

УДК 539.3

В.И. Ерофеев, О.А. Шешенина

Нижегородский филиал Института машиноведения РАН

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ И СДВИГОВЫЕ
СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ
В ГРАДИЕНТНО-УПРУГОЙ СРЕДЕ**

Abstract

The influence of geometrical nonlinearity on propagation of longitudinal and shear waves in gradient-elastic medium is being studied. It was shown that accounting of surface energy causes the breakdown of plane stationary waves.

Исследуемая градиентная теория упругости с поверхностной энергией, предложенная Вардолакисом и Георгиадисом [1], основывается на линейной теории упругости с микроструктурой Миндлина. Данная статья является продолжением ряда работ, направленных на изучение свойств волн [2–6], распространяющихся в градиентно-упругой среде.

В отличие от теории упругости Миндлина [7] здесь используется следующий постулат для функции плотности энергии деформации:

$$W = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{qq} \varepsilon_{rr} + \mu \varepsilon_{qr} \varepsilon_{rq} + \mu c (\partial_m \varepsilon_{qr}) (\partial_m \varepsilon_{rq}) + \mu b_m \partial_m (\varepsilon_{qr} \varepsilon_{rq}), \quad (1)$$

где λ и μ – стандартные постоянные Ламе, c , b – модули упругости градиентной среды, $b_m = b \vartheta_m$, $\vartheta_m \vartheta_m = 1$, ∂_m означает дифференцирование по координате x_m , ε_{qr} – компоненты тензора деформации, U_r – компоненты вектора перемещений \mathbf{U} , индексы q, r, m пробегают значения от 1 до 3.

Последний член в правой части равенства (1) относится к поверхностной энергии, поскольку в силу теоремы Гаусса–Остроградского он может быть записан в виде

$$\int_{\Omega} \partial_m (b_m \varepsilon_{qr} \varepsilon_{rq}) d\Omega = b \int_S (\varepsilon_{qr} \varepsilon_{rq}) (\vartheta_m n_m) dS,$$

где n_m – компоненты единичного вектора внешней нормали к поверхности S , ограничивающей объем Ω .

Согласно [8] поверхностная энергия – это избыток энергии поверхностного слоя на границе раздела фаз, обусловленная различием межмолекулярного взаимодействия в обеих фазах. Если поверхность является свободной, то роль второй фазы играет вакуум [9].

Математические модели структурированных сред с поверхностной энергией могут оказаться полезными при изучении акустических свойств материалов и элементов конструкций, у которых при эксплуатации образовались новые участки поверхности (например, при развитии трещин), или произошло сокращение поверхности при слипании (адгезии) различных тел. Указанные процессы приводят к изменению взаимного расположения атомов, влекущего за собой изменение поверхностной энергии и напряженно-деформированного состояния [9, 10].

Предполагается, что градиентный коэффициент c зависит от размеров структурных элементов:

$$c = (h/4)^2. \quad (2)$$

Для исследования влияния геометрической нелинейности на распространение волн используется точное выражение для компонент тензора деформации

$$\varepsilon_{qr} = (\partial_r U_q + \partial_q U_r + \partial_r U_m \partial_q U_m), \quad (r, q, m = \overline{1,3}). \quad (3)$$

Возникающие в среде симметричные напряжения и двойные напряжения определяются соответственно как:

$$\begin{aligned} \tau_{qr} &= \lambda \delta_{qr} \varepsilon_{mm} + 2\mu \varepsilon_{qr} + 2\mu b_m (\partial_m \varepsilon_{qr}), \\ \mu_{mqr} &= 2\mu \left[b_m \varepsilon_{qr} + c \varepsilon_{qr,m} + (b_m \varepsilon_{qm} + c \varepsilon_{qm,m}) U_{r,n} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Нелинейное уравнение движения в перемещениях в общем виде получить не удастся, поэтому в каждом частном случае его приходится находить отдельно.

Сначала исследуются продольные волновые движения, при которых частицы среды перемещаются в направлении движения самого возмущения. Выбирается направлением движения ось x_1 . Вектор перемещения исследуемого типа движений будет иметь вид $\mathbf{U} = (U_1(x_1, t), 0, 0)$.

Нелинейные продольные движения описываются следующим уравнением:

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu)U_{,1,1} - 2\mu c U_{,1,1,1,1} + I \ddot{U}_{,1,1} - \rho \ddot{U}_1 = \\ & = -\frac{\lambda + 2\mu}{2} (U_{,1,1}^2)_{,1} + 2\mu c (U_{,1,1}^2)_{,1,1} + 2\mu b_1 (U_{,1,1}^2)_{,1,1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Слагаемые с кубической нелинейностью в (5) отброшены, поскольку вносят меньший вклад в нелинейность, чем слагаемые с квадратичной нелинейностью. Предполагается также, что поверхностная энергия отсутствует, т.е. параметр, отвечающий за поверхностную энергию, равен нулю. Далее, вводя безразмерные переменные [6], можно показать, что в уравнении (5) первое нелинейное слагаемое более значимо, чем остальные нелинейные слагаемые. В результате достаточно исследовать сокращенное уравнение

$$c_l^2 U_{,1,1} - \frac{1}{8} h^2 c_\tau^2 U_{,1,1,1,1} + \frac{1}{3} h^2 \dot{U}_{,1,1} - \dot{U}_1 = -\frac{c_l^2}{2} (U_{,1,1}^2)_{,1}. \quad (6)$$

На распространение продольных волн, описываемых уравнением (6), будут влиять два фактора: дисперсия и нелинейность. При их взаимодействии могут формироваться стационарные волны, которые распространяются с постоянной скоростью и не меняют своего профиля. Решения будем искать в классе стационарных волн деформации

$u(\xi) = \frac{\partial U_1}{\partial \xi}$, где $\xi = x - Vt$ – бегущая координата, V – скорость стационарной волны, $V = \text{const}$. Продольная деформация в силу (6) будет

удовлетворять следующему уравнению:

$$(c_l^2 - V^2) u_\xi + \frac{1}{3} h^2 \left(V^2 - \frac{3}{8} c_\tau^2 \right) u_{\xi\xi\xi} + c_l^2 u u_\xi = 0. \quad (7)$$

Интегрируя последнее уравнение, можно получить первый интеграл

$$\frac{1}{2} u_\xi^2 = E - \frac{\alpha}{2} u^2 - \frac{\beta}{3} u^3, \quad (8)$$

где

$$\alpha = \frac{3(c_l^2 - V^2)}{h^2(V^2 - \frac{3}{8}c_\tau^2)}, \quad \beta = \frac{3c_l^2}{2h^2(V^2 - \frac{3}{8}c_\tau^2)}.$$

Полученное уравнение описывает колебания ангармонического осциллятора с квадратичной нелинейностью. Анализ данного дифференциального уравнения приведен в [11]. Здесь E – константа интегрирования, имеющая смысл начальной энергии системы. Уравнение (8) имеет ограниченные решения при условии, что все три корня ν_1, ν_2, ν_3 кубического полинома $E - f(\nu)$ являются вещественными. Предположим, что $\nu_3 \leq \nu_2 \leq \nu_1$. Исследование (8) зависит от знаков коэффициентов α и β , поэтому возможны три случая.

1. Пусть $\alpha > 0, \beta > 0$. Скорость стационарной волны в данном случае будет находиться в интервале $\left(\sqrt{\frac{3}{8}}c_\tau, c_l \right)$. Если $0 < E < \frac{\alpha^3}{6\beta^2}$, то стационарные волны являются периодическими кноидальными волнами. В данном случае решение уравнения (8) будет выглядеть следующим образом:

$$\nu(\xi) = \frac{A}{3s^2} \left(1 + s^2 - \sqrt{1 - s^2 + s^4} \right) - A \operatorname{sn}^2 \left(\frac{k_0}{2} \xi, s \right), \quad (9)$$

$$A = \frac{3\alpha}{2\beta} \frac{s^2}{\sqrt{1 - s^2 + s^4}}, \quad k_0^2 = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - s^2 + s^4}}, \quad s^2 = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 - \nu_3},$$

где A – амплитуда колебаний, s – модуль эллиптической функции, определяющий степень искажения формы колебаний $\nu(\xi)$ по сравнению с синусоидальной, k_0 – аналог волнового числа. Длина волны $\Lambda = \frac{4\mathbf{K}(s)}{k_0}$, где $\mathbf{K}(s)$ означает здесь и далее полный эллиптический интеграл первого рода.

Зависимости амплитуды и «волнового числа» периодической волны от ее скорости и коэффициента нелинейных искажений приведены на рис. 1, a, b соответственно. Как видно из графиков, при фиксированном значении s амплитуда стационарной волны и «волновое число» уменьшаются с увеличением ее скорости. При стремлении скорости стационарной волны к c_l сама волна пропадает.

Если $V \rightarrow \sqrt{\frac{3}{8}}c_\tau$, то «волновое число» стремится к бесконечности.

При фиксированной скорости стационарной волны ее амплитуда

возрастает при увеличении коэффициента нелинейных искажений, причем чем меньше скорость, тем нарастание происходит быстрее. В зависимости от s изменение «волнового числа» незначительно.

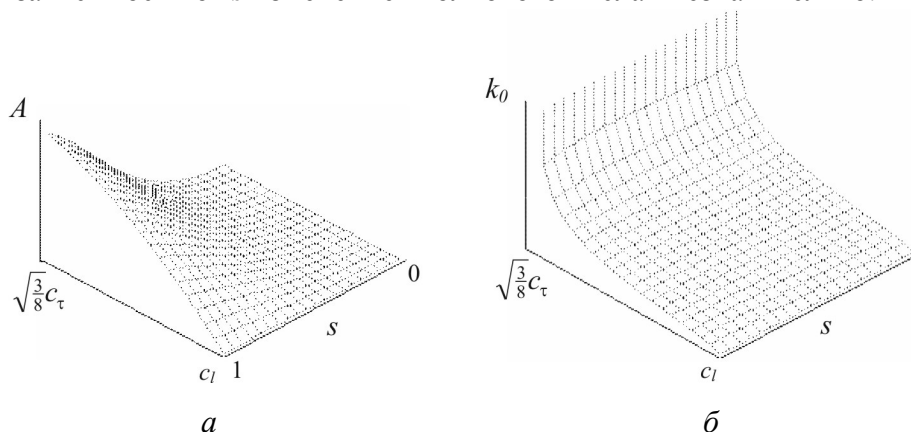


Рис. 1. Зависимости амплитуды (а) и «волнового числа» (б) периодической волны от ее скорости и коэффициента нелинейных искажений

2. При $\alpha < 0$, $\beta > 0$ скорость стационарной волны удовлетворяет следующему неравенству: $V > c_l$. В данном случае возможно лишь солитонное решение, соответствующее нулевому значению начальной энергии системы. Оно существует в интервале $v_3 = v_2 \leq v \leq v_1$ и выглядит следующим образом:

$$v(\xi) = \frac{A^*}{\text{ch}^2(\xi/\Delta)}, \quad (10)$$

$$A^* = v_1 - v_2 = -\frac{3\alpha}{2\beta}, \quad \Delta = \sqrt{\frac{6}{\beta(v_1 - v_2)}} = \frac{2}{\sqrt{-\alpha}},$$

где A^* – амплитуда локализованного движения, Δ – его ширина.

Из соотношений (10) получаем, что амплитуда солитона однозначно определяется его скоростью при фиксированных λ, μ, ρ . В свою очередь скорость уединенной волны зависит от Δ и h .

На рис. 2, а отображена зависимость амплитуды от ширины солитона при фиксированном размере зерна:

$$A = \frac{3h^2(8c_l^2 - 3c_\tau^2)}{c_l^2(8h^2 - 6\Delta^2)}.$$

Ниже записана зависимость ширины локализованного движения от его скорости и размера зерна, которая приведена на рис. 2, б.

$$\Delta^2 = \frac{4h^2(V^2 - 3/8c_t^2)}{3(V^2 - c_l^2)}.$$

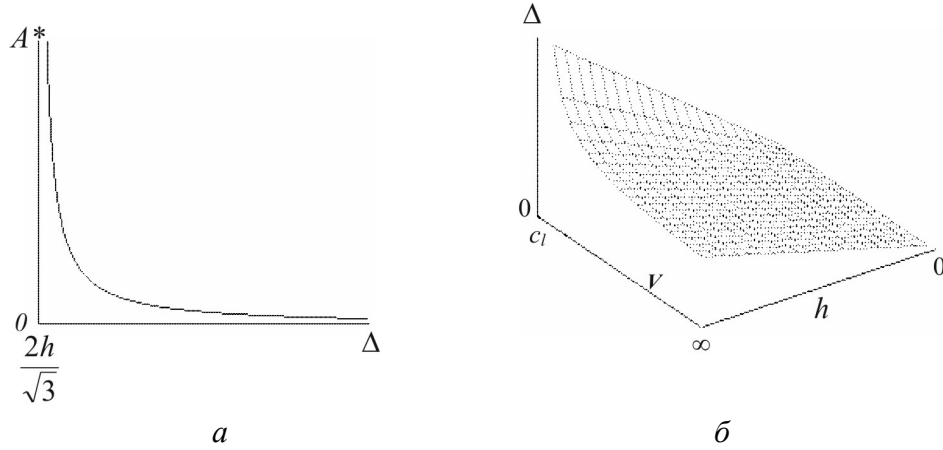


Рис. 2. Зависимости: амплитуды от ширины солитона при фиксированном размере зерна (а), ширины локализованного движения от его скорости и размера зерна (б)

Поведение солитона является классическим, поскольку волна большей амплитуды имеет меньшую ширину и распространяется с большей скоростью. Минимальное значение $\Delta = \frac{2h}{\sqrt{3}}$ достигается при неограниченном росте скорости солитона.

Из последнего соотношения можно отметить линейную зависимость ширины солитона от h . При стремлении скорости уединенной волны к скорости продольной волны без учета микроструктуры амплитуда солитона стремится к нулю, а его ширина – к бесконечности.

3. Пусть $\alpha < 0$, $\beta < 0$. В этом случае стационарная волна распространяется со скоростью $V < \sqrt{\frac{3}{8}}c_t$. Как и в предыдущем случае, рассматривается только солитон, который появляется при максимальном значении начальной энергии системы, $E = E_{\max} = 0$. Два наибольших корня полинома $E - f(v)$ совпадают, поэтому v нахо-

дится в интервале $(v_3; v_1)$. В данном случае решение уравнения (8) выглядит следующим образом:

$$v(\xi) = -\frac{A^*}{\text{ch}^2(\xi/\Delta)}, \quad (11)$$

где

$$A^* = -v_3 = \frac{3\alpha}{2\beta}, \quad \Delta = \sqrt{\frac{6}{\beta v_3}} = \frac{2}{\sqrt{-\alpha}}.$$

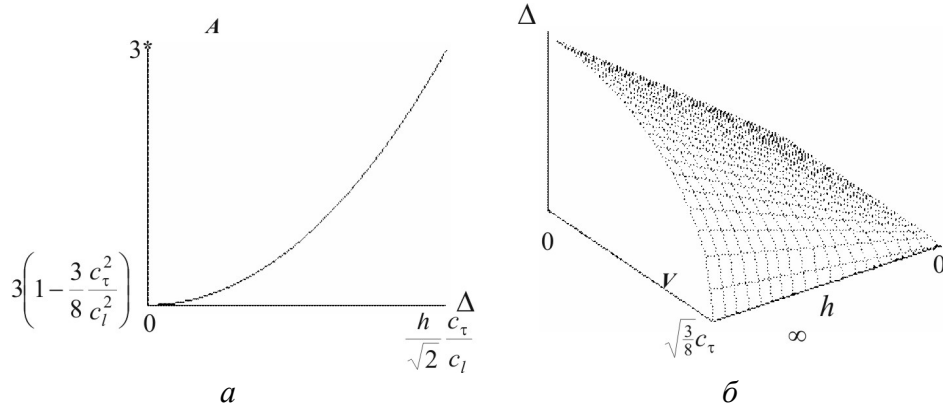


Рис. 3. Зависимости: амплитуды от ширины солитона при фиксированном размере зерна (а); ширины локализованного движения от его скорости и размера зерна для аномального поведения солитона (б)

Качественный вид (11) представлен на рис. 3.

Аналогично предыдущему случаю зависимость амплитуды уединенной волны от ее ширины определяется через скорость солитона,

$$A^* = \frac{3(c_l^2 - V^2)}{c_l^2}, \quad \Delta^2 = \frac{4h^2(3/8c_\tau^2 - V^2)}{3(c_l^2 - V^2)}.$$

На рис. 3, а, б представлены те же зависимости, что и для предыдущего случая. В данном случае поведение солитона является аномальным, поскольку при уменьшении амплитуды происходит уменьшение ширины локализованного движения. При $V \rightarrow \sqrt{\frac{3}{8}}c_\tau$ ширина солитона уменьшается до нуля.

При продольной деформации со стационарной скоростью, которая находится в интервале $\left(0, \sqrt{\frac{3}{8}}c_\tau\right)$, может распространяться аномальный солитон. Кноидальные волны двигаются со стационарной скоростью $V \in \left(\sqrt{\frac{3}{8}}c_\tau, c_l\right)$. Для классического солитона выполняется $V > c_l$.

Построение фазовых портретов возможно для уравнения (5) с учетом всех нелинейных слагаемых. Учет слагаемых с коэффициентом b вносит неконсервативность в систему. Особые точки типа «центр» преобразуются в «фокусы», причем чем больше коэффициент, отвечающий за поверхностную энергию, тем быстрее фазовые траектории попадают в особую точку. Сепаратрисы «седел» также видоизменяются, что приводит к разрушению солитонов. Можно сказать, что если коэффициент b равен нулю и не влияет на среду, то в ней возможны стационарные волны деформации. В противном случае их нет.

Далее рассмотрим влияние геометрической нелинейности на поперечные движения. Вектор перемещения для вертикально поляризованных движений имеет вид $\mathbf{U} = (0, U_2(x_1, t), 0)$. Было получено следующее уравнение, описывающее нелинейные плоские поперечные движения:

$$\begin{aligned} \mu U_{2,11} - \mu c U_{2,1111} + I \dot{U}_{2,11} - \rho \ddot{U}_2 = \\ = \frac{2}{3} \mu c (U_{2,1}^3)_{,111} + \mu b_1 (U_{2,1}^3)_{,11}. \end{aligned} \quad (12)$$

Дисперсия и нелинейность уравнения (12) (как и в предыдущем случае) могут привести к образованию стационарных волн. Дальнейшее исследование направлено на поиск волновых движений, распространяющихся с постоянной скоростью и не меняющих своего профиля. Допустим, что искомые волны существуют. Тогда вертикально поляризованная компонента вектора перемещения есть функция, зависящая только от бегущей координаты $\xi = x - Vt$, где $V = \text{const}$ – скорость стационарной волны $U_2(x_1, t) = U_2(\xi)$. Подставляя последнее выражение в (12), интегрируя по переменной ξ и обо-

значая $v(\xi) = \frac{\partial U_2}{\partial \xi}$, получим уравнение, описывающее стационарные волны деформации:

$$(IV^2 - \mu c - 2\mu c v^2) v_{\xi\xi} + (\mu - \rho V^2) v - 4\mu c v v_{\xi}^2 - 3\mu b_1 v^2 v_{\xi} = 0. \quad (13)$$

Полученное уравнение в общем виде решить не удастся. Однако возможно его разрешение при $b_1 = 0$, т.е. когда поверхностная энергия не учитывается. В этом случае (13) разделим на $IV^2 - \mu c$ и запишем в виде

$$(1 - \beta v^2) v_{\xi\xi} + \alpha v - 2\beta v v_{\xi}^2 = 0, \quad (14)$$

где

$$\beta = \frac{2\mu c}{IV^2 - \mu c}, \quad \alpha = \frac{\mu - \rho V^2}{IV^2 - \mu c}.$$

Выражая градиентный коэффициент c через h и деля на ρ числитель и знаменатель у коэффициентов α, β , получим

$$\beta = \frac{3c_{\tau}^2}{8\left(V^2 - \frac{3}{16}c_{\tau}^2\right)}, \quad \alpha = \frac{3(c_{\tau}^2 - V^2)}{h^2\left(V^2 - \frac{3}{16}c_{\tau}^2\right)}. \quad (15)$$

Разделив (14) на коэффициент $1 - \beta v^2$ перед старшей производной, уравнение, описывающее стационарные волны деформации, запишем в виде

$$v_{\xi\xi} + \frac{\alpha}{1 - \beta v^2} v - \frac{2\beta}{1 - \beta v^2} v v_{\xi}^2 = 0. \quad (16)$$

Предполагаем, что нелинейность оказывает слабое влияние на скорость стационарной волны, поэтому считаем V и c_{τ} одного порядка. Следовательно, коэффициент β имеет порядок единицы, а α порядок $\frac{1}{h^2}$. Деформация v – величина малая, поэтому $\frac{1}{1 - \beta v^2}$ можно разложить в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{1 - \beta v^2} = 1 + \beta v^2 + o(v^2), \quad |\beta v^2| < 1. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (16) и опуская нелинейное слагаемое пятого порядка, получим

$$v_{\xi\xi} + \alpha v + \alpha\beta v^3 - 2\beta v v_{\xi}^2 = 0. \quad (18)$$

Обращая внимание на порядок коэффициентов α и β , заключаем, что последнее нелинейное слагаемое в (18) имеет наименьшее значение, поэтому его также опускаем. В результате получаем, что сдвиговые стационарные волны деформации описываются уравнением Дуффинга

$$v_{\xi\xi} + \alpha v + \alpha\beta v^3 = 0, \quad (19)$$

исследование которого приведено, например, в [11]. Уравнение (19) имеет первый интеграл

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dv}{d\xi} \right)^2 = E - \frac{\alpha}{2} v^2 - \frac{\alpha\beta}{4} v^4. \quad (20)$$

Константа интегрирования E имеет смысл начальной энергии, а функция $f(v) = \frac{\alpha}{2} v^2 + \frac{\alpha\beta}{4} v^4$ – потенциальной энергии. Последнее уравнение имеет ограниченные решения в области между любыми действительными корнями полинома $E - f(v)$, где $E - f(v) > 0$. Вид решения зависит от знаков коэффициентов α и β и начальной энергии E .

1. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Значения коэффициентов α и β будут положительными, если скорость стационарной волны удовлетворяет неравенству $\frac{\sqrt{3}}{4} c_{\tau} < V < c_{\tau}$. Ограниченные решения уравнения (20) существуют при $0 < E < \infty$. Необходимо также учитывать ограничения на $v(\xi)$ (17). Решение, описывающее нелинейные периодические колебания, имеет вид

$$v(\xi) = A \operatorname{cn}(k_0 \xi, s), \quad (21)$$

где

$$A = \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha\beta E}}{\alpha\beta}}, \quad k_0 = (\alpha^2 + 4\alpha\beta E)^{\frac{1}{4}},$$

$$s^2 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha\beta E}}{2\sqrt{\alpha^2 + 4\alpha\beta E}}.$$

Здесь A – амплитуда колебаний, k_0 – аналог волнового числа, s – модуль эллиптической функции, имеющий смысл коэффициента нелинейных искажений формы колебаний $v(\xi)$, который находится в интервале $0 \leq s^2 < 1/2$. Длина волны $\Lambda = \frac{4\mathbf{K}(s)}{k_0}$.

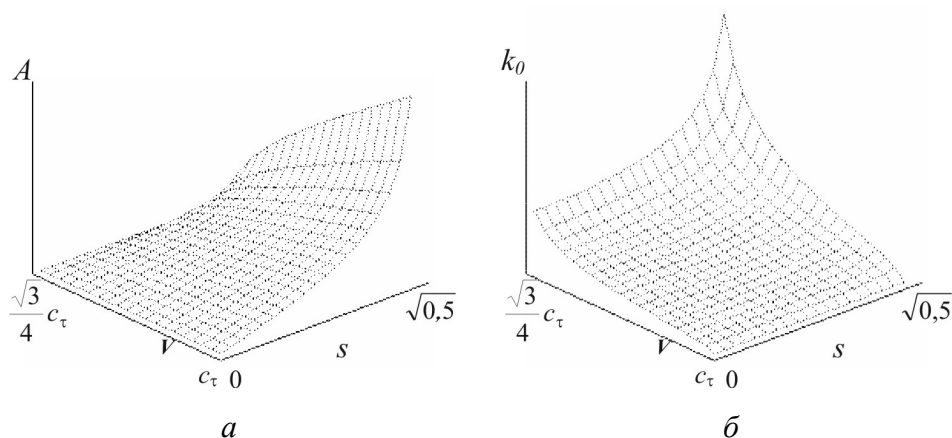


Рис. 4. Качественные зависимости амплитуды (а) и «волнового числа» (б) нелинейных периодических движений от их скорости и коэффициента нелинейных искажений

Качественные зависимости амплитуды и «волнового числа» нелинейных периодических движений от их скорости и коэффициента нелинейных искажений представлены на рис. 4, а, б соответственно. При постоянном значении s амплитуда стационарных волн увеличивается с ростом скорости, а аналог волнового числа уменьшается. При фиксированной скорости стационарных волн как амплитуда, так и «волновое число» увеличиваются с ростом коэффициента нелинейных искажений, причем стремятся к бесконечности при $s^2 \rightarrow 0,5$.

2. Пусть $\alpha < 0$, $\beta < 0$. В этом случае скорость стационарной волны должна быть меньше $\frac{\sqrt{3}}{4}c_\tau$. Но предполагаемые ограниченные решения отвергает ограничение $|\beta v^2| < 1$. Поэтому в исследуемом диапазоне скоростей стационарных волн нет.

3. При $\alpha < 0$, $\beta > 0$ уравнение Дуффинга не имеет ограниченных периодических движений. Поэтому в случае $V > c_\tau$ также стационарных волн нет.

Итак, при нулевом значении параметра b_d стационарные квазипериодические движения могут распространяться со скоростью $\frac{\sqrt{3}}{4}c_\tau < V < c_\tau$. В этом случае построение фазовых портретов возможно и тогда, когда параметр, отвечающий за поверхностную энергию, не равен нулю. Наличие b_d приводит к превращению особой точки типа «центр» в особую точку типа «фокус», что приводит к разрушению стационарной волны. В градиентно-упругой среде с поверхностной энергией в случае $b_d \neq 0$ стационарных сдвиговых волн нет.

Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06–02–17158, № 06–08–00520).

Библиографический список

1. Vardoulakis I.G. SH Surface Waves In a Homogeneous Gradient-Elastic Half-Space with Surface Energy / I.G. Vardoulakis, H.G. Georgiadis // J. Elasticity. – 1997. – Vol. 47. – P. 147–165.
2. Ерофеев В.И. Поверхностные сдвиговые волны в однородном градиентно-упругом полупространстве с поверхностной энергией / В.И. Ерофеев, О.А. Шешенина, Х. Георгеадис // Вестник ННГУ. Серия «Механика». – 2002. – Вып. 1 (4). – С. 58–71.
3. Ерофеев В.И. Волны в градиентно-упругой среде с поверхностной энергией / В.И. Ерофеев, О.А. Шешенина // Математическое моделирование систем и процессов: сборник научных трудов / Перм. гос. техн. ун-т. – Пермь, 2002. – № 10. – С. 32–41.
4. Ерофеев В.И. Сдвиговые горизонтальные волны в слое градиентно-упругого материала с поверхностной энергией / В.И. Ерофеев, О.А. Шешенина // Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2003. – Вып. 65. – С. 29–35.
5. Ерофеев В.И. Отражение сдвиговых горизонтальных движений от свободной границы однородного градиентно-упругого полупространства с поверхностной энергией / В.И. Ерофеев, О.А. Шеше-

нина // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2004. – Т. 10. – № 2. – С. 173–187.

6. Ерофеев В.И. Дисперсионные характеристики волн, распространяющихся в градиентно-упругой среде с поверхностной энергией / В.И. Ерофеев, О.А. Шешенина // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 69. – № 1. – С. 61–74.

7. Миндлин Р.Д. Микроструктура в линейной теории упругости / Р.Д. Миндлин // Механика: сб. пер. – 1964. – № 4 (86). – С. 129–160.

8. Физический энциклопедический словарь. Т. 4. / гл. ред.: Б.А. Введенский, Б.М. Вил. – М.: Советская энциклопедия, 1965. – 592 с.

9. Шоркин В.С. Вариант описания адгезии с помощью теории упругости материалов второго порядка / В.С. Шоркин // Прикладная механика и технологии машиностроения: сб. научн. тр. – Н. Новгород: Интелсервис, 2005. – Вып. 1 (8). – С. 31–37.

10. Основы теории межфазного слоя / И.Ф. Образцов [и др.] // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2004. – Т. 10. – № 4. – С. 596–612.

11. Ерофеев В.И. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность / В.И. Ерофеев, В.В. Кажаяев, Н.П. Семерикова. – М.: Наука, Физматлит, 2002. – 208 с.

Получено 30.06.07