

И.Ю. Смолин

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН (г. Томск)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МИКРОПОЛЯРНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ НА МЕЗОУРОВНЕ

Abstract

An overview of micropolar models is presented, which are treated as two-scale generalized media mechanics models for description of materials with complex structure that changes during deformation. Equations for elastic plastic Cosserat media are written and application of this model to modeling of metal plastic deformation at the meso scale is treated.

Строгое и полное описание механического поведения реальных материалов является очень сложной проблемой. Обычно для решения конкретных практических задач вводятся упрощающие предположения о свойстве материала и характере его поведения при деформировании. Фактически рассматриваются некие воображаемые среды, которые позволяют с достаточной степенью приближения описывать важные для данной задачи свойства реального материала. Такая замена реального вещества воображаемой средой составляет суть построения модели материала. Далее на модели изучаются особенности поведения того или иного класса материалов, в тех или иных условиях нагружения.

Практически все естественные и искусственно создаваемые материалы имеют сложную внутреннюю структуру, которая, к тому же, не остается постоянной, а изменяется в ходе деформации и существенно влияет на поведение образцов и изделий из таких материалов. Необходимость учета влияния внутренней структуры, а также происходящих в процессе деформации физико-химических процессов на механическое поведение материалов при описании процессов деформации и разрушения в механике осознана давно. С этой целью вводились различные усложнения и обобщения понятия классической простой среды. Можно отметить общие методические работы Л.И.Седова по построению моделей сплошных сред с внутренними степенями свободы [1, 2], Д. Коларова, А. Балтова и Н. Бончевой по построению определяющих уравнений для сред с внутренними параметрами состояния [3] и др.

В зависимости от типа материала, масштаба исследования и даже стадии деформирования могут применяться различные модели. Чем выше масштабный уровень рассмотрения, тем менее требовательна модель к описанию деталей неоднородности структуры. На низких масштабных уровнях модели должны описывать больше деталей структуры и в то же время обеспечивать иерархичность описания – связь низких масштабов с более высокими.

Тенденции развития современной науки и техники требуют создания моделей для описания поведения материалов на масштабах, сравнимых с очень мелкими особенностями их структурной организации – масштабах субмикронного и нанометрового диапазона. Наблюдающееся во многих экспериментах изменение внутренней структуры материалов в ходе деформации, особенно на ее поздних стадиях, соответствующих развитой пластичности и предразрушению, приводит к необходимости введения параметров выбранных моделей не как констант, а как функций накопленной неупругой деформации, или даже к изменению самой модели.

В литературе встречается понятие среды с микроструктурой [4–6]. Это такая сплошная среда, в которой каждая бесконечно малая «точка» несет в себе информацию о структуре материала. По сравнению с классической сплошной средой в «точках» подобных усложненных сред чаще всего вводятся дополнительные степени свободы, а при описании силового взаимодействия между элементами этой среды используется не только вектор сил, но и вектор моментов. Именно таким моделям и посвящена данная работа.

В настоящее время предложено довольно много разновидностей подобных моделей, а раздел механики, в котором изучаются подобные модели, получил название механики обобщенных сред. Наиболее простой и употребительной является модель среды Коссера или микрополярной среды.

В комбинации с явным учетом структурной неоднородности на мезоуровне модели подобного типа позволяют описать взаимодействие двух масштабных уровней. Поэтому их использование представляется перспективным для задач мезоуровня.

Обобщенные среды

Как известно, силовое взаимодействие по обе стороны произвольной поверхности нагруженной среды в классических теориях деформируемого твердого тела задается только главным вектором сил. Последовательное развитие этой идеи приводит к симметричности тензоров напряжений и деформаций и фактически предполагает, что нагружаемое тело является бесструктурным континуумом. Ограничения, накладываемые такой симметричной теорией, пытался снять Фойхт в 1887 году в своей работе об упругих свойствах кристаллов [7]. Он предложил при описании силового взаимодействия учитывать дополнительно и главный момент. Таким образом, в модель наряду с силовыми напряжениями вводились также и моментные напряжения. Причем тензоры этих напряжений в общем случае оказываются несимметричными. Распространение таких идей на кинематику приводит к тому, что частицы среды теперь обладают шестью степенями свободы: тремя компонентами вектора перемещения и тремя компонентами вектора независимого поворота. Количество уравнений движения также становится равным шести.

Одна из первых довольно полно разработанных подобных теорий была изложена в книге Эжена и Франсуа Коссера в 1909 году [8]. Они рассмотрели уравнения равновесия и движения деформируемых линий, поверхностей и сред, в которых каждая частица описывается не только вектором ее перемещений, как в классической теории, но и дополнительно вектором поворота.

Более активное развитие таких теорий относится уже к 60-м годам XX века. Оно связано с именами В. Гюнтера, К.А. Труселла, Дж.Л. Эриксона, Р.А. Тупина, Р.Д. Миндлина, Г.Ф. Тирстена, В.Т. Койтера, А.К. Эрингена, А.Е. Грина, В. Новацкого, Е.В. Кувшинского, Э.Л. Аэро, В.А. Пальмова, Г.Н.Савина [4, 9–22] и многих других. Дадим краткую информацию о первых работах в этой области.

В. Гюнтер вновь обратился к идее ориентированного континуума и указал на его связь с теорией дислокаций [9].

Е.В. Кувшинский и Э.Л. Аэро при построении своих моделей [14–16] исходили из предположения, что «частицы вещества не точки, а пространственные образования, расположенные на расстояниях, сравнимых с их размерами» [14]. Такие допущения, по их мнению, могли помочь объяснить аномалии динамической упругости пластиков, аномальный пьезоэффект в кварце, дисперсию упругих волн в сплошной среде, а также особенности упругих свойств кварца, алмаза, дигидрофосфата аммония и других кристаллов. Было разработано два варианта асимметрической теории упругости для вра-

щательного взаимодействия частиц: когда вращение описывается градиентом поля смещений, а также когда «внутреннее» (или собственное) вращение является независимым и возникает в результате осреднения поворотов по элементу среды.

Развивая теорию упругости среды с микроструктурой, Р.Д. Миндлин предложил учесть микроструктуру материала введением понятия единичной ячейки, которую предлагал интерпретировать либо как часть кристаллической решетки, либо как молекулу полимера, кристаллит поликристалла, или частицу зернистого материала [4].

А.К. Эринген предложил называть среду с дополнительной вращательной степенью свободы полярной. В развиваемой им теории микрополярной упругости он рассматривал «материальные среды с гантелевидными молекулами» и ожидал, что эта теория найдет применение в механике зернистых материалов с вытянутыми твердыми зёрнами и композитных волокнистых материалов, а также «для более общего случая материалов, обладающих зернистой структурой и микроструктурой» [17]. А.К. Эринген также выделял случай, когда «ищется реакция на внешнее физическое воздействие тела, характерный размер которого соизмерим со средним размером зерна или молекул в теле» [17]. Заметим от себя, что именно такие случаи характерны для мезоуровня.

Фактически и Р.Д. Миндлин, и А.К. Эринген предполагали, что каждая точка континуума является деформируемой микросредой. В работе Ю.В. Гриняева [18] показано, что среды Миндлина и Эрингена схожи, а обобщение теории предлагается строить на основе лагранжева формализма в сочетании с методом калибровочных полей, при этом под микроструктурой предполагается континуум дефектов.

Развитием идей А.К. Эрингена и Р.Д. Миндлина явилась более общая модель Эрингена – Сухуби [19], в которой вводится понятие микроморфного континуума. Континуум с микроструктурой Миндлина можно рассматривать как частный случай микроморфного континуума – это микроморфный континуум 1-го порядка и 1-й степени. Частный случай, когда микросреда испытывает только жесткое вращение, совпадает с теорией Коссера, Е.В. Кувшинского и Э.Л. Аэро.

А.Э. Грин и Р.С. Ривлин усложнили понятие полярной среды Эрингена и разработали мультиполярную теорию [20]. Вообще говоря, теории мультиполярной среды и микроморфного континуума являются примерами иерархических моделей, учитывающих сложную многоярусную структуру материала.

Развивалась также упрощенная теория несимметричной упругости, в которой дополнительная степень свободы не рассматривалась, а поворот точки сплошной среды принимался равным ротору векторного поля перемещений. При этом взаимодействие сил через произвольную поверхность тела также осуществляется за счет как силовых, так и моментных напряжений. Такой вариант рассматривался еще в монографии Коссера, а позднее такие модели получили название псевдоконтинуума Коссера [21] или теорий моментных напряжений [22].

Другой альтернативой упрощения среды Коссера является случай, когда дополнительные вращательные степени свободы учитываются, но моментные напряжения не рассматриваются. Такая модель называется редуцированной моделью Коссера (по-английски – *reduced Cosserat model*).

В настоящее время класс подобных теорий значительно расширился. Он обогатился такими понятиями, как нелокальность [5, 23], градиентность [24], калибровочные поля [18], изменение локальной топологии [25], был расширен на случай конечных упругих деформаций, пластичных твердых тел [26], а также жидкостей и жидких кристаллов [27, 28]. Выделился отдельный раздел механики – механика обобщенных сплошных сред.

Все существующие теории обобщенных (усложненных) сред делятся на два больших класса:

1. Сильно нелокальные теории, в которых используются определяющие соотношения интегрального типа. При этом обычно не используются ни дополнительные степени свободы, ни моментные напряжения.

2. Слабо нелокальные теории, к которым относятся полярные и градиентные теории. Эти теории, в свою очередь, принято делить на:

а) теории высшего порядка (в англоязычной литературе используется термин *higher-order*), в которых учитываются дополнительные степени свободы (примером является континуум Коссера),

б) теории высшего уровня или градиентности (по-английски – *higher-grade*), в которых учитываются производные более высокого порядка (примером является континуум Леру).

Классические теории, описывающие так называемые простые материалы, образуют класс строго локальных теорий.

К сожалению, не существует достаточно полных обзоров, в которых было бы проведено сопоставление и сравнение всех этих моделей. В настоящее время это и трудно сделать ввиду огромного количества публикаций и большого разнообразия самих моделей. Тем не менее хотелось бы отметить достаточно хороший обзор, особенно упругих моделей, в книге В.И. Ерофеева [6], рассмотрение экспериментальных методов определения упругих констант в работе Р. Лейкса [29]. В работе С. Форе и Р. Зиферта [30] представлен обзор упругопластических моделей различных слабо нелокальных теорий, включая модель Коссера, микроморфные и градиентные модели. Обзор моделей пластичности и разрушения сильно нелокальных сред можно найти в статье З. Бажанта и М. Ерасека [23].

Наряду с развитием самой теории, несколькими авторами аналитически был решен ряд конкретных задач, обычно в двухмерной постановке. Особого внимания заслуживают задачи о концентрации напряжений, например, вокруг кругового отверстия [31–34]. Было показано, что решение зависит от соотношения радиуса отверстия и характерного для модели параметра длины. Когда размер отверстия сопоставим с характерной длиной, то максимальное напряжение в случае учета моментных напряжений оказывается меньше того значения, которое дает классическая теория упругости. Такие выводы даже вошли в инженерные справочники [35]. Вблизи поверхности раздела в условиях сдвига удастся описать пограничный слой определенной толщины, в котором сдвиговые деформации меняются непрерывно, но с большим градиентом. [36]. Таким образом, существенное отличие подобные модели дают для областей концентрации напряжений, сравнимых с размерами структурной неоднородности материала.

Следует отметить, что получить аналитическое решения задач для среды Коссера сложнее, чем для классических сред. Поэтому новый всплеск интереса к моделям механики обобщенных сред и, в частности, к средам Коссера в конце двадцатого века обусловлен возросшим уровнем вычислительной техники и связан с применением численных методов решения. В настоящее время имеется достаточно много работ по применению численных методов расчета для упругих [37, 38] и для упругопластических сред [26, 39] в квазистатической, а также динамической [40] постановках с применением метода конечных элементов. Интерес к моделям обобщенных сред был обусловлен также тем, что их применение позволило исключить излишне повышенную склонность к локализации деформации в расчетах по упругопластическим моделям с разупрочнением на стадии предразрушения. Кроме того, одной из важных особенностей получаемых

решений является независимость области локализации деформации от размера расчетной сетки для разупрочняющихся материалов.

Однако применение моделей обобщенных сред в значительной мере ограничивается из-за недостатка информации о материальных константах. Лишь в 70-80-х годах XX века появились публикации, в которых сообщалось об экспериментальном определении упругих констант, входящих в определяющие соотношения для некоторых материалов типа костной ткани, высокопористых полимерных материалов (пенопластов) и некоторых композитов [29, 41–44].

Определяющим явлением, позволяющим измерить новые параметры, является размерный эффект, который предсказывают теории обобщенных сред. Этот эффект состоит в том, что жесткости на изгиб и кручение стержней и пластинок при уменьшении их размеров возрастают, в отличие от классической теории, где эти жесткости остаются постоянными. Основанные на этом принципе методы были названы методами размерных эффектов. Сопоставляя результаты измерений и полученные расчетные зависимости жесткостей от размера образца, удается определить все константы модели [29].

Другой класс методов основан на волновых эффектах. В этом случае используется предсказываемое теорией явление дисперсии сдвиговых волн, т.е. зависимости их скорости от частоты. Трудность данного подхода состоит в том, что дисперсия обусловлена также вязкими свойствами материала. Однако подобные методы незаменимы для определения, например, параметров слоистых горных пород, масштабы структуры которых не позволяют произвести испытания на изгиб образцов из подобных сред в лабораторных условиях.

Третий класс методов основан на изучении распределения деформаций возле концентраторов напряжений и получил название полевых методов. Например, классическая теория и теория Коссера предсказывают разное распределение деформаций в углах стержня прямоугольного сечения при его кручении.

Оригинальный экспериментальный метод, основанный на точном аналитическом решении задачи Кирша, предложен недавно в работах М.А. Кулеша, В.В. Корепанова, И.Н. Шардакова, В.П. Матвеевко [44]. Важно отметить, что в этой работе авторы не просто определяют параметр модели, а дают оценку масштаба, при котором конкретный материал (оргстекло) проявляет моментные свойства. По данным этой работы для оргстекла этот масштаб составляет менее 0,3 мм.

Совсем другие подходы к определению параметров среды Коссера основаны на применении процедур усреднения (homogenization в англоязычной литературе) для материалов с заданной внутренней структурой. В качестве такой структуры принимаются, например, решеточные структуры, т.е. каркас из массивных шариков, соединенных тонкими стержнями. При этом для элементов структуры на микроуровне используются модели простых классических материалов. Осредненные по представительному объему результаты должны совпадать с результатами аналогичного нагружения однородного элемента среды Коссера. При этом могут использоваться как аналитические решения [45], так и численные, основанные, например, на методе конечных элементов [46].

Суммируя вышеизложенную информацию, можно заключить, что интерес к микрополярным моделям обусловлен следующими причинами:

- 1) возможностью учитывать влияние микроструктуры материала;
- 2) способностью описать размерные эффекты при моделировании деформации образцов малых размеров, а также локализации деформации;
- 3) тем, что естественным образом входящие в определяющие соотношения параметры, имеющие размерность длины, позволяют избежать потери эллиптичности (или

гиперболичности для динамических задач) при моделировании процессов локализации деформации в материалах с разупрочнением [40, 47, 48].

Касаясь области практического применения представленных моделей, можно отметить следующее. В «Энциклопедии материалов», изданной в издательстве «Эльзевир» [49], материалами Коссера названы жидкие кристаллы, горные породы и гранулированные среды, ячеистые твердые тела и композиты, а также кристаллы с дефектами. Следует к этому списку добавить также ферромагнитные материалы в условиях воздействия электромагнитных полей [50, 51]. Упругопластические модели среды Коссера нашли применение для описания геоматериалов, упругие – для зернистых сред, высокопористых материалов и костной ткани.

Нам же представляется важным отметить область применения моделей обобщенных моделей в рамках масштабных уровней деформации различных материалов. Остановимся подробнее на упругопластической модели Коссера и возможности её применения для описания неупругого поведения металлических материалов на мезоуровне.

Упругопластическая среда Коссера

Движение каждой точки среды Коссера описывается двумя векторами: вектором смещения u_i и вектором поворота ω_i . Соответствующие им несимметричные тензоры деформации γ_{ij} и изгиба-кручения (в англоязычной литературе используется термин curvature tensor, т.е. тензор кривизны) κ_{ij} имеют вид

$$\gamma_{ij} = u_{j,i} - \varepsilon_{ijk} \omega_k, \quad (1)$$

$$\kappa_{ij} = \omega_{j,i}, \quad (2)$$

где запятая в индексе означает производную по соответствующей пространственной координате, а ε_{ijk} означает альтернирующий тензор Леви–Чивиты. Для того чтобы тензор деформации был функцией состояния, он не должен изменяться при смещении и повороте среды как целого. В классическом случае это достигается тем, что тензор деформации является разницей тензоров дисторсии и поворота. Дисторсия, будучи производной по координатам, не меняется при смещении на постоянный вектор, а тензор поворота учитывает изменение в дисторсии при повороте элемента среды как целого без изменения формы. В случае микрополярной среды полный поворот частицы среды, описываемый независимым вектором поворота, складывается из поворота элемента среды как целого за счет поля смещений (ротатор поля смещений) и «внутреннего» поворота. Поэтому уравнение (1) можно переписать в виде

$$\gamma_{ij} = (u_{j,i} - \varepsilon_{ijk} \omega_k) = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j}) + \frac{1}{2}(u_{j,i} - u_{i,j}) - \varepsilon_{jik} \omega_k = e_{ij} - (\omega_k - \Omega_k) \varepsilon_{ijk},$$

где $\Omega_k = -\frac{1}{2} u_{i,j} \varepsilon_{ijk}$ или $\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{u}$. Таким образом, в случае среды с дополнительной вращательной степенью свободы тензор деформации складывается из классического тензора деформации e_{ij} и «внутреннего» поворота, который является разностью между полным независимым поворотом ω_k и поворотом элемента среды как целого Ω_k . Другими словами, «внутренний» поворот отражает изменение в микроструктуре, и поэтому вносит вклад в деформацию на мезоуровне.

Передача силовых взаимодействий между двумя частями среды происходит не только посредством вектора сил, но также и вектора моментов. В рассмотрение вводятся несимметричные тензоры силовых σ_{ij} и моментных μ_{ij} напряжений. Они должны удовлетворять уравнениям баланса количества движения (импульса) и момента количества движения:

$$\sigma_{ji,j} = \rho \dot{u}_i, \quad (3)$$

$$\mu_{ji,j} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = J_{ij} \ddot{\omega}_j. \quad (4)$$

Здесь точка сверху означает материальную производную по времени, ρ – плотность, J_{ij} – компоненты тензора плотности момента инерции.

Определяющие уравнения для изотропной упругой среды, записанные в скоростях, имеют вид

$$\dot{\sigma}_{ij} = \lambda \dot{\gamma}_{kk}^e \delta_{ij} + (\mu + \alpha) \dot{\gamma}_{ij}^e + (\mu - \alpha) \dot{\gamma}_{ji}^e, \quad (5)$$

$$\dot{\mu}_{ij} = \beta \dot{\kappa}_{kk}^e \delta_{ij} + (\gamma + \varepsilon) \dot{\kappa}_{ij}^e + (\gamma - \varepsilon) \dot{\kappa}_{ji}^e, \quad (6)$$

где λ и μ – константы Ляме, α , β , γ , ε – новые параметры в обозначениях, введенных В. Новацким [21]. Следует заметить, что из условий положительной определенности квадратичной формы, составляющей свободную энергию, следуют ограничения на параметры определяющих соотношений [15, 17]:

$$\mu > 0, \quad (3\lambda + 2\mu) > 0, \quad \alpha > 0, \quad (3\beta + 2\gamma) > 0, \quad \gamma > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad (\gamma + \varepsilon) > 0.$$

Классическая теория течения простой среды может быть расширена на описание упругопластического деформирования среды Коссера двумя способами [30]. Можно построить теорию, используя одно условие пластичности, в которое входят и силовые, и моментные напряжения, либо использовать для силовых и моментных напряжений два отдельных условия.

В обоих случаях используется аддитивное разложение скоростей деформаций и изгибов-кручений на упругую и пластическую составляющие:

$$\dot{\gamma}_{ij} = \dot{\gamma}_{ij}^e + \dot{\gamma}_{ij}^p, \quad (7)$$

$$\dot{\kappa}_{ij} = \dot{\kappa}_{ij}^e + \dot{\kappa}_{ij}^p. \quad (8)$$

Далее, формулируется условие пластичности, которое состоит в том, что функция текучести становится неотрицательной. Сама функция текучести для металлических материалов зависит только от обобщенной интенсивности напряжений – обобщения для выражения эквивалентных напряжений на случай несимметричных тензоров силовых и моментных напряжений. В первом случае эти формулы приобретают вид [30]

$$f(\sigma_{ij}, \mu_{ij}) = J_2(\sigma_{ij}, \mu_{ij}) - Y, \quad (9)$$

$$J_2(\sigma_{ij}, \mu_{ij}) = \sqrt{a_1 s_{ij} s_{ij} + a_2 s_{ij} s_{ji} + b_1 \mu_{ij} \mu_{ij} + b_2 \mu_{ij} \mu_{ji}}, \quad (10)$$

здесь s_{ij} – компоненты девиатора тензора силовых напряжений, a_1 , a_2 , b_1 , b_2 – новые дополнительные параметры, а Y – предел текучести.

Если применяется подход с отдельными условиями пластичности, то соответствующие формулы для функций текучести и интенсивностей напряжений запишутся в следующем виде:

$$f_{\sigma}(\sigma_{ij}) = J_2(\sigma_{ij}) - Y_{\sigma}, \quad (11)$$

$$f_{\mu}(\mu_{ij}) = J_2(\mu_{ij}) - Y_{\mu}, \quad (12)$$

$$J_2(\sigma_{ij}) = \sqrt{a_1 s_{ij} s_{ij} + a_2 s_{ij} s_{ji}}, \quad (13)$$

$$J_2(\mu_{ij}) = \sqrt{b_1 \mu_{ij} \mu_{ij} + b_2 \mu_{ij} \mu_{ji}}. \quad (14)$$

В данном случае отдельно для силовых напряжений и для моментных напряжений вводятся свои значения пределов текучести Y_{σ} и Y_{μ} соответственно. Пластические составляющие деформаций и изгибов-кручений определяются из выражений ассоциированного закона течения

$$\dot{\gamma}_{ij}^p = \dot{\lambda}_{\sigma} \frac{\partial f_{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (15)$$

$$\dot{\kappa}_{ij}^p = \dot{\lambda}_{\mu} \frac{\partial f_{\mu}}{\partial \mu_{ij}}. \quad (16)$$

В случае использования единого условия пластичности, функция текучести f и параметр $\dot{\lambda}$ в формулах (15)–(16) будут одни и те же.

Рассматривая формулы для определяющих соотношений с точки зрения размерностей, можно выделить несколько комбинаций параметров, имеющих размерность длины. Так, В. Новацкий [21] ввел следующие параметры:

$$l_1^2 = \frac{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)}{4\mu\alpha}, \quad (17)$$

$$l_2^2 = \frac{\beta + 2\gamma}{4\alpha}. \quad (18)$$

Р. Лейкс [29] предложил два других параметра, характерных для деформации кручения и изгиба соответственно:

$$l_t^2 = \frac{\gamma}{\mu}, \quad (19)$$

$$l_b^2 = \frac{\gamma - \varepsilon}{4\mu}, \quad (20)$$

а С. Форе [49] использовал комбинации для параметров, входящих в условие пластичности,

$$l_{pi}^2 = \frac{b_i}{a_i}. \quad (21)$$

Для динамических задач дополнительно можно ввести еще три характерных размера – радиусы инерции элементарных объемов среды Коссера

$$l_{r_i}^2 = \frac{J_i}{\rho}, \quad (22)$$

где J_i – плотность i -го главного осевого момента инерции.

Замкнуть выписанную систему уравнений следует уравнением баланса энергии, которое запишем для случая отсутствия потоков тепла,

$$\rho \dot{E} = \sigma_{ij} \dot{\gamma}_{ij} + \mu_{ij} \dot{\kappa}_{ij}, \quad (23)$$

и уравнением неразрывности (сохранения массы), которое для лагранжева подхода к описанию движения сплошной среды можно записать через якобиан преобразования от координат в начальный момент времени к координатам в текущий момент времени в виде

$$\rho = \rho_0 \frac{\partial(x_0^1, x_0^2, x_0^3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)}. \quad (24)$$

В численных расчетах последнее выражение заменяется простым условием сохранения массы в каждой расчетной ячейке.

О применении модели Коссера для мезоуровня

Согласно данным обзора [29] экспериментальные исследования, основанные на методе размерных эффектов, показывают, что характерные длины l_b и l_t сравнимы с размерами элементов структуры материала, по крайней мере, в пределах достоверности метода, составляющего несколько сотых долей миллиметра. Эти данные получены для таких материалов, как костная ткань, пенопласты, крупнозернистые металлы. Для композитов, упрочненных частицами, эти длины оказались равными нулю в статических экспериментах, что подтверждается также некоторыми теоретическими работами [29]. Применение более точных динамических методов, основанных на дисперсии упругих волн, позволило определить константы и для композита, состоящего из алюминиевых частиц в эпоксидной матрице [42].

Обычно вклад моментных напряжений оценивается как величина второго порядка малости по сравнению с силовыми напряжениями. Это имеет место в условиях гладких распределений самих напряжений и деформаций. Однако в области больших градиентов напряжений (около концентраторов напряжений) этот вклад возрастает. Кроме того, в нелинейных моделях, когда даже при небольшом изменении определенных параметров возможны бифуркации и качественное изменение характера решений, влияние и малых поправок может оказаться решающим.

Общепризнано, что модели классических сред не позволяют удовлетворительно описать напряженно-деформированное состояние в малой окрестности концентраторов напряжений, где наблюдаются большие градиенты напряжений и деформаций. Ограниченность классических теорий обусловлена лежащими в их основе допущениями, не учитывающими размерные эффекты, проявляемые в таких случаях в экспериментах. Альтернативой классическим подходам являются нелокальные теории, содержащие параметры размерности длины.

Заметим также, что рассмотрение объемов нанометрового размера лежит на пределе применимости моделей механики сплошных сред, т.к. рассматриваемые объемы становятся сравнимыми с размерами нескольких атомов и молекул. При континуальном описании таких объектов нелокальные эффекты проявляются в наибольшей степени [5].

Таким образом, на масштабах структурной неоднородности материалов, соответствующих мезоуровню, где влияние исходной внутренней структуры и формирующихся субструктур проявляется в наибольшей степени, применение моделей обобщенных сред является обоснованным. Поскольку при пластическом деформировании наблюдается изменение в структуре материалов, то новые параметры или модули можно рассматривать как характеристики не самих материалов, а масштаба рассмотрения и процесса нагружения.

Изложим сначала физические предпосылки введения в рассмотрение новой степени свободы поворотного типа для описания пластической деформации металлических материалов [52, 53].

Особое внимание мы обращаем на те материалы, в которых в ходе деформации возможны реализация кооперативных механизмов деформации и развитие поворотов отдельных областей. Это в первую очередь касается ультрамелкозернистых и нанокристаллических материалов, в которых изначально наблюдаются высокий уровень градиентов напряжений и наличие высокодефектных субструктур. Специфическими механизмами деформации в них, кроме внутризеренного скольжения дислокаций, являются процессы, обуславливающие поворотные моды деформации – зернограничное проскальзывание, миграция границ зерен, диффузионные процессы по границам зерен [54]. Последние вызваны высокой кривизной кристаллической решетки, динамическими фазовыми переходами [55], а также большой долей границ зерен и их активностью в подобных материалах. По сути, в этих случаях мы имеем дело с определенным «внутренним движением» в материале.

В металлических материалах и сплавах с обычным размером зерна представляют интерес развитые стадии пластической деформации, предшествующие разрушению, когда наблюдается коллективное поведение дефектной структуры. При этом в результате самоорганизации образуются новые носители деформации – трехмерные структурные элементы, для которых также характерно вращательное движение (иногда даже используют термин «трансляционно-ротационный вихрь»).

Совершенно другого рода причины для применения моделей обобщенных сред связаны с ограниченными возможностями доступной компьютерной техники на современном этапе. Когда при численном моделировании механического поведения материалов неоднородности структуры разных масштабов учитываются явным образом, может возникнуть проблема когда, например, требуется совместно описать каждое зерно поликристалла и еще явно учесть особенности дефектной структуры внутри отдельных зерен. Если количество зерен составляет несколько десятков, то ячеек расчетной сетки (или конечных элементов) потребуется несколько десятков тысяч. Обычно в численных методах предполагается, что напряженно-деформированное состояние внутри ячейки расчетной сетки (конечного элемента) является либо однородным, либо плавно распределенным в соответствии с некоторыми заданным базисными функциями (линейными или полиномиальными). Для этого проводят сгущение сетки в области концентраторов напряжений. На самом деле, из-за наличия структурных неоднородностей масштаба, меньшего размера ячейки параметры напряженно-деформированного состояния в ней не являются достаточно гладкими. Для них характерны большая или меньшая степень неоднородности. Степень отклонения в первом приближении как раз и можно характеризовать значением новой степени свободы поворотного типа. Дополнительная степень свободы должна позволить описать неявно неоднородность деформации по ячейке расчетной сетки.

Поскольку неоднородность распределения деформаций проявляется в гораздо большей степени на стадии пластического течения, то можно предположить, что новая степень свободы либо включается на определенной стадии деформации, либо ее воздействие проявляется неодинаково на разных стадиях нагружения. Этого можно достичь, если предположить, что параметры модели, ответственные за развитие поворотов, являются функциями накопленной деформации.

Особого внимания заслуживает проблема задания граничных условий в терминах независимых поворотов и моментных напряжений. Поскольку независимые повороты отражают эволюцию структуры, то их значения может потребоваться задавать не только на граничных поверхностях, но и во внутренних точках объема (на внутренних границах раздела). Задание моментных напряжений во многих конкретных случаях задания обычных нагрузок может оказаться неоднозначным. Например, задание скольжения (сдвига) в объеме может быть реализовано как заданием сдвиговых силовых напряжений, так и изгибающих моментов. Не вызывает проблем только задание граничных условий на свободных поверхностях. На них естественно предположить нулевые значения сил и моментов.

Логичным развитием модели представляется следующая гипотеза. Если мы связали эволюцию дефектной структуры с новой степенью свободы, то и упрочнение, которое она вызывает, мы должны описать с помощью напряжений, сопряженных с изгибам-кручениями – с моментными напряжениями. В этом случае изменение параметров модели должно обеспечить описание различного характера упрочнения для различных материалов. Например, для субмикроструктурных материалов имеет место быстрое упрочнение на коротких II и III стадиях зависимости истинных напряжений от истинных деформаций, и затем продолжительная VI стадия этой зависимости [54].

Итак, когда влияние структуры при упругих деформациях мало, но начинает заметно сказываться при пластических деформациях, можно положить, что на начальной упругой стадии деформирования отсутствуют независимые повороты и равны нулю все неклассические параметры в определяющих соотношениях – α , β , γ , ε . Далее возможны два варианта. Первый – эти параметры плавно растут как функция локальных напряжений, что отражает тот факт, что пластические деформации начинают развиваться в материале еще до достижения макроскопического предела текучести. Второй – эти параметры остаются равными нулю до достижения напряжениями предела текучести в локальной области, а затем начинают расти с накоплением локальных пластических деформаций, т.е. мы пренебрегаем пластическими деформациями, развивающимися до достижения предела текучести. Таким образом, второй вариант модели является более грубым. Выбор того или иного варианта следует осуществлять в зависимости от особенностей материала, поведение которого мы собираемся моделировать.

Связность двух наборов степеней свободы (смещений и поворотов) в модели Коссера обеспечивается параметром α (некоторые авторы называют его моментным модулем Коссера и обозначают μ_c) и тем, что несимметричная часть силовых напряжений входит в уравнение (4). Если $\alpha = 0$, то, в соответствии с определяющими соотношениями для несимметричной части силовых напряжений

$$\sigma_{ij}^A = -2\alpha(\omega_k - \Omega_k)\varepsilon_{kji},$$

эти напряжения равны нулю, и в уравнении сохранения моментов количества движения (4) остаются только градиенты моментных напряжений. Следовательно, две степени свободы могут эволюционировать независимо друг от друга в соответствии с уравне-

ниями сохранения количества движения и моментов количества движения, которые оказываются несвязанными.

Поскольку мы как раз и предположили, что в начальный момент $\alpha = 0$, то возможность для активизации вращательной степени свободы появится только тогда, когда α станет отличным от нуля. При этом в динамической задаче первым появится несимметричная составляющая силовых напряжений, а она, в свою очередь, через уравнение баланса моментов количества движения вызовет появление независимых поворотов. Уже затем через изгиб-кручение возникнут и моментные напряжения.

Каково дальнейшее поведение параметров α , β , γ , ε ? Для выяснения этого вопроса остановимся на анализе диаграммы нагружения. В опытах на активное растяжение измеряются две величины: изменение длины образца и возникшая сила сопротивления. Эти величины представляют собой макроскопический отклик совершаемой работы при нагружении образца. При этом внутри образца развиваются локальные процессы разной природы. Например, на микро- и мезоуровне это могут быть сдвиги и повороты отдельных блоков. Если поведение материала моделировать в рамках классического описания (симметричные силовые напряжения – симметричная деформация), то работа совершается только силовыми напряжениями на деформациях. Если в модель включить независимые повороты и моментные напряжения, то в локальных объемах дополнительно добавится работа моментных напряжений на изгибах-кручениях. Однако при макроскопическом описании с помощью традиционной σ – ε диаграммы эта работа отразится как дополнительное «упрочнение». Таким образом, значения названных параметров как функции накопленной пластической деформации должны соответствовать наблюдаемому в экспериментах упрочнению.

Скорость изменения плотности энергии деформации в каждой точке континуума в рамках нашей модели определяется выражением (23). Проинтегрировав ее по всему объему рассматриваемого тела, мы получим полную скорость энергии деформации. В то же время через экспериментально измеряемые величины она определится как $\dot{E} = \sigma_{eff} \dot{\varepsilon}$. Приравнивая значения скоростей изменения энергии и определив из численных расчетов скорость деформации по скорости перемещений граней образца, можно рассчитать эффективные напряжения и построить соответствующие σ – ε диаграммы.

Задавая разные выражения для параметров модели как функций накопленной пластической деформации, можно получить разные виды кривых упрочнения на разных стадиях.

Наконец, своего предела упругости могут достичь и моментные напряжения, после чего появятся пластические изгибы-кручения.

Результаты численного моделирования

Приведем несколько результатов численного моделирования, подтверждающих возможности предлагаемой модели. Расчеты были выполнены с помощью программы, основанной на конечно-разностной схеме, известной как метод Уилкинса, для решения задач в двухмерной постановке в условиях плоского деформированного состояния.

Первый расчет иллюстрирует особенности распределения интенсивностей силовых и моментных напряжений в области концентраторов напряжений. Значения этих величин задаются выражениями (13)–(14) и определяют наступление пластичности или предразрушения в микрополярной модели. На рис. 1 представлены такие распределения в области кругового отверстия при растяжении образца. Для силовых напряжений картина является классической. Максимальные значения достигаются в точках диамет-

ра, проведенного перпендикулярно направлению растяжения, «гребни» рельефа направлены под углом 45° к оси приложения нагрузки, и соответствуют направлению развития полос локализации деформации для изотропного материала. Распределение интенсивности моментных напряжений имеет качественно другой вид.

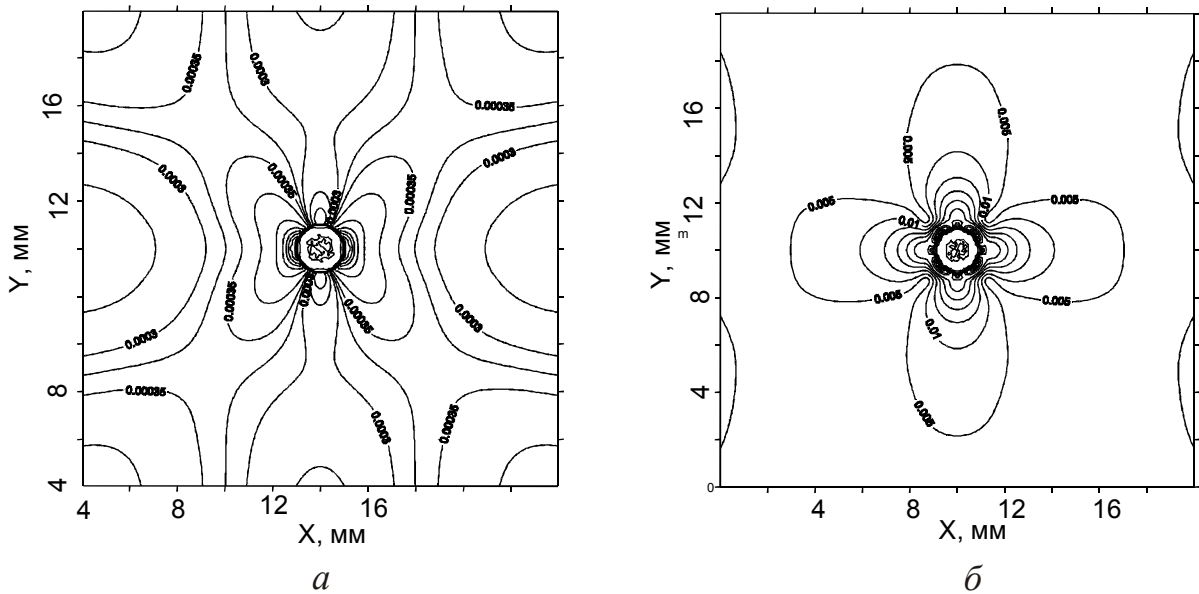


Рис. 1. Распределения интенсивностей тензоров силовых (а) и моментных (б) напряжений вокруг кругового отверстия. Образец подвергнут растяжению вдоль вертикальной оси

Второй результат подтверждает вклад моментных напряжений в упрочнение. На рис. 2 изображены две σ – ε диаграммы, рассчитанные в результате осреднения расчетных данных, полученных при двухмерном моделировании одноосного растяжения однородных образцов. Нижележащая диаграмма получена в случае, когда материал образца описывается классической упругопластической моделью среды с линейным упрочнением. Расчет диаграммы производился по формулам $\sigma = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sqrt{s_{ij}^n \cdot s_{ij}^n}$, $\varepsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}$,

где N – общее количество ячеек расчетной сетки, ℓ, ℓ_0 – текущая и начальная длина образца вдоль оси растяжения. Верхняя диаграмма рассчитана по описанной выше методике, когда в расчетах применялась модель Коссера. В проведенных расчетах параметры материала соответствовали алюминиевому сплаву 6061-Т6: $\rho=2,7$ г/см³, $\mu=27,7$ ГПа, $K=72,8$ ГПа, $Y_\sigma=300$ МПа. для новых «модулей» и предела текучести для моментных напряжений были приняты следующие выражения: $\alpha = 2,77 f(\varepsilon^{pl})$ ГПа, $\gamma + \varepsilon = 0,01 f(\varepsilon^{pl})$ ГПа \times м², $\ell^{pl} = Y_\mu / Y_\sigma = 0,001 f(\varepsilon^{pl})$ см, т.е. они плавно менялись с ростом накопленной пластической деформации согласно функции $f(\varepsilon^{pl}) = 1 - \exp\left[-\left(2,4 \varepsilon^{pl} / \varepsilon_*^{pl}\right)^2\right]$, где ε_*^{pl} – критическое значение интенсивности накопленной пластической деформации, при котором функция выходит на насыщение. Для расчета эффективного напряжения использовалась формула $\dot{E} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\sigma_{ij}^n \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}^n + \mu_{ij}^n \dot{\kappa}_{ij}^n) = \sigma_{eff} \dot{\varepsilon}$, деформация рассчитывалась так же, как и в случае классической среды. Сравнение этих диаграмм показывает, что некоторая часть упроч-

нения может быть отнесена на счет развития в деформируемом материале изгибов-кручений и моментных напряжений. Чем больше величина поворотов, тем выше пойдет кривая σ - ϵ .

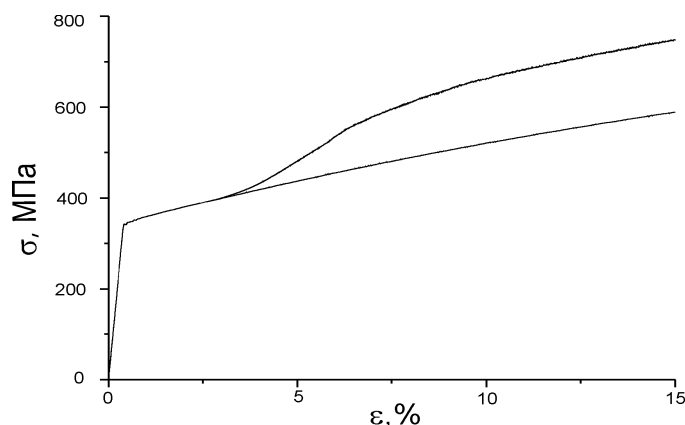


Рис. 2. Осредненные σ - ϵ диаграммы растяжения образцов, описываемых обычной и микрополярной упругопластическими моделями

Заключение

Представлен обзор моделей механики обобщенных сред и, в частности, среды Коссе-ра. Дается изложение этой модели для описания пластической деформации металлических материалов, в том числе с субмикроструктурной и наноструктурой. Появление внутренних моментов на мезоуровне в рамках этой модели обеспечивается наличием внутреннего движения на микроуровне, обусловленного эволюцией структуры материала (зарождением и движением деформационных дефектов, коллективными процессами их самоорганизации и т.д.). Представлены результаты некоторых расчетов, иллюстрирующих возможности микрополярных моделей.

Работа выполнена при частичном финансировании по Президентскому гранту поддержки ведущих научных школ России НШ-2324.2003.1 (школа академика В.Е. Панина), а также по гранту РФФИ № 05-01-00303-а.

Некоторые публикации, на которые даются ссылки в этой работе, в настоящее время доступны свободно в Интернете на домашних страницах авторов (например, Р. Лейкса <http://silver.neep.wisc.edu/~lakes/Coss.html>, С. Форе <http://www.mat.enscm.fr/Personnel/Forest>, М. Кулеша <http://users.math.uni-potsdam.de/~mkulesh/rus/public.html>), а также, с разрешения авторов, в электронной библиотеке сайта EqWorld <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/solid.htm> (например, книга В.И. Ерофеева [6]). Хотелось бы выразить им благодарность за это.

Библиографический список

1. Sedov, L.I. Some problems of designing new models of continuum media / L.I. Sedov // Proc. 11th Intern. Congr. on Appl. Mech., Munich, 1964, Springer Verlag, 1966. – P.9–19.
2. Седов, Л.И. Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы /Л.И. Седов// Прикл. мат. и мех. – 1968. – Т. 32. – № 5. – С. 771–785.
3. Коларов, Д. Механика пластических сред/ Д. Коларов, А. Балтов, Н. Бончева. – М.: Мир, 1979. – 304 с.

4. Миндлин, Р.Д. Микроструктура в линейной упругости / Р.Д. Миндлин // *Механика*. – 1964. – Т. 86. – № 4. – С. 129–160.
5. Кунин, И.А. Теория упругих сред с микроструктурой: Нелокальная теория упругости/ И.А. Кунин. – М.: Наука, 1975. – 416 с.
6. Ерофеев, В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой/ В.И. Ерофеев. – М.: Изд. Моск. ун-та, 1999. – 328 с.
7. Voigt, W. Theoretische Studien uber die Elastizitatsverhaltnisse der Kristalle / W. Voigt // *Abh. Koniglichen Gesellschaft Wiss. Gottingen*. – 1887. – 34.
8. Cosserat, E. Theorie des corps deformables/ E. Cosserat, F. Cosserat. – Paris: A. Hermann et fils, 1909. – 226 p.
9. Gunlther, W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratchen Kontinuum / W. Gunlther // *Abh. Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft*. – 1958. – 10. – S. 195–213.
10. Ericksen, J.L. C.A. Exact theory of stress and strain in rods and shells / J.L. Ericksen, C.A. Truesdell // *Arch. Rat. Mech. Anal.* – 1958. – № 1. – P. 259–323.
11. Truesdell, C.A. The classical field theories / C.A. Truesdell, R.A. Toupin // *Handbuch der Physik*, Ed. by S. Flugge, Band 3, Teil 1, Berlin: Springer-Verlag, 1960. – P. 226–793.
12. Toupin, R.A. Elastic materials with couple stresses / R.A. Toupin // *Arch. Rat. Mech. Anal.* – 1962. – № 11. – P. 385–414.
13. Mechanics of generalized continua; proceedings of the IUTAM-symposium on the Generalized Cosserat Continuum and the Continuum Theory of Dislocations with Applications, Freudenstadt and Stuttgart (Germany) 1967. Editor: E. Kroner. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1968. – 358 p.
14. Аэро, Э.Л. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц / Э.Л. Аэро, Е.В. Кувшинский // *Физ. тверд. тела*. – 1960. – Т. 11. – Вып. 7. – С. 1399–1409.
15. Кувшинский, Е.В. Континуальная теория асимметрической упругости. Учет «внутреннего» вращения / Е.В. Кувшинский, Э.Л. Аэро // *Физ. тверд. тела*. – 1963. – Т. 5. – Вып. 9. – С. 2591–2598.
16. Аэро, Э.Л. Континуальная теория асимметрической упругости. Равновесие изотропного тела / Э.Л. Аэро, Е.В. Кувшинский // *Физ. тверд. тела*. – 1964. – Т. 6. – Вып. 9. – С. 2689–2699.
17. Эринген, А.К. Теория микрополярной упругости / А.К. Эринген // *Разрушение*. – М.: Мир. – 1975. – Т. 2. – С. 646–751.
18. Гриняев, Ю.В. Калибровочно-инвариантное описание деформации структурно-неоднородных сред / Ю.В. Гриняев // *Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов: В 2 т. Ред. В.Е.Панин*. – Новосибирск: Наука; Сиб. издат. фирма РАН, 1995. – Т. 1. – С. 102–112.
19. Eringen, A.C. Nonlinear theory of simple microelastic solids. Part I, II / A.C. Eringen, E.S. Suhubi // *Int. J. Eng. Sci.* – 1964. – Vol. 2 – P. 189–203, 389–404.
20. Green, A.E. Multipolar continuum mechanics / A.E. Green, R.S. Rivlin // *Arch. Ration. Mech. Anal.* – 1964. – Vol. 17. – P. 113–147.
21. Новацкий, В. Теория упругости/ В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
22. Миндлин, Р.Д. Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости / Р.Д. Миндлин, Г.Ф. Тирстен// *Механика*. – 1964. – Т. 86. – № 4. – С. 80–114.
23. Bazant, Z. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: Survey of progress / Z. Bazant, M. Jirasek // *J. Eng. Mech.* – 2002. – Vol. 128. – № 11. – P. 1119–1149.

24. Fleck, N.A. Strain gradient plasticity / N.A. Fleck, J.W. Hutchinson // *Adv. Appl. Mech.* – 1997. – Vol. 33. – P. 295–361.
25. Аэро, Э.Л. Существенно нелинейная микромеханика среды с изменяемой периодической структурой / Э.Л. Аэро // *Успехи мех.* – 2002. – № 3. – С 13—176.
26. De Borst, R. A generalization of J2-flow theory for polar continua / R. De Borst // *Comp. Meth. App. Mech. Eng.* – 1993. – Vol. 103. – P. 347–362.
27. Аэро, Э.Л. Асимметрическая гидромеханика / Э.Л. Аэро, А.Н. Булыгин, Е.В. Кувшинский // *Прикл. мат. и мех.* – 1965. – Т. 29. – № 2. – С. 297–308.
28. Аэро, Э.Л. Кинематика нематических жидких кристаллов / Э.Л. Аэро, А.Н. Булыгин // *Прикл. мех.* – 1972. – Т. 8. – № 3. – С. 97–105.
29. Lakes, R. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua / R. Lakes // *Continuum models for materials with microstructure*, Ed. H. Muhlhaus. – J. Wiley, N.Y. Ch. 1, 1995. – P. 1–22.
30. Forest, S. Elastoviscoplastic constitutive frameworks for generalized continua / S. Forest, R. Sievert // *Acta Mech.* – 2003. – Vol. 160. – P. 71–111.
31. Миндлин, Р.Д. Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений / Р.Д. Миндлин // *Механика.* – 1964. – Т.86. – № 4. – С.115–128.
32. Савин, Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – Киев: Наукова думка, 1968. – 887 с.
33. Кулеш, М.А. Построение и анализ точного аналитического решения задачи Кирша в рамках континуума и псевдоконтинуума Коссера / М.А. Кулеш, В.П. Матвеев, И.Н. Шардаков // *Прикл. мех. и техн. физ.* – 2001. – Т. 42. – № 4. – С. 145–154.
34. Neuber, H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua / H. Neuber // *Proc. 11th Int. Congr. Appl. Mech.* – Springer; 1965. – P. 153–158.
35. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений. Расчетно-теоретический. Кн.2. /под ред. А.А Уманского. – М.: Стройиздат, 1973. – 416 с.
36. Ванг, Дж. Ф. Экспериментальный и теоретический анализ пограничного слоя вблизи поверхности раздела двух материалов / Дж.Ф. Ванг, Ш.В. Ю, С. Дж. Пан // *Физ. мезомех.* – 2001. – Т. 4. – №. 3. – С. 57–61.
37. Бояндин, В.С. Конечный элемент для решения плоских и осесимметричных задач моментной теории упругости / В.С. Бояндин, А.Л. Козак // *Сопротивление матер. и теория сооруж.* –1991. – № 58. – С. 49–57.
38. Providas, E. Finite element method in plane Cosserat elasticity / E. Providas, M.A. Kattis // *Comp. Struct.* – 2002. – Vol. 80. – P. 2059–2069.
39. Forest, S. Cosserat modelling of size effects in the mechanical behaviour of polycrystals and multi-phase materials / S. Forest, F. Barbe, G. Cailletaud // *International Journal of Solids and Structures.* – 2000. – Vol. 37. –P. 7105–7126.
40. Tejchman, J. Dynamic patterning of shear bands in Cosserat continuum / J. Tejchman, W. Wu // *J. Eng. Mech.* – 1997. – Vol. 123. – № 2. – P. 123–133.
41. Gauthier, R.D. A quest for micropolar elastic constants. Part 1 / R.D. Gauthier, W.E. Jahsman // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1975. – Vol. – 97. – № 2. – P. 369–374.
42. Gauthier, R.D. A quest for micropolar elastic constants. Part 2 / R.D. Gauthier, W.E. Jahsman // *Arch. Mech.* – 1981. – Vol. – 33. – № 5. – P. 717–737.

43. Dendievel, R. An estimation of overall properties of heterogeneous Cosserat materials / R. Dendievel, S. Forest, G. Canova // *Mechanics of Materials with Intrinsic Length Scale: Physics, Experiments, Modelling and Applications. Proceedings of the conference held in Magdeburg, Germany, February, 23-26 1998.* Eds. A. Bertram, S. Forest, F. Sidoroff. – P. 104–111.
44. Корепанов, В.В. Численные и экспериментальные исследования в рамках несимметричной теории упругости / В.В. Корепанов [и др.] // *Итоги работы научно-образовательного центра «Неравновесные переходы в сплошных средах».* – Пермь: Изд-во Перм. гос. ун-та, 2004. – С. 83–85.
45. Павлов, И.С. Гранулированная среда с вращением частиц. Двумерная модель / И.С. Павлов // *Пробл. прочн. и пластич.* – 2003. – Вып. 65. – С. 53–64.
46. Ebinger, T. Modeling macroscopic extended continua with the aid of numerical homogenization schemes / T. Ebinger, H. Steeb, S. Diebles // *Comput. Mater. Sci.* – 2005. – Vol. 32. – 337–347.
47. De Borst, R. Simulation of strain localization: a reappraisal of the Cosserat continuum / R. De Borst // *Eng. Comput.* – 1991. – Vol. 8. – № 4. – P. 317–332.
48. Кукуджанов, В.Н. О структуре полос локализации деформации в нелокальной теории пластичности при динамическом нагружении / В.Н. Кукуджанов // *Изв. РАН. Мех. тверд. тела.* – 1998. – № 6. – С. 104–114.
49. Forest, S. Cosserat Media / S. Forest // *Encyclopedia of Materials: Science and Technology.* – Elsevier Sciences, 2001. – P. 1715–1718.
50. Грекова, Е.Ф. Уравнения нелинейных упругих полярных сред и аналогии: среда Кельвина, упругие оболочки и непроводящие ферромагнетики / Е.Ф. Грекова, П.А. Жилин // *Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.* – 2000. – Спецвыпуск. – С. 24–46.
51. Можен, Ж.. Механика электромагнитных сплошных сред/ Ж.. Можен. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
52. Смолин, И.Ю. О применении модели Коссера для описания пластического деформирования на мезоуровне / И.Ю. Смолин // *Физ. мезомех.* – 2005. – Т. 8. – № 3. – С. 49–62.
53. Smolin, I.Y. On Micropolar Approach to Continuum Simulation of Nanoparticles-Reinforced Composites Used In Naval and Maritime Industry / I.Y. Smolin [et al.] // *Proc. 11th Int. Conf. Composites/Nano Engineering (ICCE-11).* August 8-14, 2004. Hilton-Head Island, South Carolina, USA. – P. 689–691.
54. Козлов, Э.В. Структура и сопротивление деформированию ГЦК ультрамелкозернистых металлов и сплавов / Э.В. Козлов [и др.] // *Физ. мезомех.* – 2004. – Т. 7. – № 4. – С. 93-113.
55. Тюменцев, А.Н. Высокодефектные структурные состояния, поля локальных внутренних напряжений и кооперативные механизмы мезоуровня деформации и переориентации кристалла в наноструктурных металлических материалах / А.Н. Тюменцев, А.Д. Коротаев, Ю.П. Пинжин // *Физ. мезомех.* – 2004. – Т. 7. – № 4. – С. 35-53.

Получено 12.07.2006