

О.Б. Наймарк

Институт механики сплошных сред УрО РАН (г.Пермь)

СТРУКТУРНО-СКЕЙЛИНГОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ И СУПЕРСТАТИСТИКА СИСТЕМ С МЕДЛЕННОЙ ДИНАМИКОЙ

Abstract

The generation of *Boltzmann-Gibbs* statistics which is known as *nonextensional statistical mechanics* (the Tsallis statistics) and the superstatistics for nonequilibrium mesoscopic systems with slow dynamics is considered *in terms of* the Leontovitch conception of effective field introduced to determine nonequilibrium *thermodynamic potentials*. As applied to condensed media which behavior is accompanied by nonlinear dynamics of localized *finite amplitude perturbations* of intensive variables (localized distortions), the statistical description is developed. It allow to establish a correspondence between statistical distributions universality classes in superstatistics and characteristic types of nonequilibrium transitions in mesoscopic systems with localized distortions – structural-scale transitions.

Многие неравновесные системы обнаруживают так называемую медленную динамику, обусловленную пространственно-локализованными конечно-амплитудными флуктуациями некоторых интенсивных переменных. Характерными примерами таких систем являются жидкости в условиях турбулентного течения, спиновые стекла, твердые тела при пластической деформации, биологические системы [1]. Понимание поведения указанных систем связано с исследованием статистических закономерностей динамики пространственно-временных структур различной сложности.

Сопоставление поведения неравновесных систем с медленной динамикой с системами, находящимися в состоянии термодинамического равновесия, показывает, что отличительной особенностью систем с медленной динамикой является их «подчиненность» некоторым коллективным «эффективным» степеням свободы. Эта черта в поведении данных систем отражается на качественном виде статистических распределений переменных, характеризующих динамическое поведение системы.

Большинство систем, находящихся в термодинамическом равновесии, следуют статистике Больцмана–Гиббса, для которой ключевыми являются следующие три положения: определение функционала энтропии $S = -k \sum_i p_i \ln p_i$ (при условии $\sum_i p_i = 1$ и $\sum p_i E_i = U$ для канонического ансамбля); форма равновесного распределения $p_i = e^{-\beta E_i} / Z$, где $Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$, и третье – связь с термодинамическими потенциалами, например, $F = -(1/\beta) \ln Z$ и $U = -(\partial/\partial\beta) \ln Z$.

Однако многие неравновесные системы, и системы с «медленной динамикой» – яркий тому пример, обнаруживают асимптотически степенные статистические распределения [2]. Данные распределения типичны для нелинейных систем, для которых нарушается важнейшее термодинамическое свойство – аддитивность энтропии Больцмана–Гиббса. Аддитивность энтропии для равновесных или близких к равновесию систем является следствием локального взаимодействия между элементами системы. Однако значительно более широкий класс представляют явления, происходящие в системах, где элементы системы взаимодействуют глобально, чему предшествует снижение симметрии системы, связанное с формированием коллективных мод интенсивных переменных.

В [2,3,4] предложено обобщение статистики Больцмана–Гиббса для неравновесных систем с медленной динамикой, получившее название неэкстенсивной статистики и су-

перстатистики. Суть предложенного обобщения касается второго положения статистики Больцмана – Гиббса, а именно введение распределения, обобщающего больцмановский фактор, $B(E) = \int_0^\infty d\beta f(\beta) e^{-\beta E}$, или, в случае неэкстенсивной статистики, введение распределения, включающего так называемый показатель неэкстенсивности. При обсуждении возможных причин, ограничивающих применимость статистики Больцмана–Гиббса для неравновесных систем, отмечается, что распространенной является ситуация, когда системы, обнаруживая присущее им стационарное состояние или медленную динамику, не только неэргодичны, но и далеки от этого состояния в некоторой исходной области фазового пространства.

В настоящей работе показано, что подходы неэкстенсивной статистики и суперстатистики по своей основной идее соответствуют ранее предложенной концепции обобщения статистики Больцмана – Гиббса на неравновесные состояния, развитой Леонтовичем для определения неравновесных термодинамических потенциалов (неравновесной свободной энергии) и известной как метод «эффективного поля». Сопоставление данных подходов проведено на основе развитого статистического описания, установившего новый класс критических явлений в неравновесных системах с «медленной динамикой» – структурно-скейлинговые переходы. Обсуждается связь установленных классов универсальности для $f(\beta)$ определенным типам структурно-скейлинговых переходов, сопровождающихся зарождением различных коллективных мод интенсивных переменных для соответствующих значений параметра структурного скейлинга – независимого параметра порядка для неравновесных систем с медленной динамикой. Показана связь динамического поведения указанных систем в условиях структурно-скейлинговых переходов с описаниями в рамках неэкстенсивной статистики и суперстатистики применительно к статистическим закономерностям развитой турбулентности.

Неэкстенсивная статистическая механика и суперстатистика

Анализ основных положений статистики и термодинамики Больцмана – Гиббса позволил предложить эвристический вариант обобщения статистической механики [3]. Основная идея, лежащая в основе данного подхода, получившего название неэкстенсивной статистической механики, основана на предположении, что физические системы достаточной сложности не могут максимизировать обычную энтропию Больцмана – Гиббса, следующую из статистической механики. С целью сохранения основной идеи Больцмана, было предложено характеризовать состояние сложных систем некоторой другой, более общей мерой энтропии, также удовлетворяющей принципу максимума.

В соответствии с данной идеей вводится стационарная функция распределения, определенная обобщенным распределением вида

$$P(u) = \frac{1}{Z_q} (1 - (q-1)\beta E(u))^{-1/(q-1)}, \quad (1)$$

где $E(u)$ – эффективная энергия, ассоциированная с переменной u и условием нормировки

$$Z_q = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + (q-1)\beta E(u))^{-1/(q-1)} du,$$

где величина $\beta = 1/\Theta$ – формально обратная (эффективная) температура; q – энтропийный индекс.

Распределение (1) получается как условие максимума (при соответствующих условиях) так называемой энтропии Тсаллиса,

$$S_q = k_B \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_i p_i^q \right), \quad (2)$$

где p_i – заданная вероятность. Важным свойством энтропии Тсаллиса (T -энтропии) является «выпуклость» функционала (2). Для $q = 1$ T -энтропия сводится к энтропии Больцмана–Гиббса и, таким образом, предложенная статистическая механика в равновесном случае непротиворечива со статистикой Больцмана – Гиббса.

Из представления (2) также следует, что энтропия Тсаллиса «неэкстенсивна», то есть не аддитивна для ансамбля подсистем. Распределения интенсивных величин в этом случае переходят в степенные обобщения для канонического ансамбля с q , соответствующим показателю степенного закона.

В [5] отмечалось, что q -распределение может быть представлено в виде интегрального преобразования Лапласа, с использованием функции преобразования в виде экспоненты Больцмана – Гиббса

$$e_q^{-\beta_q E_i} = \int_0^\infty d\beta e^{-\beta E_i} f_q(\beta),$$

для частного случая представления $f_q(\beta)$ в виде χ^2 -распределения.

В этом случае q представимо в виде

$$q = \frac{\langle \beta^2 \rangle}{\langle \beta \rangle^2},$$

где $\langle \cdot \rangle = \int_0^\infty d\beta (\cdot) f_q(\beta)$.

Эта особенность была в дальнейшем обобщена в [3] и реализована в варианте так называемой *суперстатистики*, представляющей собой статистическое усреднение статистики Больцмана – Гиббса, в которой температура (или ее аналог) предполагаются статистической переменной.

В этом случае вводится распределение

$$B(E_i) = \int_0^\infty d\beta e^{-\beta E_i} f(\beta),$$

где $f(\beta)$ – обобщенное распределение, удовлетворяющее условию

$$\int_0^\infty d\beta f(\beta) = 1.$$

Изложенное выше обобщение статистики Больцмана–Гиббса (неэкстенсивная статистическая механика и суперстатистика) активно обсуждается [6], в том числе в критическом плане. Отмечается, в частности, что классический вариант статистики Больцмана–Гиббса достаточен для описания поведения систем, принадлежащих к классу неинтегрируемых, и не требует привлечения обобщенной q -статистики. Одновременно,

интерес к обобщению статистики Больцмана–Гиббса в значительной степени связан с наблюдаемыми экспериментально и в ходе моделирования методами молекулярной динамики аномалиями микроскопического поведения, а также типичными для систем с «медленной динамикой» эффектами, обусловленными длинно-корреляционными взаимодействиями в различных физических системах, находящихся, например, в условиях метастабильности.

Важной особенностью поведения систем с медленной динамикой является существование двух временных масштабов – локального τ (в выделенной мезоскопической подсистеме) и глобального T (в целой для всей системы, содержащей n подсистем). Исследование ряда реальных систем в рамках рассматриваемых обобщений статистики Больцмана–Гиббса показало связь статистик для эффективных температур с временными масштабами, характерными для всей системы [7].

Интерпретация экспериментальных данных с использованием формализма суперстатистики показала существование трех универсальных классов статистических распределений для эффективных температур. Данный анализ был проведен при исследовании асимптотик распределений в суперстатистике [8]. Типичные распределения $f(\beta)$ для распространенных экспериментальных ситуаций следующие:

χ^2 -распределение

$$f(\beta) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \left(\frac{n}{2\beta_0} \right)^{n/2} \beta^{n/2-1} e^{-n\beta/2\beta_0},$$

где $\beta_0 = \langle \beta \rangle$ и соответствуют состояниям ансамбля мезоскопических доменов, каждый из которых характеризуется низким значением энергии E . Используя определение $B(E)$, можно записать

$$B(E) = \langle e^{-\beta E} \rangle = e^{-\beta E_0} \langle e^{-(\beta - \beta_0)E} \rangle.$$

Представляя последний сомножитель в виде разложения в ряд Тейлора, получаем

$$B(E) = e^{-\beta_0 E} \left(1 + \frac{1}{2} \sigma^2 E^2 + \sum_{k=3}^{\infty} (\beta_0 - \beta)^k \frac{E^k}{k!} \right),$$

где $\sigma^2 = \langle \beta^2 \rangle - \langle \beta \rangle^2 = \langle \beta^2 \rangle - \beta_0^2$ – величина дисперсии. Эта аппроксимация представляет коррекцию обычного статистического распределения для неоднородной мезоскопической системы с флуктуациями температуры при малых значениях энергии. Данный тип суперстатистики соответствует статистике Тсаллиса, которая обнаруживает степенной закон затухания для гауссовых переменных [8].

Обратное χ^2 -распределение. Аналогичное рассмотрение может быть проведено, если «температура» β^{-1} более, чем сама величина β , представляет сумму множества квадратов гауссовых случайных переменных, возникающих в ансамбле микроскопических степеней свободы ξ_i . В результате $f(\beta)$ представляет обратное χ^2 -распределение вида

$$f(\beta) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \left(\frac{n\beta_0}{2} \right)^{n/2} \beta^{-n/2-2} e^{-n\beta_0/2\beta}.$$

Log-нормальное распределение. В отличие от ситуации, когда величина β дается суммой многочисленных вкладов, для других систем, в частности для турбулентности, случайная переменная β может быть генерирована мультипликативными случайными процессами. В этом случае поведение системы определяется с локальными каскадами случайных переменных $X_1 = \prod_{i=1}^I \xi_i$, где I – число «участников» каскада и ξ_i – положительные микроскопические случайные переменные. В соответствии с центральной предельной теоремой для больших I случайные переменные

$$\frac{1}{\sqrt{I}} X_1 = \frac{1}{\sqrt{I}} \sum_{i=1}^I \log \xi_i$$

имеют гауссово распределение. Как следствие, X_1 имеет *Log-нормальное* распределение. В общем случае имеет место вклад в β n произведений переменных X ,

$$\beta = \prod_{i=1}^n X_i,$$

и, как следствие, $\log \beta = \sum_{i=1}^n X_i$ представляет собой сумму гауссовых случайных распределений. Таким образом, β имеет вид *Log-нормального* распределения

$$f(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s \beta} \exp \left\{ -\frac{(\ln(\beta/\mu))^2}{2s^2} \right\},$$

где μ и s^2 – соответствующие величины среднего значения и дисперсии. Очевидно, что *Log-нормальный* результат для β также независим от деталей случайного каскада микроскопических переменных ξ_i и, таким образом, *Log-нормальная* статистика является также универсальной.

Общей чертой всех рассмотренных универсальных (в смысле суперстатистики) распределений является слабая зависимость от статистики микроскопических переменных как в случае аддитивного их вклада в β (или β^{-1}), так и мультипликативного, то есть вклада каскадов.

Несмотря на то, что более сложные случаи могут иметь место, в [7] утверждается, что большинство экспериментальных данных соответствуют трем рассмотренным типам универсальности, или простым их комбинациям.

Микроскопическая динамика «неэкстенсивных» систем

Формализм суперстатистики связан с необходимостью определения (например, по данным эксперимента) функций распределения для интенсивного параметра β , характеризующего условия термализации мезоскопической системы. Отметим, что поведение последних в условиях «медленной динамики» определяется не только значениями «эффективных температур», но и соответствующим им типам «эффективных степеней свободы» – коллективных мод интенсивных переменных, природа которых определяется особенностями длинно-корреляционного взаимодействия в мезоскопической системе, или более конкретно – структурой лагранжиана. Обсуждение этого важного вопроса тра-

диционно остается за рамками неэкстенсивной статистики и суперстатистики, но, по-видимому, определение вида лагранжиана для конкретных мезоскопических систем, наряду с условиями термализации, обусловленными «эффективными степенями свободы» мезоскопической системы, может снять неопределенность в выборе функций распределения для «эффективных температур» или даже необходимость введения последних.

Для иллюстрации особенностей поведения данных систем рассмотрим дискретную модель развития турбулентности и результаты моделирования, которые анализируются в [9] с использованием представлений суперстатистики. В [10] предложена модель, представляющая одномерный аналог течения Кармана, широко используемого для исследования турбулентности [11,12]. Эта модель описывает поведение нелинейной «решетки» частиц, возбуждаемой на концах, и при учете диссипации, имитирующей эффекты вязкости. Несмотря на одномерность, модель описывает зарождение пространственных структур при численном моделировании и может использоваться для сопоставления результатов с экспериментальными наблюдениями характеристик турбулентных потоков, например, временных зависимостей для показателей скорости. Оказалось, что исследование динамики в рамках простых моделей обнаруживает ряд интересных аналогий с экспериментальными результатами [11]. Турбулентность в решетке инициировалась внешним возмущением, соответствующим в реальном эксперименте течению Кармана, то есть течению жидкости, заключенной между вращающимися дисками. Диски инициируют крупномасштабный вихрь, который может породить полностью развитый турбулентный поток при достаточно сильном вращении.

Дискретный аналог такого возбуждения соответствует движению $(N+1)$ частицы, инициированному движением концов одномерной решетки.

Гамильтониан системы представлен в виде:

$$H = \sum_n \frac{1}{2} \left(\frac{dy_n}{dt} \right)^2 + \frac{1}{4} K \left[(y_n - y_{n-1})^2 + (y_{n+1} - y_n)^2 + \omega^2 (e^{-y_n} - 1)^2 \right] = \sum_n e_n(t), \quad (3)$$

где y_n определяет координату n -го осциллятора; K – константа взаимодействия между ближайшими осцилляторами; ω^2 – определяет глубину одночастичного потенциала Морса; $e_n(t)$ локальная плотность энергии для частицы, соответствующей y_n . Соответствие условиям реального эксперимента, в котором существенен вклад вязкости в диссипацию энергии, достигалось введением в рассматриваемую модель слагаемого, отражающего диссипативный вклад в уравнение Навье–Стокса $-\nu \nabla^2 v$, где ν – кинематическая вязкость.

Уравнения движения для частиц в этом случае принимают вид

$$y_n - K(y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n) - 2\omega^2 e^{-y_n} (e^{-y_n} - 1) - \nu(y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n) = 0, \quad (4)$$

где ν – коэффициент, играющий роль эффективной вязкости перед слагаемым. Данная модель, несмотря на ее простоту, позволила установить в поведении динамической системы черты, наблюдаемые в реальной турбулентности. В частности, был установлен спектр плотности энергии, соответствующий степенному закону вида

$$E(k) = E_0 k^\alpha,$$

где $\alpha \approx -2,2$ для k , определенному соотношением $k = p\pi/(N+3)$, и p – целое значение из интервала $1 < p < N+1$. Несмотря на то, что α не совпадает с показателем Колмогорова для турбулентности, характерным является устойчивость показателя при зна-

чительной вариации параметров модели. При дальнейшем увеличении «скорости вращения дисков» крупномасштабная мода, соответствующая линейной моде возбуждения, «разрушалась» и пространственная структура плотности энергии обнаруживала различные сценарии, в которых доминирующим является локализация областей с высокой плотностью энергии, которые движутся внутри системы и взаимодействуют сложным образом. На языке турбулентности этот режим соответствует разрушению крупномасштабных вихрей в эксперименте Кармана.

Наблюдаемые в расчетах локализованные возмущения, аналогичные мелкомасштабным вихрям при турбулентности, соответствуют решениям специального вида в нелинейной решетке и получившим название «дискретных бризеров» [13]. Дискретные бризеры представляют собой локализованные осциллирующие возмущения в нелинейной решетке, которые имеют частоты, лежащие вне фононного спектра, и которые не перемещаются в пространстве вследствие нелинейной природы бризеров, несмотря на затухание, обусловленное вязкостью. Типичная ширина бризеров достигает нескольких периодов решетки и незначительно изменяется с изменением вязкости [9]. Важнейшей чертой бризеров является то, что они не являются солитонами: бризеры обмениваются энергиями при столкновении, обнаруживают медленное затухание при наличии трения. Спектр плотности энергии для единичного бризера затухает экспоненциально с ростом k и, более того, амплитуда затухает по закону обратной амплитуды бризера. Как следствие, экспоненциальная часть спектра доминирует вследствие «живучести» больших бризеров (или более интенсивных вихрей на языке турбулентности).

Распределение инкрементов скорости при турбулентном течении

Определение функции плотности распределения для инкрементов скорости вызывает большой интерес при исследовании турбулентности. Полученные на основе данной модели плотности распределения инкрементов скорости (определенные как $u(\Delta n, t) = \dot{y}_{n_0 + \Delta n}(t) - \dot{y}_{n_0}(t)$, где n_0 – фиксированная координата в решетке, Δn – расстояние между точками, в которых «измеряются» скорости) находятся в качественном соответствии с экспериментальными исследованиями в турбулентности [14], включая хорошее количественное согласование с формой распределения. Последнее получено на основе распределения T -статистики для инкрементов скорости

$$p_T(\tilde{u}) = \frac{1}{Z_q} \frac{1}{[1 + (1/2)\beta(q-1)\tilde{u}^2]^{1/(q-1)}},$$

где $\tilde{u} = (u - \langle u \rangle) / \sigma$ ($\langle \cdot \rangle$ обозначает усреднение по времени); $\sigma = (\langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2)^{-1/2}$; Z_q – нормирующий коэффициент; $\beta = 2/(5 - 3q)$. Значение q является единственным свободным параметром (мера неэкстенсивности), с вариацией которого достигается согласование с экспериментом. Качественное теоретическое рассмотрение указывает на реалистичность двух классов для плотности функции распределения: *Log-нормальная* модель [15] и распределение Тсаллиса [16]. *Log-нормальное* распределение соответствует идеям Колмогорова и Обухова о роли перемежаемости в турбулентности.

В теории Колмогорова (K41) энергия в полностью развитой трехмерной турбулентности распределена по каскадам с больших до малых масштабов, где она диссипирует. Турбулентные течения в указанных каскадах (инерционный интервал) характеризуются плотностью распределения $p(\delta u_r)$ для инкрементов скоростей на масштабе

r , $\delta u_r(x) = \hat{e}_r \cdot [\bar{u}(x+r) - \bar{u}(x)]$, где \hat{e}_r – выделенное направление. Для масштабов r , приближающихся к интегральному масштабу, на котором энергия инжектируется в объем жидкости, $p(\delta u_r)$ соответствует распределению Гаусса, в то время как в инерционном интервале, распространяющемся до диссипативного масштаба η , перемежаемость больших флуктуаций приводит к негауссовой плотности распределения с приблизительно экспоненциальными «хвостами». Колмогоров [17] ввел гипотезу о постоянстве скорости диссипации в единице объема ε , Ландау [18] предположил, что флуктуации ε , усредненные на масштабе r , $\varepsilon_r(x, t) = \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\bar{r}} \varepsilon(\bar{x}', t) d\bar{x}'$, играют ключевую роль в турбулентности. Такие флуктуации наблюдаются в многочисленных экспериментах. В 1962 году Колмогоров [19] и Обухов [20] предложили *Log-нормальное* распределение для ε_r в инерционном интервале, которое было подтверждено в соответствующих экспериментах и численных расчетах. Негауссовость плотности распределения для δu_r и Log-нормальность для ε_r характеризуют турбулентные течения.

Для объяснения негауссовости $p(\delta u_r)$ в [21] была разработана суперстатистика, в предположении, что мезоскопические подсистемы в турбулентном потоке имеют выраженную «эффективную температуру», которая зависит от дисперсии δu_r .

Обратные эффективные температуры были введены для мезоскопических подсистем размером d соотношением

$$\beta_d = \frac{1}{\langle (\delta u_r)^2 \rangle_d - (\langle \delta u_r \rangle_d)^2},$$

где $\langle \cdot \rangle_d$ – усреднение на масштабе d .

Данная суперстатистика турбулентности рассматривает турбулентный поток как систему, далекую от равновесия, но состоящую из подсистем, находящихся в локальном термодинамическом равновесии. Для каждой подсистемы вводится эффективная температура, но эффективные температуры для подсистем не обязаны совпадать, так как вся система не находится в равновесии.

Учитывая признаки мультипликативности процесса турбулентности, *Log-нормальное* распределение было использовано для «мезоскопических» температур β_d ,

$$P(\beta_d) = \frac{1}{s(2\pi)^{1/2} \beta_d} \exp\left(-\frac{(\log \beta_d - m)^2}{2s^2}\right),$$

где $s = \sqrt{\ln(1 + \sigma_{\beta_d}^2 / \bar{\beta}_d^2)}$ и $m = \log(\bar{\beta}_d^2 / \sqrt{\bar{\beta}_d^2 + \sigma_{\beta_d}^2})$ – параметры распределения; $\bar{\beta}_d$ и σ_{β_d} – соответственно среднее значение и стандартное отклонение для β_d .

Комбинируя гауссово распределение для δu_r с распределением (О) для β_d , следующее распределение для δu_r было использовано в [21] для сопоставления с экспериментом,

$$P(\delta u_r) = \frac{1}{2\pi s} \int_0^\infty d\beta_d \beta_d^{-1/2} \exp\left(-\frac{(\log \beta_d - m)^2}{2s^2}\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \beta_d (\delta u_r)^2\right),$$

где s и m вычислены в соответствии с экспериментом по определению оптимального размера d ($d = 0,9$ см) мезоскопической подсистемы.

Полученные на основе данной модели показатели находятся в количественном соответствии с экспериментальными данными по характеристикам турбулентного течения в условиях Куэтта–Тейлора, включая хорошее согласование с формой распределения $P(\delta u_r)$.

Локализованные моды дисторсии в конденсированной среде

В [13] отмечается, что динамика бризеров, с которой связывается развитие турбулентности, аналогична динамике локализованных мод дисторсии – дислокаций, впервые рассмотренных Френкелем и Конторовой, а затем Пайерлсом. Настоящая попытка представляется интересной, имея в виду замечание Френкеля о том, что природа динамических процессов в жидкости, как конденсированной среды, в большой степени аналогична динамическим явлениям в твердых телах, для которых механизм переноса импульса реализуется, в том числе движением мезоскопических носителей (дислокаций), представляющих локализованные моды дисторсии с определенными свойствами.

Локализованные моды дисторсии, осуществляющие перенос импульса в конденсированной среде при соответствующих условиях, могут быть введены в рассмотрение в качестве дополнительных переменных системы, отражающих роль структурных изменений в термодинамических, статистических и динамических свойствах рассматриваемых сред. Отождествляя локализованные моды дисторсии с дефектами в исходной динамической системе, зарождение и развитие последних можно связать с локальным и глобальными изменениями симметрии системы. Учитывая эту особенность нелинейных динамических систем, рассмотрим способ введения переменных, ассоциированных с локализованными модами неустойчивости динамической системы – локализованными дисторсиями, на основе теории калибровочных полей [22].

Основой для приложений теории калибровочных полей является установление внутренней группы симметрии для среды с дефектами. Так, основные модели деформируемого континуума инвариантны относительно однородной группы трансляций $T(3)$ и вращений $SO(3)$, что означает инвариантность лагранжиана системы относительно преобразований,

$$x \rightarrow x' = g(\xi, t) + \tau(\xi, t),$$

где x и ξ – текущие и начальные координаты, $g(\xi, t)$ и $\tau(\xi, t)$ – операторы вращения и трансляции соответственно.

Дифференциальные операторы должны быть также инвариантными по отношению к преобразованиям $T(3)$ и $SO(3)$, что учитывается видом ковариантной производной

$$D_\mu x = \partial_\mu x + \Gamma_\mu x + \beta_\mu,$$

где Γ_μ и β_μ – дифференциальные операторы вращения и трансляции. Для среды с дефектами однородность преобразований $T(3)$ и $SO(3)$ нарушается, так как в этом случае локальные вращения и трансляции привносятся дефектами. Внутренняя группа симметрии такой среды определяется так называемым полупрямым произведением групп $SO(3) \triangleright T(3)$, которые, являясь функциями координат и времени, определяют структуру калибровочного поля.

Важным результатом теории калибровочных полей является установленная структура лагранжиана среды с дефектами. С учетом введенных дополнительных переменных Γ_μ и β_μ лагранжиан может быть записан в виде

$$L = -\frac{1}{2} C_1 g_{\mu\lambda}^{(1)} g_{\nu\chi}^{(1)} \alpha_{\mu\nu} \alpha_{\lambda\chi} - \frac{1}{2} C_2 g_{\mu\nu}^{(2)} g_{\nu\chi}^{(2)} \theta_{\mu\nu} \theta_{\lambda\chi}, \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_{\mu\nu} &= \partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu + \Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu, \\ \alpha_{\mu\nu} &= \partial_\mu \beta_\nu - \partial_\nu \beta_\mu + \Gamma_\mu \beta_\nu - \Gamma_\nu \beta_\mu + \theta_{\mu\nu} x \end{aligned}$$

– так называемые интенсивности калибровочного поля, относящиеся к локальным ротациям и трансляциям, привносимым дефектами; g_{ik} – компоненты метрического тензора. Феноменологические параметры C_1 и C_2 в лагранжиане L являются константами дислокационного (дисклинационного) взаимодействия. Представление лагранжиана в форме (6) будет использовано в дальнейшем при статистическом анализе поведения ансамбля локализованных дисторсий.

Параметры порядка среды с локализованными дисторсиями

Микроскопические параметры порядка, ассоциированные с локализованными дисторсиями, могут быть введены по аналогии с интенсивностями калибровочного поля [22]. Имея в виду кинематику неустойчивостей в жидкостях, микроскопический параметр, связанный с локализованными неустойчивостями сдвига, может быть введен как

$$s_{ik} = 1/2s(v_i l_k + l_i v_k),$$

где $s = S_d B$ – интенсивность сдвига на площадке $S_d = S_d \mathbf{v}$ с величиной вектора Бюргера $\mathbf{V} = B\mathbf{l}$; \mathbf{l}, \mathbf{i} – единичные векторы.

Макроскопический тензор локализованных сдвигов в характерном объеме определяется усреднением s_{ik} по статистическому ансамблю локализованных сдвигов,

$$p_{ik} = n \langle s_{ik} \rangle.$$

Статистическая модель среды с локализованными дисторсиями

Предполагаем микроскопическую кинетику параметра s_{ik} соответствующей уравнению Ланжевена

$$\dot{s}_{ik} = K_{ik}(s_{lm}) - F_{ik},$$

где $K_{ik} = \partial E / \partial s_{ik}$ – регулярная часть силового поля, действующего на локализованную дисторсию; E – энергия дефектов, определяемая в общем случае структурой лагранжиана (6); F_{ik} – случайная δ -коррелированная часть случайного силового поля, удовлетворяющая соотношениям: $\langle F_{ik}(t) \rangle = 0$ и $\langle F_{ik}(t') F_{ik}(t) \rangle = Q \delta(t-t')$. Параметр Q характеризует дисперсионные свойства системы и в нашем случае соответствует средней энергии зародышей дефектов, которые могут иметь в том числе флуктуационную природу.

Выражение для изменения энергии системы, связанной с формированием локализованной моды дисторсии, может быть представлено в виде

$$E - E_0 = -H_{ik} s_{ik} + \alpha s_{ik}^2, \quad (7)$$

который является частным случаем лагранжиана (3.2). Квадратичный член представляет «собственную» энергию дефекта, слагаемое $H_{ik}s_{ik}$ описывает в приближении «эффективного поля» взаимодействие между дефектами, а также внешним полем усилий σ_{ik} . Вид эффективного поля предполагается следующим:

$$H_{ik} = \sigma_{ik} + \lambda n p_{ik},$$

где α, λ – константы взаимодействия, определяемые эффективными характеристиками среды. Среднее значение тензора дисторсии $p_{ik} = n \langle s_{ik} \rangle$ дается процедурой усреднения

$$p_{ik} = n \int s_{ik} W(s, \mathbf{v}, \mathbf{l}) ds_{ik},$$

где функция распределения принимается в виде $W = Z^{-1} \exp(-E/Q)$; $Z = \int \exp(-E/Q) ds_{ik}$ – нормирующий фактор; n – концентрация взаимодействующих дисторсий.

Переход к безразмерным переменным

$$\hat{p}_{ik} = 1/n \sqrt{\alpha/Q} p_{ik}, \quad \hat{s}_{ik} = \sqrt{\alpha/Q} s_{ik}, \quad \hat{\sigma}_{ik} = \sigma_{ik} / \sqrt{Q\alpha}$$

позволяет представить соотношение (3.9) в виде уравнения самосогласования

$$\hat{p}_{ik} = \int \hat{s}_{ik} Z^{-1} \exp\left(\left(\hat{\sigma}_{ik} + \frac{1}{\delta} \hat{p}_{ik}\right) \hat{s}_{ik} - \hat{s}_{ik}^2\right) d\hat{s}_{ik}, \quad (8)$$

которое включает единственный безразмерный параметр $\delta = \alpha/\lambda n$. Размерностный анализ величин, входящих в (7), позволяет получить оценку

$$\alpha \sim \frac{G}{V_0}, \quad \lambda \sim G, \quad n \sim R^{-3},$$

где G – эффективная характеристика «упругости» среды, совпадающая по смыслу с ω^2 в (3); $V_0 \sim r_0^3$ – характерный объем зародыша данного дефекта; R – среднее расстояние между локализованными дисторсиями. В результате получаем для δ значение $\delta \sim \left(R/r_0\right)^3$, что отражает так называемую «статистическую автомодельность» в поведении локализованных дисторсий различных структурных уровней. Решение уравнения самосогласования (8) для случая простого сдвига приведено на рис. 1 [22].

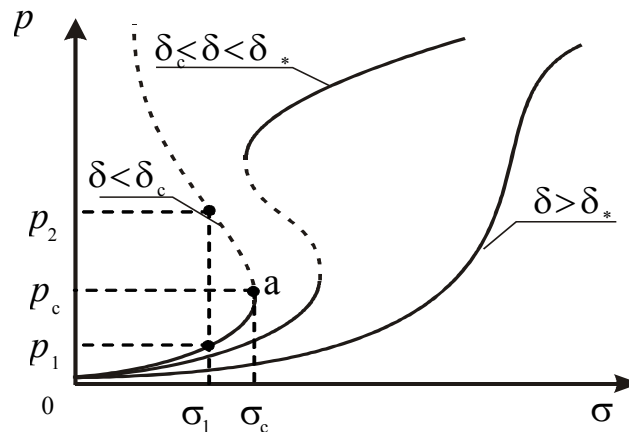


Рис.1. Характерные нелинейные реакции системы на локализованные дисторсии

Решение установило существование трех характерных нелинейных режимов, соответствующих различным областям значений параметра структурного скейлинга δ ($\delta > \delta_* \approx 1,3$, $\delta_c < \delta < \delta_*$, $\delta < \delta_c \approx 1$), разделенных точками бифуркации решений δ_c и δ_* . Точки бифуркации δ_* , δ_c играют роль, аналогичную критическим температурам в теории фазовых переходов Ландау. Параметр структурного скейлинга δ имеет смысл второго параметра порядка, величина которого связана, что будет показано в дальнейшем, с новыми условиями термализации мезоскопической системы, которые не определяются обычной температурой. Роль последней заключается в формировании критических зародышей (начального значения δ), приводящих при соответствующих условиях к формированию новых типов локализованных дисторсий, обладающих различной динамикой и с которыми могут быть связаны различные механизмы переноса импульса. Появление структурного параметра, имеющего смысл эффективной температуры, представляется важным, так как это обеспечивает независимость динамического поведения системы от обычных условий термализации, которые инициировали процессы «медленной динамики» в рассматриваемых системах, например, формирование «бризеров».

С учетом физического смысла параметра структурного скейлинга представляется естественным введение обобщенной функции распределения, учитывающей «независимую» статистику для δ , связанную с вариацией структурных масштабов R и r_0 в исходном состоянии системы

$$N(\hat{E}) = \int d\delta f(\delta) \frac{1}{Z(\delta)} \exp\left(-\frac{1}{\delta} \hat{E}\right), \quad (9)$$

где $f(\delta)$ – функция распределения значений начальной восприимчивости в терминах δ ; $\hat{E} = \delta(\sigma_{ik}s_{ik} - s_{ik}^2) + p_{ik}s_{ik}$. Процедура усреднения в этом случае будет включать интегрирование по всем параметрам порядка рассматриваемой мезоскопической системы

$$\hat{p}_{ik} = \int f(\delta) \int \hat{s}_{ik} Z^{-1} \exp\left((\hat{\sigma}_{ik} + \frac{1}{\delta} \hat{p}_{ik}) \hat{s}_{ik} - \hat{s}_{ik}^2\right) d\hat{s}_{ik} d\delta.$$

Представление функции распределения в форме (9) соответствует концепции «эффективного поля», предложенной Леонтовичем [24] для построения неравновесных термодинамических потенциалов (неравновесной свободной энергии) и представляющей собой вариант обобщения статистики Больцмана–Гиббса для неравновесных состояний в некоторых случаях. Определение «эффективного поля» предполагает введение вспомогательного, в общем случае многокомпонентного поля, сконструированного таким образом, что гамильтониан системы с учетом структуры эффективного поля соответствует условиям равновесия для данного текущего состояния. В соответствии с этим подходом произвольное неравновесное состояние термически однородной системы, которое описывается некоторыми параметрами порядка, может соответствовать этим же параметрам порядка в случае равновесия системы в присутствии некоторого эффективного силового поля. Рассмотренные выше обобщения статистики Больцмана–Гиббса (неэкстенсивная статистика Тсаллиса и суперстатистика Бека) основаны на аналогичных предположениях, в которых, однако, «коррекция» неравновесного состояния к «эффективно равновесному» осуществляется только с помощью одного параметра – эффективной температуры и эвристически подобранной для нее функции распределения.

Отметим, что зависимость статистического интеграла от единственного безразмерного комплекса δ , составленного из характерных масштабов, отражает фундаментальные свойства нелинейных неоднородных сред с локализованными дисторсиями. Установленные в ходе статистического усреднения с данной функцией распределения типы нелинейностей, возможно, отражают универсальные свойства пространства с локальными нарушениями симметрии при зарождении локализованных взаимодействующих дисторсий. Типы нелинейностей дают возможность рассмотреть виды коллективных мод, которым может быть подчинено поведение всей системы в целом, что связано с группами симметрии уравнений движения, соответствующих установленным нелинейностям.

Статистическое описание позволило предложить вид мезоскопического неравновесного потенциала, описывающего эволюцию локализованных дисторсий в зависимости от эффективных характеристик нелинейной среды. Для случая простого сдвига ($p = p_{xz}$, $\sigma = \sigma_{xz}$) «минимальное разложение» для F дается полиномом 6-го порядка по переменной p и имеет вид, аналогичный разложению Гинзбурга – Ландау [23].

$$F = \frac{1}{2} A(\delta, \delta_*) p^2 - \frac{1}{4} B p^4 + \frac{1}{6} C(\delta, \delta_c) p^6 - D \sigma p + \chi (\nabla_{\perp} p)^2. \quad (10)$$

Градиентный член в (10) описывает эффекты нелокальности при взаимодействии дефектов («диффузию» мод дисторсии); A, B, C, D и χ – параметры, характеризующие структуру среды. Отметим, что с учетом вида энергии для локализованной дисторсии (7) разложение (10) отражает вклад основных слагаемых в выражении для гамильтониана (3).

Кинетика введенных параметров порядка соответствует эволюционному неравенству [23]

$$\frac{\delta F}{\delta t} = \frac{\partial F}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \delta} \frac{d\delta}{dt} \leq 0,$$

из которого следуют уравнения движения для параметра локализованной дисторсии p и параметра структурного скейлинга δ , характеризующего текущую восприимчивость среды к формированию локализованных дисторсий различного типа, и, как это будет показано ниже, особенности их динамики,

$$\frac{dp}{dt} = -\Gamma_p \left(A(\delta, \delta_*) p - B p^3 + C(\delta, \delta_c) p^5 - D \sigma - \frac{\partial}{\partial x_{\perp}} \left(\chi \frac{\partial p}{\partial x_{\perp}} \right) \right), \quad (11)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = -\Gamma_{\delta} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial \delta} p^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial C}{\partial \delta} p^6 \right), \quad (12)$$

где Γ_p и Γ_{δ} – кинетические коэффициенты.

Кинетика локализованных дисторсий

Как следует из решения уравнения (8), представленного на рис.1, переходы через точки бифуркации δ_* , δ_c приводят к резким изменениям в функции распределения и формированию коллективных мод тензора дисторсии p_{ik} . Тип перехода через критические точки определяется видом бифуркации – групповыми свойствами уравнений эволюции (4.9)–(4.10) в различных областях значений параметра структурного скейлинга δ ($\delta > \delta_*$, $\delta_c < \delta < \delta_*$, $\delta < \delta_c$). Качественные изменения в поведении системы пред-

ставлены на рис.2 в виде семейства гетероклиник, соответствующих решениям правой части уравнения (11) для различных δ .

В области $\delta > \delta_*$ это уравнение имеет эллиптический тип, которому соответствуют собственные формы в виде пространственно-периодических мод дисторсии на некоторых масштабах Λ со слабой анизотропией формы, определяемой величиной усилия. При $\delta \rightarrow \delta_*$ и пересечении сепаратриссы S_2 (рис.2) собственные формы уравнения (11) претерпевают качественные изменения, связанные с вырождением пространственного периода Λ при его стремлении к значениям $\Lambda \approx -\ln(\delta - \delta_*)$. Решение в этом случае трансформируется к виду бризеров (breather) при $\delta \rightarrow \delta_*$ (но $\delta > \delta_*$) и автосолиitonных волн $p(\zeta) = p(x - Vt)$ при появлении метастабильности при $\delta_C < \delta < \delta_*$, (см. рис.1). Амплитуда волны p , ее скорость V и ширина волнового фронта L_S определяются в этом случае условиями неравновесного перехода

$$p = \frac{1}{2}(p_a - p_m) [1 - \text{tahn}(\zeta L_S^{-1})], \quad L_S = \frac{4}{(p_a - p_m)} \left(2 \frac{\chi}{A} \right)^{1/2}. \quad (13)$$

Скорость волновых фронтов определяется соотношением $V = \chi A (p_a - p_m) / \Gamma_p^2$, где $(p_a - p_m)$ – скачок в значении p в области метастабильности.

Остановимся более подробно на особенностях этого перехода, представляющего интерес для сопоставления результатов исследования нелинейных систем, описываемых гамильтонианом вида (3). Моделирование на основе методов молекулярной динамики,

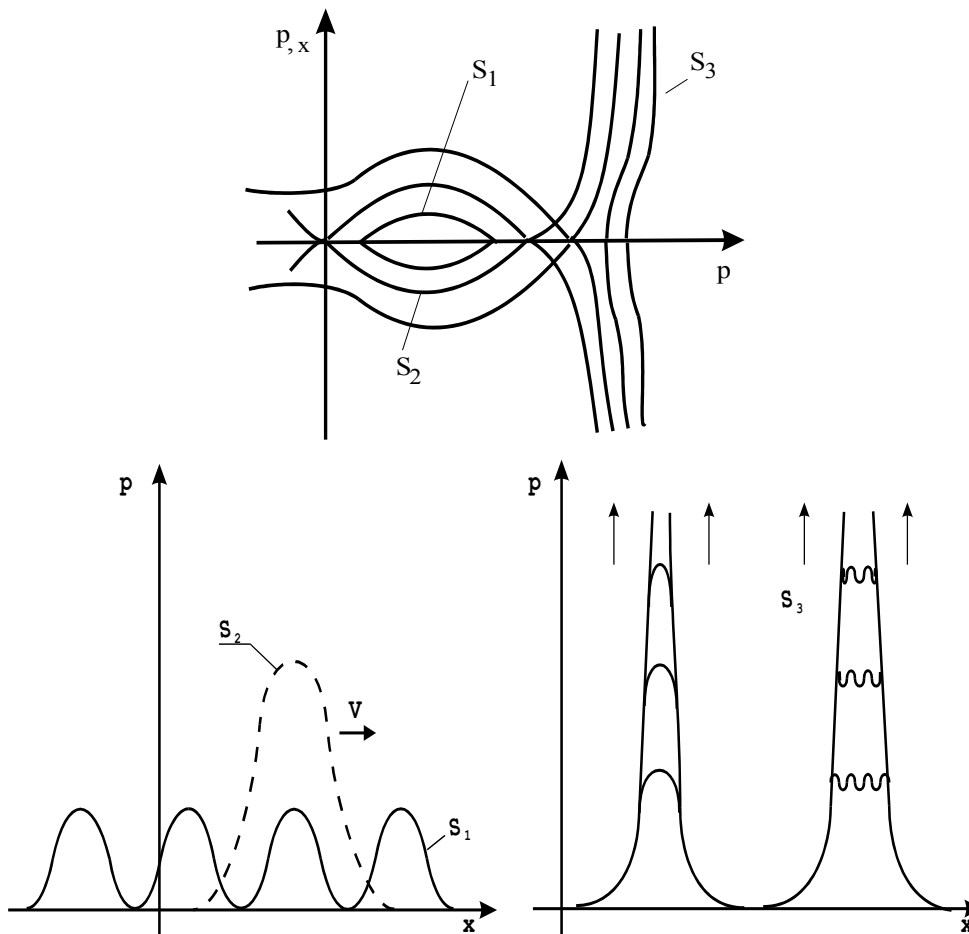


Рис.2. Типы гетероклиник и соответствующие собственные формы

проведенное в [13], обнаружило зарождение нелинейных локализованных возмущений – дискретных бризеров. Это свойство является особенностью «нелинейных решеток» и невозможно в «однородных решетках», в которых начальное возмущение распространяется на всю систему. Локализация энергии в нелинейных решетках может быть инициирована, например, модулированной неустойчивостью плоской волны, однако модулирование неустойчивостью это только первый шаг к зарождению бризеров. Моделирование динамики бризеров позволило выделить три основные стадии. Первая – это модулирование плотности энергии в системе, которая изначально однородна. Эта динамика скоротечна и приводит к формированию максимумов плотности на некоторых расстояниях. Данные моды соответствуют «малым бризерам» и их распределение в среднем может быть оценено на основе теории малых возмущений. Малые бризеры определяются наиболее быстрыми модуляциями начальной волны. Но модулированные неустойчивости не могут привести к «большим бризерам», потому что характерная энергия бризеров дается произведением средней энергии на «длину модуляции». Результаты расчетов показывают, что «большие бризеры» возникают на второй стадии, которая требует значительного времени, и их зарождение происходит при столкновении малых бризеров, зарождающихся на первой стадии. Когда наблюдается соударение двух из них, они не ведут себя как солитоны в континуальной среде. Как правило, наиболее «мощный» бризер поглощает энергию «слабого». В результате множественных соударений, которые происходят на второй стадии, некоторое небольшое количество бризеров собирает основную энергию начальной плоской волны. Затем, в течение третьей стадии распределение плотности энергии в решетке остается стационарным с резким максимумом в местах расположения больших бризеров, которые не двигаются в решетке. Это происходит потому, что при их росте бризеры становятся уже, пока ширина их не достигнет нескольких размеров решетки. На этой стадии бризеры начинают чувствовать дискретность и оказываются закрепленными к решетке. Данный эффект аналогичен «закреплению» кинков или дислокаций барьерами Пайерлса [25], хотя для бризеров, имеющих внутренние осцилляции, рельеф Пайерлса, зависящий только от позиции бризера, не может быть определен. Третья стадия очень устойчива, и даже при больших временах не наблюдается затухание сильно локализованных бризеров вследствие взаимодействия с «подложкой» из малоамплитудных возмущений. Для системы, контактирующей с термостатом, другие бризеры могут возникнуть вследствие флуктуаций. В этом случае в течение времени, которое очень велико по сравнению с периодом фононов, наблюдается равномерное распределение энергии по решетке, однако на временных масштабах порядка 10^5 периодов колебаний фононов может наблюдаться локализация энергии в малых областях решетки [13].

Аналитические исследования роста бризеров вследствие соударения представляют большие трудности, так как включают анализ обмена малыми энергиями. В целом, ситуация с зарождением нелинейных локализованных возмущений естественным образом соотносится с описанием движения дефектов в потенциале Пайерлса–Набарро с образованием соответствующих кинков. Однако решения для нелинейных локализованных возмущений – нетопологические, то есть не существует специальной структуры, предполагающей существование соответствующего многочастичного потенциала. Достаточным при этом является существование нелинейного потенциала. Исследование данной проблемы в терминах «коллективных мод», которые описывают движение нелинейных локализованных возмущений, показало эквивалентность с постановками Ферми–Пасты–Улама [25], при этом существование аналога барьера Пайерлса связано с энергией, которая необходима для преодоления *сепаратриссы колебаний*. Эта сепаратрисса разделяет периодические моды колебаний от поворотных [26]. Именно этот результат следует из

статистической модели, которая показала существование данной сепаратриссы при значении параметра структурного скейлинга δ_* , переход через которую приводит к формированию ориентационно-выраженной коллективной моды локализованных дисторсий в интервале $\delta_* < \delta < \delta_c$, имеющей, в отличие от бризера, ненулевую скорость фронта. Закреплению «больших бризеров» на решетке, как это следует из (13), соответствует формирование локализованных нелинейных мод дисторсии при локальных значениях параметра структурного скейлинга, определяемых критическим δ_* .

Переход через точку бифуркации δ_c (сепаратрисса S_3) сопровождается появлением пространственно-временных структур качественно-нового типа, характеризующихся резкой кинетикой роста локализованных дисторсий («blow-up» режим) при $t \rightarrow t_f$ на спектре некоторых пространственных масштабов [22,27, 28]. Предполагая степенной вид зависимостей интенсивности источника и коэффициента нелокальности при $\delta < \delta_c$ и $p > p_c$, кинетическое уравнение (3.14) может быть записано в форме

$$\frac{\partial p}{\partial t} \approx S(p_c) p^\omega + \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi_0(p_c) p^\gamma \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad (14)$$

где $S, \chi_0, \omega, \gamma$ – параметры разложения.

В [23] показано, что для данного вида уравнений развитая стадия кинетики p при $\delta < \delta_c$, $p > p_c$ в пределе некоторых характерных времен $t \rightarrow t_f$ соответствует автомодельному решению вида

$$p(x,t) = \phi(t) f(\zeta), \quad \zeta = \frac{x}{\phi(t)}, \quad \phi(t) \sim (t - t_f)^{-m}, \quad \phi(t) \sim (t - t_f)^d, \quad (15)$$

где $m = (\omega - 1)^{-1}$, $d = (\omega - \gamma - 1)/(\gamma - 1)$ – параметры, определяемые типом нелинейности уравнения (11); t_f – некоторый характерный временной масштаб автомодельного решения.

Существуют три характерных случая автомодельного решения (14):

S-режим для значений $\omega = \gamma + 1$, когда автомодельное решение уравнения (O) имеет вид

$$p(x,t) = [S(t - t_f)]^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{2(\gamma + 1)}{\gamma(\gamma + 2)} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L_f} + \pi \theta \right) \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (16)$$

где θ – случайное значение в интервале (0,1).

Конкретный вид функции $f(\zeta)$ определяется решением соответствующей проблемы на собственные формы и собственные значения данной задачи. Масштаб L_f , так называемая фундаментальная длина [27, 28], имеет смысл пространственного периода решения (16),

$$L_f = \frac{2\pi}{\gamma} \left((\gamma + 1) \chi_0 S^{-1} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Автомодельное решение (15) описывает кинетику роста величины дисторсии в так называемом режиме с обострением при $t \rightarrow t_c$ на спектре пространственных масштабов

$L_H = kL_f$, $k = 1, 2, \dots, K$. В этом случае на масштабах $L_H = kL_f$ развиваются сложные диссипативные структуры обострения, представляющие каскады простых диссипативных структур этого типа, рис.2. Численный анализ показывает, что объединение простых структур в сложные происходит при расстояниях между простыми структурами L_C порядка L_f [27].

Соотношение параметров ω и β определяют еще два типа автомодельных решений, известных как *HS-режим* при $\omega < \beta + 1$ и *LS-режим* для $\omega > \beta + 1$. *HS-режим* описывает кинетику волновой диссипативной структуры, охватывающей все пространство при $t \rightarrow t_f$. *LS-режим* описывает диссипативную структуру обострения на сокращающихся пространственных масштабах.

При стремлении к моменту обострения задача вырождается, её решение начинает вести себя либо как решение с экспоненциальными источниками, либо как исходная задача со степенными источниками. Сложные структуры при этом получаются только в последнем случае [27].

Динамика локализованных дисторсий и сценарии турбулентности

Динамика формирования когерентных структур

Зарождение локализованных мод дисторсии начинается с формирования бризеров при $\delta \rightarrow \delta_*$. Появление новых структурных масштабов (соответствующих бризерам) приводит к формированию новой нелинейной решетки и резкому изменению значений структурного параметра скейлинга δ , переходу системы в область метастабильности и зарождению автосолитонных мод, способных к перемещению и соответственно появлению качественно-нового механизма переноса импульса. Данная способность локализованной моды дисторсии может рассматриваться как структурный механизм формирования коллективных мод в инерционном интервале турбулентности [29]. Устойчивость данного механизма в некотором интервале значений чисел Рейнольдса связана с существованием интервала значений структурного параметра скейлинга, в котором кинетика данного параметра «подчинена» одному типу автомодельных решений – локализованным модам дисторсии автосолитонного типа.

Достижение структурным параметром скейлинга критического значения δ_C приводит к возбуждению новых типов автомодельных решений, в соответствии с которыми реализуется новая динамика локализованных дисторсий.

При изучении турбулентности большое внимание уделяется исследованию поведения флуктуаций скорости на малых масштабах. Согласование экспериментальных данных и моделей часто основано на сопоставлении статистических закономерностей поведения таких локальных величин, как инкременты скоростей $\delta u(r) \equiv \langle u(x+r) - u(x) \rangle_x$. Ключевое значение играет также статистика переноса энергии с интегральных на диссипативные масштабы [30].

Однако ряд исследований и экспериментальных данных последнего времени указывает на необходимость развития статистического описания турбулентности в терминах глобальных величин, как это делается в статистической термодинамике применительно к динамическим системам, находящимся далеко от равновесия. В этой связи представляют интерес исследования по оценке интегральной поглощаемой мощности P в полностью развитом турбулентном потоке. Обычная феноменология предполагает, что P постоянно во времени или наблюдаются очень малые (по Гауссу) флуктуации.

Однако ряд исследований показывает, что это не всегда имеет место, по крайней мере, в некотором интервале чисел Рейнольдса.

В экспериментах [11] по инициированию турбулентности по схеме Кармана в интервале чисел Рейнольдса, соответствующему наклону “ $-5/3$ ”, осуществлялось изменение инжектированной мощности P на вращающихся дисках и было показано, что флуктуации P на каждом из дисков коррелируют на временном интервале почти в $20\Omega^{-1}$. Это относится авторами к состоянию когерентного течения жидкости, которое может коррелировать со всем потоком в течение многих периодов вращения дисков. Вычисление корреляционной функции инжектированной мощности позволило сделать вывод, что коррелированные флуктуации в широком интервале амплитуд происходят на масштабах, вплоть до масштабов всего потока. Существование экспоненциальных ветвей на функции плотности вероятности флуктуаций инжектированной мощности является, по мнению авторов, следствием наблюдаемых падений мощности, обусловленных формированием «когерентных структур» с характерными размерами, близкими к интегральному масштабу всего потока.

Исследование флуктуаций инжектируемой мощности в терминах функции плотности вероятности флуктуаций показало независимость последней от числа Рейнольдса. Этот результат связывается с критическим поведением конечномерных систем, характеризуемых некоторым параметром порядка. Обнаруженная автомодельность, по видимому, типична для сильно-коррелированных многочастичных систем, когда флуктуации на всех масштабах – от микроскопических a до «расходящихся» корреляционных масштабов ξ – приводят к появлению «аномалий размерности». Однако в реальных экспериментах «расходимость» ξ «обрезана» макроскопическим масштабом L , позволяющим определить интервал масштабов между a и L , в котором аномальные явления могут происходить.

Проводя сопоставление с типами автомодельных решений, контролирующих динамику локализованных мод дисторсий и имея в виду «инерционную» природу механизма переноса импульса турбулентным потоком в исследованном диапазоне чисел Рейнольдса, формирование когерентных автоволновых структур можно связать с закономерностями структурно-скейлингового перехода в интервале значений структурного параметра скейлинга $\delta_C < \delta < \delta_*$ в диапазоне масштабов $L_C < \xi < L_*$, соответствующих критическим точкам δ_C и δ_* . Отметим, что L_C и L_* являются соответственно масштабами простых структур «обострения», возникающих при $\delta \rightarrow \delta_C$, $p \rightarrow p_C$, и автосолитонных мод (13), зарождающихся при переходе δ_* . Когерентное поведение всех автосолитонных мод в инерционном интервале обусловлено единой кинетикой структурного параметра скейлинга, вплоть до бифуркации решения этого типа при переходе δ_C , определяющему границу между инерционным и диссипативным интервалами (см. рис.1).

Подчиненность конечно-амплитудных автосолитонных мод динамике безразмерного структурного параметра скейлинга объясняет универсальность статистических распределений, проявляемых системами с «медленной динамикой» в терминах «эффективных температур».

Резонансные механизмы возбуждения локализованных мод дисторсии

Рассмотренная связь скейлинговых переходов в ансамблях локализованных дисторсий с возбуждением когерентных структур в турбулентных потоках и роль установленных типов автомодельных решений в формировании когерентных структур обра-

щают внимание на «резонансную» природу формирования коллективных мод – сложных структур, «подчиняющих» себе динамику системы, следствием чего является, например, независимость функции распределения инжектируемой мощности в некотором диапазоне чисел Рейнольдса.

По-видимому, аналогичные проявления реакции конденсированных сред наблюдались впервые в экспериментах Сахарова с сотрудниками [31] при исследовании механизмов вязкости при формировании волновых фронтов в области умеренных амплитуд давлений при ударно-волновом нагружении твердых и жидких сред (исследовались вода, ртуть, алюминий и свинец). Полученные оценки характерных времен релаксации обнаружили существование универсальной асимптотики вязкости $\nu \rightarrow 10^4$ нз при скоростях деформации $\varepsilon \rightarrow 10^5$ с⁻¹ для твердых и жидких сред. Необходимо при этом подчеркнуть, что исследованные среды, столь различные при нормальных условиях, обнаруживают одинаковую динамическую вязкость – жидкости при давлениях $P \approx 80 - 100$ Кбар, твердые материалы в диапазоне давлений $P \approx 400 - 500$ Кбар, которые не обеспечивают переход в расплавленное состояние алюминия и свинца. Эти данные позволяют сделать вывод, что исследованные жидкости в диапазоне давлений $P \approx 80 - 100$ Кбар имеют релаксационные времена $\tau > \varepsilon^{-1} \sim 10^{-5}$ с, отличающиеся на 6 порядков от молекулярных (диффузионных) времен релаксации, оценка которых может быть получена на основе формулы Эйнштейна $\tau_D = \Delta^2 / 6D_{sd} \sim 10^{-11}$ с, где Δ – расстояние между частицами, D_{sd} – коэффициент самодиффузии. Наблюдаемые аномалии вязкости естественно связать с резонансными условиями возбуждения ударной волной автосолитонных мод дисторсии, которые в дальнейшем «подчиняют» себе в условиях структурно-скейлингового перехода релаксационные процессы на фронте ударной волны и наблюдаемую асимптотику вязкости [32].

С учетом вида неравновесной свободной энергии среды с локализованными дисторсиями в [33,34] получены уравнения, связывающие кинетику структурно-скейлинговых переходов с релаксационными свойствами. Кинематика такой среды в макроскопически представительном объеме (для простоты здесь рассматривается ситуация простого сдвига) определяется соотношением

$$e_{xz} = e_{xz}^v + \dot{p}_{xz}, \quad (17)$$

где $e_{xz} = \partial v_x / \partial z$; e_{xz}^v – «вязкая» скорость деформации, \dot{p}_{xz} – скорость деформации, обусловленная локализованными дисторсиями, генерируемыми в данном объеме. Диссипативная функция D рассматриваемой среды (без учета температуры) представима в виде

$$D = \sigma_{xz} e_{xz}^v - \frac{\Delta F}{\Delta p_{xz}} \dot{p}_{xz} - \frac{\partial F}{\partial \delta} \delta \geq 0,$$

где $\Delta(\cdot) / \Delta p_{xz}$ – символ вариационной производной.

Знакоопределенность диссипативной функции с учетом «перекрестности» по Онсагеру обеспечивается соотношениями

$$\sigma_{xz} = \Gamma_1 e_{xz}^v - \Gamma_2 \dot{p}_{xz}, \quad (18)$$

$$-\frac{\Delta F}{\Delta p_{xz}} = \Gamma_2 e_{xz}^v + \Gamma_3 \dot{p}_{xz}, \quad (19)$$

$$\delta = -\Gamma_{\delta} \frac{\partial F}{\partial \delta}, \quad (20)$$

где $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ и Γ_{δ} – кинетические коэффициенты, в общем случае зависящие от p_{xz} (инвариантов p_{ik}).

Отметим, что подстановка выражения для σ_{xz} в закон сохранения импульса в адиабатическом приближении по переменным p_{xz} и δ (т. е. $\dot{p}_{xz} = \dot{\delta} = 0$) приводит к макроскопическому аналогу уравнения (4) при $\delta \rightarrow \delta_*$.

Используя кинематическое соотношение (17) и представление $e_{\text{чя}}^v = e_{xz} - \dot{p}_{xz}$, уравнение (18) можно записать в виде

$$\sigma_{xz} = \left(\Gamma_1 - \left(\Gamma_2 + \Gamma_1 \right) \frac{p_{xz}}{e_{xz}} \right) e_{xz}. \quad (21)$$

В ситуации, когда кинематика среды подчиняется одной автосолитонной моде, резонансно возбуждаемой, например, на фронте ударной волны, имеет место $e_{xz} \approx \dot{p}_{xz}$, и соотношение (21) принимает вид $\sigma_{xz} = \Gamma_2 e_{xz}$, то есть не зависит от обычной динамической вязкости Γ_1 и стремится к асимптотическому значению Γ_2 , имеющему порядок 10^4 нз в соответствии с экспериментами Сахарова. «Подчинение» эффективной вязкости автомодельному решению вида (13) на фронте ударной волны проявляется также в экспериментах [35] в виде универсальной зависимости «четвертого порядка» амплитуды ударной волны σ_a от скорости деформации e ($e \approx A\sigma_a^4$). Связь данной универсальности с динамикой структурно-скейлинговых переходов подтверждена в [36] прямыми расчетами структуры волновых фронтов с использованием уравнений (20).

Обсуждение результатов

Физические механизмы, приводящие к развитию турбулентности, указывают на возможность описания неустойчивостей в жидкостях на основе анализа кинетики флуктуаций, если последние рассматриваются как локализованные дисторсии в структуре жидкостей. Локализованные дисторсии, являясь мезоскопическими объектами, могут, по-видимому, рассматриваться как структурные дефекты в жидкостях при возникновении коллективных движений групп молекул друг относительно друга. Этот механизм движения не соответствует традиционно рассматриваемому для жидкостей (по аналогии с газами) диффузионному механизму переноса импульса. Формирование когерентных структур, установленных в [11], подтверждает эту возможность.

По-видимому, Френкель [37] первым обратил внимание на аналогию в механизмах течения жидкостей и твердых тел, отмечая, что «... рентгенограммы жидкостей сходны с рентгенограммами микрокристаллических тел, и их можно было бы интерпретировать в общих чертах, исходя из представления, что жидкость состоит из большого числа беспорядочно ориентированных кристалликов субмикроскопических размеров», и «... широко распространенное представление о том, что текучесть жидкостей обусловлена отсутствием упругости на сдвиг, т.е. равенством нулю модуля сдвига ..., ошибочно (за исключением, может быть, случая жидкого гелия II)».

В соответствии с рассмотренными выше особенностями нелинейного поведения среды с локализованными дисторсиями возможен следующий сценарий развития неустойчивостей в жидкостях. Слабые периодические пульсации скорости, индуцированные локализованными неустойчивостями, возникают в области $\delta > \delta_*$, которые приобретают

динамику бризеров при $\delta \rightarrow \delta_*$. Генерация локализованных дисторсий и бризеров, сопряженная с появлением новых пространственных масштабов в системе – масштаба локализации дисторсий l_D и корреляционного радиуса l_C , взаимодействия между ними, приводит к изменению соответствующих значений параметра структурного скейлинга $\delta = (l_D/l_C)^3$. Связь масштабов локализованных дисторсий, играющих роль новых эффективных переменных системы с эффективной температурой, роль которой выполняет параметр структурного скейлинга δ , представляется естественной. Последующая интенсификация течения может привести к переходу через точку бифуркации δ_* (сепаратриссу S_2) в область $\delta_c < \delta < \delta_*$, зарождению каскада локализованных дисторсий автосолитонной природы, соответствующих структурно-скейлинговым переходам на новых пространственных масштабах, следующих из автомодельного решения (13). Каскад коллективных мод автосолитонной природы, выполняющий роль новых коллективных переменных (эффективных степеней свободы), естественно связать с динамикой переноса импульса в инерционном интервале турбулентности. Динамика формирования автосолитонного каскада и его когерентность связаны с кинетикой параметра структурного скейлинга, определяемой последовательностью новых пространственных масштабов l_D и l_C , генерируемых созданными автосолитонными модами. Распределение данных мод определяет кинетику параметра структурного скейлинга и его статистические свойства в пределах инерционного интервала. Кинетика формирования последовательности структурных масштабов (кинетика δ), очевидно, должна характеризоваться «медленной динамикой» по сравнению с динамикой интенсивной переменной $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ – скоростью жидкости. Таким образом, когерентность автосолитонного каскада связана с распределением структурного параметра скейлинга, что проявляется в универсальности функции распределения эффективной температуры $f(\beta)$ в терминах δ в инерционном интервале.

Формирование в ходе структурно-скейлинговых переходов автоволновых структур с масштабами, близкими к L_f и L_C , обеспечивает переход новой сепаратриссы S_3 (точка бифуркации $\delta_c = (L_C/L_f)^3$) и генерацию диссипативных структур обострения, соответствующих автомодельному решению вида (16), описывающему резкий рост вихревой моды тензора локализованной дисторсии, формируемой на фронте диссипативной структуры. Масштаб L_f простой диссипативной структуры обострения, соответствующий δ_c , естественно отождествить с диссипативным интервалом Колмогорова $L_f \sim \eta$. Взаимодействие простых структур обострения, находящихся на расстоянии $R < L_C$, должно приводить к формированию сложных структур обострения (см. рис.2), диссипирующих энергию на масштабах, кратных L_f . Принимая во внимание класс автомодельных решений, сопровождающих переход в диссипативный интервал, можно ожидать существование «универсальной статистики» для области «эффективных температур» $\delta < \delta_c$, что обсуждается в [2,5] как вид суперстатистики для больших энергий.

Интересно сопоставить реальные картины турбулентного течения с вышеописанным сценарием, обусловленным нелинейной динамикой локализованных дисторсий в условиях структурно-скейлинговых переходов. Развитие турбулентного течения исследовалось в [38] при визуализации динамики турбулентного пятна, инициированного в потоке Пуазейля с числом Рейнольдса $R \sim 840-1500$. Отмечено, что турбулентное пятно имеет форму треугольного крыла и турбулентное движение возникает внутри данной области при развитии возмущений автосолитонного типа. Эти возмущения, зарождающиеся на границе

пятна, распространяются в ламинарную зону и трансформируются в квазипериодические затухающие пульсации скорости. Движение автосолитонных волн в направлении пятна сопровождается вторичной неустойчивостью и ростом пятна. Этот экспериментально наблюдаемый сценарий согласуется с нелинейной динамикой развития локализованных мод дисторсий, связанной со структурно-скейлинговыми переходами.

Настоящая работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проекты 05–01–00863а, 04–01–96042–р2004, 04–01–97514р_офи)

Библиографический список

1. Cugliandolo, L.F. Energy flow, partial equilibration, and effective temperatures in systems with slow dynamics / L.F. Cugliandolo, J. Kurchan, L. Peliti // *Phys. Rev. E.* – 1997. – Vol. 55. – №. 4. – P 3898.
2. Cohen, E.G.D. Superstatistics/ E.G.D.Cohen // *Physica D.* – 2004. – Vol. 193. – P. 35–52.
3. Tsallis, C. Possible generalization of Boltzmann–Gibbs statistics / C. Tsallis // *J. Stat. Phys.* – 1988. – Vol. 52. – P. 479–487.
4. Wilk, G. Interpretation of Nonextensivity Parameter q in Some Applications of Tsallis Statistics and Levy Distributions / G.Wilk and Z.Wlodarczyk // *Phys. Rev. Lett.* – 2000. – Vol. 84. – №.13. – P.2770–2773.
5. Beck, C. Superstatistics / C. Beck and E.C.D. Cohen // *Physica A.* – 2003. – Vol. 322. – P. 267–275.
6. Tsallis, C. What should a statistical mechanics satisfy to reflect nature/ C. Tsallis // *Physica D.* – 2004. – Vol. 193. – P. 3–34.
7. Beck, C. From time series to superstatistics// C. Beck, E.C.D. Cohen, H.I. Swinney // *Phys. Rev. E.* – 2005. – Vol. 72. – P. 56133–56139.
8. Touchette, H. Asymptotics of superstatistics / H. Touchette and C. Beck // *Phys. Rev. E.* – 2005. – Vol. 71. – P. 016131 (1–6).
9. Peyrard, M. The statistical distribution of one-dimensional “turbulence”/ M. Peyrard // *Physica D.* – 2004. – Vol. 193. – P. 265–277.
10. Peyrard, M. Statistical properties of one-dimensional “turbulence” ”/ M. Peyrard, I. Daumont // *Europhys. Lett.* – 2002. – Vol. 59. – P. 834–840.
11. Pinton, J.-F. Power fluctuations in a closed turbulent shear flow / J.-F. Pinton and P.C.W. Holdsworth // *Phys. Rev. E.* – 1999. – Vol. 60. – № 3. – P. R2452–2455.
12. Chevillard, L. Lagrangian velocity statistics in turbulent flows: effects of dissipation/ L. Chevillard [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2003. – Vol. 91. – № 21. – P. 214502 (1–4).
13. Peyrard, M. The pathway to energy localization in nonlinear lattices / M. Peyrard // *Physica D.* – 1998. – Vol. 119. – P. 184–199.
14. Bramwell, S.T. Universal fluctuations in correlated systems/ S.T. Bramwell [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2000. – Vol. 84. – № 17. – P. 3747–3774.
15. Castaing B. Velocity probability density functions of high Reynolds number turbulence / B. Castaing, Y. Gagne, E.J. Hopfinger // *Physica D.* – 1990. – Vol. 46. – P. 177–200.
15. Beck, C. Measuring nonextensivity parameters in turbulent Couette–Taylor flow/ C. Beck, G.S. Lewis and H.L. Swinney // *Phys. Rev. E.* – 2001. – Vol. 63. – P. 03303 (1–4).
16. Колмогоров, А.Н. К вырождению изотропной турбулентности в несжимаемой жидкости/ А.Н. Колмогоров // *ДАН СССР.* – 1941. – Т. 31. – С. 538–541.
17. Ландау, Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. –М.:Наука, 1986. – 736с.
18. Колмогоров, А.Н. Уточнение представлений о локальной структуре турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса / А.Н. Колмогоров //

- Mecanique de la turbulence: Colloq. Intern. CNRS, Marseille, aout – sept. 1961/ На рус. и фр. яз. Paris. – 1962. – P. 447–458.
19. Obuchov ,A.M. Some specific features of atmospheric turbulence/ A.M. Obuchov // J. Fluid Mech. – 1962. – Vol.13. – Pt. 1. – P. 77–81.
 20. Jung, S. Velocity difference in turbulence/ S. Jung, H.L. Swinney // Phys. Rev. E. – 2005. – Vol. 72. – P. 026304 (1–7).
 21. Naimark, O.B. Defect Induced Transitions as Mechanisms of Plasticity and Failure in Multifield Continua/ O.B. Naimark // *Advances in Multifield Theories of Continua with Substructure*/ ed. G. Capriz and P. Mariano, Birkhauser, Boston. – 2004. – P. 75–114.
 22. Наймарк, О.Б. Неустойчивости в конденсированных средах, обусловленные дефектами / О.Б. Наймарк // Письма в ЖЭТФ. – 1998. – Т. 67. – № 9. – С. 751–757.
 23. Леонтович, М.А. О свободной энергии неравновесного состояния / М.А. Леонтович //ЖЭТФ. – 1938. – Т.8. – № 7. – С. 844–854.
 24. Flach, S. Integrability and localized excitations in nonlinear discrete systems/ S. Flach, C.R. Willis and E. Olbrich // Phys. Rev. E. – 1994. – Vol. 49. – № 1. – P. 836–850.
 25. Arnol'd, V.I. Ordinary differential equations/ V.I. Arnol'd. – MIT Press, Cambridge, 1973.
 26. Kurdyumov, S.P. Evolution and self-organization laws of complex systems / S.P. Kurdyumov // International Journal of Modern Physics. – 1988. – Vol. 1. – № 4. – P. 299–327.
 27. Наймарк, О.Б. Неравновесные структурные переходы как механизм турбулентности / О.Б. Наймарк //Письма в ЖТФ. – 1997. – Т. 23. – № 13. – С. 81–87.
 28. Беляев, В.В. Локализованные обостряющиеся структуры в процессах разрушения твердых тел при интенсивных воздействиях/ О.Б. Беляев, О.Б. Наймарк //ДАН СССР. – 1990. – № 2. – С. 312.
 29. Монин, Я.С. Статистическая гидромеханика (теория турбулентности) Т.1./ Я.С. Монин, А.М. Яглом. – СПб.: Гидрометеиздат, 1992.
 30. Сахаров, А.Д. Экспериментальное исследование устойчивости ударных волн и механических свойств вещества при высоких давлениях и температурах/ Сахаров А.Д. [и др.] // Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 159. – № 5. – С. 1019–1022.
 31. Наймарк, О.Б. Коллективные свойства ансамблей дефектов и некоторые нелинейные проблемы пластичности и разрушения / О.Б. Наймарк // Физическая мезомеханика. – 2003. – Т. 6. – № 4. – С. 45
 32. Наймарк, О.Б. Кинетика накопления микротрещин и природа стадийности процесса разрушения при ударном нагружении / О.Б. Наймарк, В.В. Беляев // Физика горения и взрыва – 1989. – Т. 25. – № 4. – С. 115–123.
 33. Наймарк, О.Б. Неравновесные кинетические переходы как механизмы локализации пластической деформации/ О.Б. Наймарк, В.В. Ладыгин // ПМТФ. – 1993. – № 3. – С. 121–137.
 34. Swegle, J.W. Shock viscosity and the prediction of shock wave rise times/ J.W. Swegle and D.E. Grady // J. Appl. Phys. – 1985. – Vol. 58. – № 2. – P. 692–701.
 35. Баяндин, Ю.В. Экспериментальное и теоретическое исследование автомодельной структуры пластического фронта ударных волн в конденсированных средах/ Ю.В. Баяндин, О.Б. Наймарк // Физическая мезомеханика. – 2004. – Т. 7. – С. 31–37.
 36. Френкель, Я.И. Кинетическая теория жидкости/ Я.И. Френкель. – Ленинград: Наука, 1975.
 37. Carlson, D.R. A flow-visualization study of transition in plane Poiseuille flow/ D.R. Carlson, S.E. Widnall, and M.F. Peeters //J. Fluid Mech. – 1982. – Vol. 121. – P. 487–505.

Получено 8.09.06.