\mathbf{C}\mathbf{F}-\mathbf{B}, \tag{2}$$

где $\mathbf{I}$ – единичный тензор, а $\mathbf{C}$ и $\mathbf{B}$ – тензоры кривизны микроструктуры в актуальной и отсчетной конфигурации, определяемые формулами [10, 12]

$$\mathbf{C}=\frac{1}{2}\mathbf{d}_i\times\operatorname{grad}\mathbf{d}_i,\ \ \mathbf{B}=\frac{1}{2}\mathbf{D}_i\times\operatorname{Grad}\mathbf{D}_i \tag{3}$$

(здесь grad – оператор градиента в актуальной конфигурации).

При записи уравнений состояния для плотности потенциальной энергии деформации микрополярной среды следует учесть, что она зависит не только от тензоров деформации, но также и от параметров, зависящих от начального состояния. Таким параметром является тензор кривизны микроструктуры в отсчетной конфигурации $\mathbf{B}$. Таким образом, плотность потенциальной энергии деформации дается уравнением

$$W=W\left(\mathbf{E},\mathbf{K};\mathbf{B}\right), \tag{4}$$

а тензоры напряжений и моментных напряжений $\mathbf{T}$ и $\mathbf{M}$ в уравнениях движения (1) даются формулами

$$\mathbf{T}=\mathbf{Q}^{T}\frac{\partial W}{\partial\mathbf{E}},\quad \mathbf{M}=\mathbf{Q}^{T}\frac{\partial W}{\partial\mathbf{K}}.$$

2. Замена отсчетной конфигурации

Естественно, что уравнение состояния (4) зависит, вообще говоря, от выбора отсчетной конфигурации. Чтобы подчеркнуть зависимость энергии деформации от выбора конкретной отсчетной конфигурации κ будем записывать уравнение состояния с индексом κ внизу. Рассмотрим наряду с отсчетной конфигурацией κ другую отсчетную конфигурацию κ_*. Все величины, относящиеся к новой конфигурации κ_*, будем обозначать индексом *, например, векторы ориентации в κ_* обозначим через $\mathbf{D}_{*i}$.

Нетрудно установить, что градиенты деформации и тензоры микроворота, отсчитываемые от этих конфигураций, связаны соотношениями

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_*\mathbf{P}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_*\mathbf{R}, \tag{5}$$

где $\mathbf{P}$ – градиент деформации при отображении $\kappa \to \kappa_*$ ($\det \mathbf{P} \neq 0$), а $\mathbf{R}$ – тензор микроповорота при том же преобразовании ($\mathbf{D}_{*i} = \mathbf{R}\mathbf{D}_i$).

Используя (2), (3), (5) и результаты [86, 88], можно установить, что тензоры деформации и тензоры кривизны микроструктуры связаны соотношениями

$$\mathbf{E}_* = \mathbf{R}\mathbf{E}\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{I}, \quad \mathbf{K}_* = (\det \mathbf{R})\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{L}, \tag{6}$$

$$\mathbf{B}_* = (\det \mathbf{R})\mathbf{R}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{L}, \quad \mathbf{L} = (\det \mathbf{R})\mathbf{R}\mathbf{G}\mathbf{P}^{-1}.$$

В (6) тензоры $\mathbf{L}$ и $\mathbf{G}$ описывают изменение тензора кривизны микроструктуры при изменении отсчетной конфигурации.

Отметим, что тензоры деформации и изгибной деформации трансформируются при помощи разных формул, для $\mathbf{K}$ появляется определитель тензора $\mathbf{R}$. Это связано с тем, что $\mathbf{K}$, как и $\mathbf{B}$, является псевдотензором. Если ограничиться случаем собственно ортогональных тензоров $\mathbf{R}$, то эта разница пропадает.

Можно показать, учитывая, что энергия деформации описывает энергии одного и того же объема тела, что уравнения состояния для W и W_* связаны соотношением

$$|\det \mathbf{P}| W_*(\mathbf{E}_*, \mathbf{K}_*; \mathbf{B}_*) = W(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{B}).$$

Вообще говоря, вид W и W_* может быть разным. Зададимся вопросом, при каких преобразованиях, определяемых тройкой тензоров $\mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{L}$, эти зависимости оказываются одинаковыми. Очевидно, что для таких преобразований $|\det \mathbf{P}| = 1$. Действительно, трудно предположить, чтобы изменение удельного объема (плотности) отсчетной конфигурации не вызывало бы изменений в энергии тела.

Таким образом, определение преобразований отсчетной конфигурации, оставляющих неизменной плотность энергии деформации, возможно в результате анализа уравнения

$$W(\mathbf{E}_*, \mathbf{K}_*; \mathbf{B}_*) = W(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{B}).$$

Последнее соотношение может быть положено в основу следующего определения группы симметрии для микрополярной среды.

3. Определение группы симметрии

Определение. *Локальной группой материальной симметрии $\mathfrak{I}_\kappa$ микрополярного тела называется множество упорядоченных троек (триплетов) тензоров*

$$X = (\mathbf{P} \in \mathrm{Unim}, \quad \mathbf{R} \in \mathrm{Orth}, \quad \mathbf{L} \in \mathrm{Lin}),$$

удовлетворяющих соотношению

$$W(\mathbf{E},\mathbf{K};\mathbf{B}) = W\left(\mathbf{REP}^{-1} + \mathbf{RP}^{-1} - \mathbf{I},\, \det(\mathbf{R})\mathbf{RKP}^{-1} + \mathbf{L};\, \det(\mathbf{R})\mathbf{RBP}^{-1} - \mathbf{L}\right)$$

для всех тензоров $\mathbf{E}$*,* $\mathbf{K}$ *и* $\mathbf{B}$ *из области определения функции* W.

Здесь использованы следующие обозначения для групп: Orth – полная ортогональная группа, Unim – полная унимодулярная группа, Lin – группа тензоров относительно сложения.

Множество $\Im_\kappa$ является группой по отношению к операции $\circ$, определяемой формулой

$$(\mathbf{P}_1,\mathbf{R}_1,\mathbf{L}_1)\circ(\mathbf{P}_2,\mathbf{R}_2,\mathbf{L}_2) = \left[\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2,\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2,\mathbf{L}_1 + (\det\mathbf{R}_1)\mathbf{R}_1\mathbf{L}_2\mathbf{P}_1^{-1}\right].$$

Единичным элементов в $\Im_\kappa$ является $I = (\mathbf{I},\mathbf{I},\mathbf{0})$. Обратный элемент в $\Im_\kappa$ определяется соотношением

$$X^{-1} = (\mathbf{P},\mathbf{R},\mathbf{L})^{-1} = \left(\mathbf{P}^{-1},\mathbf{R}^T,-(\det\mathbf{R})\mathbf{R}^T\mathbf{LP}\right).$$

Локальная группа материальной симметрии $\Im_\kappa$ зависит от выбора отсчетной конфигурации и, естественно, может изменяться при изменении κ. Для операции $\circ$ можно доказать аналог правила Нолла, связывающего группы симметрии $\Im_1$ и $\Im_2$ для отсчетных конфигураций κ_1 и κ_2. Если элемент $P = (\mathbf{P},\mathbf{R},\mathbf{L})$ описывает изменение отсчетных конфигураций $\kappa_1 \to \kappa_2$ аналогично формулам (6), то группы симметрии $\Im_1$ и $\Im_2$ связаны соотношением

$$\Im_2 = P\circ\Im_1\circ P^{-1}.$$

Данное выше определение локальной группы материальной симметрии отличается от данного в [32] тем, что в нем проводится учет различия между псевдотензорами и истинными тензорами. Двухмерный вариант определения [88] отличается от приведенного здесь тем, что элементы группы в трехмерном случае принадлежат более широким подгруппам, например, полной ортогональной группе, а не группе вращений и отражений вокруг нормали к поверхности оболочки. Это означает, что группа симметрии трехмерного тела содержит больше элементов, чем аналогичная группа для оболочки и, следовательно, налагаемые на уравнения состояния требования принадлежности к той или иной группе симметрии оказываются более ограничительными.

4. Следствия

Структура группы симметрии налагает определенные ограничения на вид уравнений состояния микрополярного тела. Далее рассмотрим упрощения зависимости плотности энергии деформации, вытекающие из наличия той или иной группы симметрии.

Начнем с тривиальной группы симметрии, содержащей два элемента: $\Im_\kappa = (\mathbf{I},\pm\mathbf{I},\mathbf{0})$. Непосредственно из определения группы следует, что W оказывается четной функций $\mathbf{K}$ и $\mathbf{B}$:

$$W(\mathbf{E},\mathbf{K};\mathbf{B}) = W(\mathbf{E},-\mathbf{K};-\mathbf{B}).$$

Отсюда, в частности, сразу следует невозможность вхождения в W линейных по $\mathbf{K}$ членов без учета зависимости от $\mathbf{B}$ (слагаемые вида $\mathrm{tr}(\mathbf{BK})$ возможны).

Рассмотрим случаи, когда $\Im_\kappa$ образована всеми элементами полных групп Orth, Unim или Lin. Если группа симметрии содержит все элементы из Lin, то такое требование позволяет сократить число аргументов W следующим образом: $W(\mathbf{E},\mathbf{K};\mathbf{B}) = W(\mathbf{E},\mathbf{K}+\mathbf{B})$. Если изначально предположить, что W явно не зависит от тензора кривизны микроструктуры, т.е. $W = W(\mathbf{E},\mathbf{K})$, то тогда такая группа симметрии приводит к редуцированной модели континуума Коссера ($W = W(\mathbf{E})$), в которой моментные напряжения отсутствуют, в то время как моментное уравнение равновесия остается нетривиальным и служит определению тензора микроповорота. Редуцированные модели континуума Коссера рассматривались ранее в [24]. Если, кроме того, группа $\Im_\kappa$ содержит все элементы ортогональной группы, то тогда уравнение состояния сводится к нелинейно упругому телу $W = W\left(\sqrt{\mathbf{F}^\mathrm{T}\mathbf{F}}\right)$. Дальнейшая классификация этого случая хорошо известна [27, 62, 63].

Дадим определение жидкой и твердой микрополярной среды, основанное на теории групп симметрии. Как и в случае простых материалов, положим в основу определения микрополярной жидкости нечувствительность уравнений состояния к изменению отсчетной конфигурации. Другими словами, это означает, что соотношение $W(\mathbf{E},\mathbf{K};\mathbf{B}) = W\left(\mathbf{REP}^{-1} + \mathbf{RP}^{-1} - \mathbf{I}, \det(\mathbf{R})\mathbf{RKP}^{-1} + \mathbf{L}; \det(\mathbf{R})\mathbf{RBP}^{-1} - \mathbf{L}\right)$ должно выполняться для любых тензоров $\mathbf{P},\mathbf{R},\mathbf{L}$.

Определение. *Микрополярное тело называется жидкостью, если существует такая отсчетная конфигурация, называемая неискаженной, при которой выполняется соотношение*

$$W(\mathbf{E},\mathbf{K};\mathbf{B}) = W\left(\mathbf{REP}^{-1} + \mathbf{RP}^{-1} - \mathbf{I}, \det(\mathbf{R})\mathbf{RKP}^{-1} + \mathbf{L}; \det(\mathbf{R})\mathbf{RBP}^{-1} - \mathbf{L}\right)$$

для $\forall \mathbf{P} \in \mathrm{Unim}, \quad \forall \mathbf{R} \in \mathrm{Orth}, \quad \forall \mathbf{L} \in \mathrm{Lin}$.

Используя аналог правила Нолла, можно показать, что для микрополярной жидкости любая конфигурация является неискаженной.

Уравнение состояния упругой микрополярной жидкости сводится к виду

$$W = W^\times\left(\det(\mathbf{F}),\mathbf{C}\right).$$

Ранее другим способом это уравнения состояния было получено в [10, 12].

В случае твердой оболочки трудно предположить, чтобы независимые макро- микроповороты не сказывались бы на энергии деформации. Также физически нереальна нечувствительность твердого тела к изменению кривизны микроструктуры материала. Примем следующую гипотезу: микроповороты и макроповороты, не вызывающие изменения формы уравнений состояния, должны совпадать. Аналогичное предположение о совпадении поворотов директора и макроповоротов среды используется в теории нематических жидких кристаллов [90, 91]. Тогда имеем следующее определение.

Определение. *Микрополярное тело называется твердым, если существует такая отсчетная конфигурация, называемая неискаженной, при которой группа симметрии имеет структуру* $\Im_\kappa = (\mathbf{O},\mathbf{O},\mathbf{0})$, $\mathbf{O} \in S \subset Orth$, *т.е. выполняется соотношение*

$$W(\mathbf{E},\mathbf{K};\mathbf{B}) = W\left(\mathbf{OEO}^{-1}, \det(\mathbf{O})\mathbf{OKO}^{-1}; \det(\mathbf{O})\mathbf{OBO}^{-1}\right).$$

Структура подгруппы ортогональной группы S диктует ту или другую форму уравнений состояния для того или иного вида анизотропии. Например, изотропное микрополярное тело определяется так:

Определение. *Микрополярное тело называется изотропным, если существует такая отсчетная конфигурация, называемая неискаженной, что выполняется соотношение*

$$W(\mathbf{E},\mathbf{K};\mathbf{B}) = W\left(\mathbf{OEO}^{-1},\, \det(\mathbf{O})\mathbf{OKO}^{-1};\, \det(\mathbf{O})\mathbf{OBO}^{-1}\right),\ \forall \mathbf{O} \in \mathrm{Orth}\,.$$

Нетрудно видеть, что микрополярная жидкость является изотропной.

Приведем пример изотропного микрополярного тела: физически линейный материал [8]. Для него уравнение состояния представляет собой квадратичную форму $\mathbf{E}$ и $\mathbf{K}$,

$$W = \alpha_1 \,\mathrm{tr}(\mathbf{E})^2 + \alpha_2 \,\mathrm{tr}\left(\mathbf{E}\mathbf{E}^T\right) + \alpha_3 \,\mathrm{tr}\left(\mathbf{E}^2\right) + \beta_1 \,\mathrm{tr}(\mathbf{K})^2 + \beta_2 \,\mathrm{tr}\left(\mathbf{K}\mathbf{K}^T\right) + \beta_3 \,\mathrm{tr}\left(\mathbf{K}^2\right), \qquad (7)$$

где α_k, β_k – материальные постоянные. Отметим, что отсутствие в квадратичной форме перекрестных по $\mathbf{E}$ и $\mathbf{K}$ членов связано с тем, что при отсутствии зависимости от $\mathbf{B}$ функция W не может содержать линейных по $\mathbf{K}$ слагаемых. Можно показать, что если ограничиться квадратичной зависимостью $W = W(\mathbf{E},\mathbf{K})$, то представление (7) является максимально общим уравнением состояния в изотропном случае.

Ранее уже упоминалось, что по сравнению с двухмерным случаем теории оболочек группы симметрии трехмерного тела содержат больше элементов и налагают бóльшие ограничения на форму уравнения состояния. Действительно, физически линейный изотропный материал (7) имеет 6 независимых постоянных, в то время как изотропная физически линейная оболочка описывается 8 независимыми материальными постоянными [86 ,88].

Как и в случае оболочек [88], можно рассмотреть другие формы уравнений состояния микрополярного тела. Симметрии тензоров упругих постоянных также рассматривались в [30]. В связи с построением уравнений состояния для произвольных нелинейных зависимостей анизотропных микрополярных сред отметим также имеющуюся проблему, связанную с построением систем совместных инвариантов для истинных тензоров и псевдотензоров, решение которой в полном объеме не закончено. Как было отмечено выше, учет разницы между полярными и аксиальными объектами может оказаться существенным, а теории инвариантов [99] полярных объектов недостаточно.

Заключение

Представленная в работе теория симметрии уравнений состояния является развитием теории симметрии для общей нелинейной теории оболочек [88] на трехмерный случай. Предложено обобщение определения локальной группы материальной симметрии микрополярной среды, данного ранее в [32], с учетом разницы между полярными и аксиальными объектами (истинными векторами или тензорами и псевдовекторами или тензорами). С помощью этого определения проведена классификация уравнений состояния микрополярной среды.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда поддержки отечественной науки.

Библиографический список

1. Cosserat, E. et F. Théorie des corps deformables / E. Cosserat et F. Cosserat. – Paris, 1909. – vi+226 pp. (Appendix, pp. 953-1173 of Chwolson's Traite de Physicue. 2nd ed., Paris).
2. Аэро, Э.Л. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц /Э.Л. Аэро, Е.В. Кувшинский // ФТТ. – 1960. – Т.2. – № 7. – С. 1399–1409.
3. Аэро, Э.Л. Асимметрическая гидромеханика /Э.Л. Аэро, А.Н. Булыгин, Е.В. Кувшинский // ПММ. 1965. – Т.29. – № 2. – С. 297–308.
4. Кувшинский, Е.В. Континуальная теория асимметрической упругости / Е.В. Кувшинский, Э.Л. Аэро // ФТТ. – 1969. – Т. 5. – № 9. – С. 2591–2598.
5. Ерофеев, В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой / В.И. Ерофеев. – М.: МГУ, 1999. – 328 с.
6. Жилин, П.А. Основные уравнения неклассической теории упругих оболочек / П.А. Жилин// Тр. Ленингр. политехн. ин-та. – 1982. – № 386. – С. 29–46.
7. Еремеев, В.А. Условия фазового равновесия в нелинейно-упругих средах с микрострукту-рой /В.А.Еремеев, Л.М. Зубов // Докл. АН (Россия). – 1992. – Т. 322. – № 6. – С. 1052–1056.
8. Еремеев, В.А. Об устойчивости упругих тел с моментными напряжениями / В.А.Еремеев, Л.М. Зубов // Изв. РАН. МТТ. – 1994. – №3. – С. 181–190.
9. Еремеев, В.А. Некоторые проблемы устойчивости трехмерных нелинейно упругих тел / В.А.Еремеев, Л.М. Зубов // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. – 1999. – № 1. – С. 42–46.
10. Еремеев, Теория упругих и вязкоупругих микрополярных жидкостей / В.А. Еремеев, Л.М. Зубов // ПММ. – 1999. – Т. 63. – Вып. 5. – С. 801–815.
11. Зубов, Л.М. Вариационные принципы и инвариантные интегралы для нелинейно-упругих тел с моментными напряжениями / Л.М. Зубов // Изв. АН СССР. МТТ. – 1990. – № 6. – С. 10–16.
12. Зубов, Л.М. Уравнения вязкоупругой микрополярной жидкости / Л.М. Зубов, В.А. Еремеев // Докл. АН (Россия). – 1996. – Т. 351. – № 4. – С. 472–475.
13. Зубов, Л.М. Дислокации и дисклинации в нелинейно упругих телах с моментными напря-жениями / Л.М. Зубов, М.И. Карякин // ПМТФ. – 1990. – № 3. – С. 160–167.
14. Nikitin, E.N. Conservation laws and conjugate solutions in the elasticity of simple materials and materials with couple stress / E.N. Nikitin, L.M. Zubov // J. Elasticity. – 1998. – Vol. 51. – P. 1–22.
15. Zubov, L.M. Nonlinear theory of dislocations and disclinations in elastic bodies / L.M. Zubov. – Berlin, Heidelberg, New-York et al: Springer-Verlag, 1997. – 205 p.
16. Koiter, W.T. Couple-stresses in the theory of elasticity. Pt I—II / W.T. Koiter // Proc. Koninkl. Neterland. Akad. Wetensh. – 1964. – Vol. B67. № 1. P. 17–44.
17. Пальмов, В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости / В.А. Пальмов // ПММ. – 1964. – Т. 28. – Вып. 3. – С. 401–408.
18. Toupin, R.A. Theories of elasticity with couple-stress / R.A. Toupin // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1964. –Vol. 17. – № 2. – P. 85–112.
19. Миндлин, Р.Д. Эффекты моментных напряжений в моментной теории упругости / Р.Д. Миндлин, Г.Ф. Тирстен // Механика. – 1964. – № 4/86. – С. 80–114.
20. Новацкий, В. Теория упругости /В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
21. Nowacki, W. Theory of Asymmetric Elasticity /W. Nowacki. – Oxford, New-York, Toronto et al: Pergamon-Press, 1986. –383 pp.
22. Шкутин, Л.И. Нелинейные модели деформируемых моментных сред / Л.И. Шкутин //ПМТФ. – 1980. – № 6. – С. 111–117.
23. Шкутин, Л.И. Механика деформаций гибких тел/ Л.И. Шкутин. – Н.: Наука, 1988. – 127 с.
24. Шкутин, Л.И. Обобщенные модели типа Коссера для анализа конечных деформаций тон-ких тел/ Л.И. Шкутин // ПМТФ. – 1996. – Т. 37. – № 3. – С. 120–132.
25. Эринген, А.К. Теория микрополярной упругости / А.К. Эринген // Разрушение. Т. 2. – М.: Мир, 1975. – С. 646–751.

26. Эринген, А.К. Теория микрополярных жидкостей/ А.К. Эринген // Механика. – М.: Мир, – 1969. – № 4. – С. 79–93.
27. Eringen, A.C. Theory of micropolar fluids / A.C. Eringen // J. Math. Mech. – 1966. – Vol. 16. – № 1. – P. 1–18.
28. Eringen, A.C. Linear theory of micropolar viscoelasticity / A.C. Eringen // Int. J. Eng. Sci. – 1967. – Vol. 5. – № 2. – P. 191–204.
29. Eringen, A. C. Nonlocal polar field theories / A.C. Eringen // In. A. C. Eringen (ed.), Continuum Physics, Vol. 4. – Academic Press: New York, 1976. – P. 205–268.
30. Eringen, A.C. Microcontinuum Field Theories. I. Foundations and Solids / A.C. Eringen. – Berlin, Heidelberg, New-York et al: Springer-Verlag. 1999. – 325 pp.
31. Eringen, A.C. Microcontinuum Field Theories. II. Fluent Media / A.C. Eringen. – Berlin, Heidelberg, New-York et al: Springer-Verlag. 2001. – 342 pp.
32. Eringen, A.C. Polar field theories / A.C. Eringen, C.B. Kafadar // In. A. C. Eringen (ed.), Continuum Physics, Vol. 4. – New York: Academic Press, 1976. – P. 1–75.
33. Грекова, Е. Ф. Уравнения нелинейных упругих полярных сред / Е.Ф. Грекова, П.А. Жилин // Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки. – 2000. Спецвыпуск. Нелинейные проблемы механики сплошных сред. – С. 24–46.
34. Динариев, О.Ю. Определяющие соотношения для вязкоупругой среды с микровращениями / О.Ю. Динариев, В.Н. Николаевский // ПММ. – 1997. – Т.61. №6. – С. 1023–1030.
35. Еремеев, В.А. О влиянии микроструктуры материала на потерю устойчивости двухфазных нелинейно-упругих тел / В.А. Еремеев // Фундамент. и прикл. проблемы деформируемых сред и конструкций: тр. межвуз. научн. программы. Вып. 1. – 1993. Н.-Новгород. – С. 187–193.
36. Еремеев, В.А. Равновесие и устойчивость микронеоднородных упругих тел, испытывающих фазовые превращения / В.А. Еремеев // Матем. моделирование. – 1997. – Т.9. – № 2. С. 66–69.
37. Еремеев, В.А. Фазовые превращения в оболочках Коссера / В.А. Еремеев // Изв. вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки. – 2001. Спецвыпуск. Математическое моделирование. – С. 64–67.
38. Еремеев, В.А. Фазовые превращения в сильно деформированных нематических жидких кристаллах / В.А. Еремеев // Математ. моделирование систем и проц. – 2002. – Вып. 10. – С. 26–31.
39. Еремеев, В.А. Конвективная неустойчивость плоского слоя вязкоупругой микрополярной жидкости со свободными границами / В.А. Еремеев, Д.А. Сухов //Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. – 2003. – № 4. – С. 24–27.
40. Еремеев, В.А. Конвективная неустойчивость плоского слоя вязкоупругой микрополярной жидкости / В.А. Еремеев, Д.А. Сухов // Изв. вузов. Сев.-Кавк. Регион. Естеств. науки. – 2004. Спецвыпуск. Математика и механика сплошной среды. – С. 101–109.
41. Eremeyev, V.A. Convective instabilities in thermoviscoelastic micropolar fluids / V.A. Eremeyev, D.A. Sukhov // Matemáticas: Enseńanza Universitaria. – 2005. – Vol. XIII. – № 1. – P. 31–42.
42. Antman, S.S. Nonlinear problems of elasticity / S.S. Antman. – Berlin, Heidelberg, New-York et al: Springer-Verlag, 1995. – 751 pp.
43. Grekova, E.F. Ferromagnets and Kelvin's medium: basic equations and wave processes / E.F. Grekova // J. Computational Acoustics. – 2001. – Vol. 9. – № 2. – P. 427–446.
44. Grekova, E.F. Modelling of complex elastic crystals by means of multi-spin micromorphic media / E.F. Grekova, G.A. Maugin //Int. J. Eng. Sci. – 2005. – Vol. 43. – № 5–6. P. 494–519.
45. Grekova, E. Basic equations of Kelvin's medium and analogy with ferromagnets / E. Grekova, P. Zhilin // J. Elasticity. – 2001. – Vol. 64. – P. 29–70.
46. Harris, D. A hyperbolic well-posed model for the flow of granular materials/ D. Harris, E. Grekova// J. Eng. Mathematics. – 2005. – Vol. 50. – P. 1–29.
47. Листров, А.Т. О модели вязкой жидкости с несимметричным тензором напряжений / А.Т. Листров // ПММ. – 1967. – Т.31. – № 1. – С. 112–115.
48. Учет моментного взаимодействия при расчете изгибной жесткости наноструктур / Е.А. Иванова [и др.]// Доклады РАН. – 2003. – Т. 391. – № 6. – С. 764–768.

49. Келлер, И.Э. Фрагментация металлов при больших деформациях: один механизм образования пространственно-модулированных вихревых структур / И.Э. Келлер, П.В. Трусов// ПМТФ. – 2002. – Т. 43. – № 2. – С. 176–186.
50. Келлер, И.Э. Фрагментация геометрически-нелинейной моментной кристаллической среды / И.Э. Келлер, П.В. Трусов // Изв. РАН. МТТ. – 2003. – № 2. – С. 105–115.
51. Нго, Зуй Кан О тепловой конвекции микрополярной жидкости / Зуй Кан Нго, Суан Хью Нгуен // Докл. АН СССР. – 1987. – Т. 295. – № 3. – С. 559–562.
52. Нгуен, Ван Дьеп Об уравнениях пограничного слоя жидкости с моментными напряжениями / Ван Дьеп Нгуен // ПММ. – 1968. – Т. 32. – № 4. – С. 748–753.
53. Нгуен, Ван Дьеп О неизотермической модели несимметрических жидкостей / Ван Дьеп Нгуен, А.Т. Листров // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1967. – №5. – С. 132–136.
54. Петросян, Л.Г. Некоторые вопросы механики жидкостей с несимметричным тензором напряжений / Л.Г. Петросян. – Ереван: Изд. Ереван. ун-та, 1986. – 304 с.
55. Бессонов, Н.М. Моментная гидродинамическая теория трения / Н.М. Бессонов, Э.Л. Аэро // Трение и износ. – 1993. – Т. 14. – № 1. – С. 107–111.
56. Мигун, Н.П. Гидродинамика и теплообмен градиентных течений микроструктурной жидкости / Н.П. Мигун, П.П. Прохоренко. – Минск: Наука и техника, 1984. – 264 с.
57. Pietraszkiewicz, W. Finite rotations in the description of continuum deformation / W. Pietraszkiewicz, J. Badur // Int. J. Engng. Sci. – 1983. – Vol. 21. – № 9. – P.1097–1115.
58. Кунин, И.А. Теория упругих сред с микроструктурой / И.А. Кунин. – М.: Наука, 1975. – 416с.
59. Мясников, В.П. Геометрическая модель внутренних самоуравновешенных напряжений в твердых телах / В.П.Мясников, М.А. Гузев // Докл. АН (Россия). – 2001. – Т. 80. – №. – С. 1–3.
60. Мясников, В.П. Структурное писание материалов/ В.П.Мясников, М.А. Гузев, А.А. Ушаков // Изв. вузов. Сев.-Кавк. Регион. Естеств. науки. – 2003. Спецвыпуск. Нелин. пробл. мех. сплошных сред. – С. 256–265.
61. Truesdell, C. The nonlinear field theories of mechanics. In Handbuch der Physik. III/3. (ed. S. Flügge) / C. Truesdell, W. Noll. – Berlin: Springer-Verlag, 1965. – P. 1–602.
62. Трусделл, К. Первоначальный курс рациональной механики сплошной среды / К. Трусделл. – М.: Мир, 1975. – 592 с.
63. Лурье, А. И. Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
64. Жилин, П.А. Векторы и тензоры второг ранга в трехмерном пространстве /П.А. Жилин. – СПб: Нестор, 2001. – 275 с.
65. Зубов, Л.М. Тензорное исчисление. Основы теории / Л.М. Зубов, М.И. Карякин. – М.: Вузовская книга, 2006. – 120с.
66. Gurtin, M.E. A continuum theory of elastic material surfaces / M.E. Gurtin, A.I. Murdoch // Arch. Rational Mech. Anal. –1975. – Vol. 57 – P. 291–323.
67. Murdoch, A.I. A thermodynamical theory of elastic material interfaces /A.I. Murdoch // Q.J. Mech. Appl. Math. –1976. – Vol. XXIX. – P. 245–274.
68. Naghdi, P.M. The theory of plates and shells/ P.M. Naghdi // S. Flügge (ed.), Handbuch der Physik, Vol. VIa/2. Berlin, 1972. – P. 425–640.
69. Rubin, M.B. Cosserat Theories: Shells, Rods and Points / M.B. Rubin. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. – 480 p.
70. Adeleke, S.A. On symmetry of shells / S.A. Adeleke // J. Elast. – 1983. – Vol. 13. – P. 111–119.
71. Adeleke, S.A. On possible symmetry of shells / S.A. Adeleke // The Breadth and Depth of Continuum Mechanics. A collection of papers dedicated to J.L.Ericksen on his 60th birthday. Eds by C. M.Dafermos, D. D. Joseph, & F. M. Leslie, – Berlin: Springer-Verlag, 1986. – P. 745–757.
72. Carrol, M.M. The influence of the reference geometry on the response of elastic shells / M.M. Carrol, P.M. Naghdi // Arc. Rat. Mech. Anal. – 1972. – Vol.48. – P.302–318.
73. Cohen, H., A mathematical analysis of the simplest direct models for rods and shells / H. Cohen, C.-C. Wang // Arc. Ration. Mech. Anal. – 1989. – Vol. 108. – № 1. – P.35–81.
74. Ericksen J.L. Symmetry transformations for thin elastic shells / J.L. Ericksen // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1972. – Vol. 47. – P. 1–14.

75. Ericksen J.L. Apparent symmetry of certain thin elastic shells / J.L. Ericksen // J. Mecanique. – 1973. Vol.12. No1. P.12–18.
76. Wang, C.-C., On the response functions of isotropic elastic shells / C.-C. Wang // Arch. Rational Mech. Anal. – 1973. – Vol. 50. – P. 81–98
77. Murdoch, A.I. Symmetry considerations for material surfaces / A.I. Murdoch, H. Cohen // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1979. – Vol.72. – № 1. – P. 61–98.
78. Murdoch, A.I. Symmetry considerations for material surfaces. Addendum / A.I. Murdoch, H. Cohen // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1981. – Vol. 76. – № 4. – P. 393–400.
79. Steigmann, D. J. Elements of the theory of elastic surfaces/ D. J. Steigmann // I. B. Fu and R.W. Ogden (eds.), Nonlinear Elasticity: Theory and Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. – P. 268–304.
80. Steigmann, D. J., Ogden R. W., Elastic surface-substrate interaction / D. J. Steigmann // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1999. – Vol. 455. –P. 437–474.
81. Chróścielewski, J. Statics and Dynamics of Multifold Shells: Nonlinear Theory and Finite Element Method (in Polish)/ J. Chróścielewski, J. Makowski, W. Pietraszkiewicz. – Warszawa: Wydawnictwo IPPT PAN, 2004. – 612 p.
82. Libai, A. The Nonlinear Theory of Elastic Shells, 2nd ed. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press / A. Libai, J.G. Simmonds. – 1998. – 560 pp.
83. Зубов, Л.М. Механика упругих микрополярных оболочек/ Л.М. Зубов, В.А. Еремеев // Дальневосточный математический журнал. – 2003. – Т. 4. – № 2. – С. 182–225.
84. Альтенбах, Х. Общая теория упругих простых оболочек / Х. Альтенбах, П.А. Жилин // Успехи механики. – 1988. – Т. 11. – Вып. 4. – С. 107–148.
85. Altenbach, H. A. A direct approach to the formulation of constitutive equations for rods and shells/ H. Altenbach, K. Naumenko, P. Zhilin // W. Pietraszkiewicz and C. Szymczak (eds.), Shell Structures: Theory and Applications. – London et al.: Taylor & Francis, 2005. – P. 87–90.
86. Еремеев, В.А. Общая нелинейная теория упругих микрополярных оболочек/ В.А. Еремеев, Л.М. Зубов // Изв. вузов. Сев.-Кавк. Регион. Естеств. науки. – 2003. Спецвыпуск. Нелин. пробл. мех. сплошных сред. – С. 124–169.
87. Eremeyev, V. A. Nonlinear micropolar shells: theory and applications/ V.A. Eremeyev // W. Pietraszkiewicz and C. Szymczak (eds). Shell Structures: Theory and Applications. – London et al.: Taylor & Francis, 2005. – P. 11–18.
88. Eremeyev V.A. Local symmetry group in the general theory of elastic shells/ V.A. Eremeyev, W. Pietraszkiewicz // J. Elasticity. – 2006. (in print)
89. Аэро, Э.Л. Гидромеханика жидких кристаллов / Э.Л. Аэро, А.Н. Булыгин // Итоги науки и техники. Гидромеханика. Т. 7. – М.: ВИНИТИ, 1973. – С. 106–213.
90. Жен де П. Физика жидких кристаллов / Жен де П. – М.: Мир, 1982. – 304 с.
91. Сонин, А.С. Введение в физику жидких кристаллов / А.С. Сонин. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
92. Эриксен, Дж. Статика жидких кристаллов / Дж. Эриксен // Исследования по механике сплошных сред. – М.: Мир, 1997. – С. 46–123.
93. Такетоми, С. Магнитные жидкости / С. Такетоми, С. Тикадзуми. – М.: Мир, 1983. – 272 с.
94. Фертман, В.Е. Магнитные жидкости / В.Е. Фертман. – Минск: Высш. школа, 1988. –184 с.
95. Амбарцумян, С.А. Микрополярная теория оболочек и пластин / С.А. Амбарцумян. – Ереван: Изд-во НАН Армении, 1999. – 214 с.
96. Саркисян, С.О. Микрополярная теория тонких стержней, пластин и оболочек / С.О. Саркисян // Изв. НАН Армении. – 2005. – Т. 58. – № 2. – С. 84–94.
97. Елисеев, В.В. Механика упругих тел / В.В. Елисеев. – СПб: СПбГТУ, 1999. – 341 с.
98. Илюхин, А.А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней/ А.А. Илюхин. – Киев, 1979. – 216 с.
99. Спенсер, А. Теория инвариантов / А. Спенсер. – М.: Мир: перевод: A.J.M. Spencer Theory of invariants// Continuum Physics, – Vol. 1. A.C. Eringen (ed), Academic Press. New-York. 1971. P. 292–307.

Получено 7.07.2006.