

УДК 539.3

А.В. Зайцев, Я.К. Покатаев

Пермский государственный технический университет

**НОВЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МОМЕНТНЫХ
ФУНКЦИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА СЛУЧАЙНОЙ
СТРУКТУРЫ ПОЛИМЕРБЕТОНОВ**

Abstract

Analytical relationships in a finite number form for the correlation functions of second order for random-structure particle-reinforced composites are obtained on the basis of a new approach to defining geometric probabilities. Analytical relationships for derivatives of these functions at the points corresponding to zero values of arguments are presented and analysed.

Полимербетоны – дисперсно-упрочненные композиты на основе полиэфирных смол (которые сами являются композитами, наполненными молотым известняком, кварцевым песком мраморной, диабазовой мукой или цементом), армированных диабазовым, мраморным или гранитным щебнем.

В настоящее время происходит интенсивное внедрение композитов с минеральными наполнителями (полимербетонов, пластбетонов и армополимербетонов) в гражданское и дорожное строительство (в том числе при реставрации памятников архитектуры), химическое производство (реагентопроводы и емкости для хранения и транспортировки агрессивных жидкостей) благодаря высоким технологичности и прочности, химической стойкости в различных агрессивных средах и адгезии к металлам, древесине, цементобетону, а также отсутствию коррозии и малому удельному весу – преимуществам, которые имеют эти материалы по сравнению с изготовленными на портландцементе бетонами. Конструкционные полимербетоны остаются сравнительно новым классом композитов, несмотря на то, что исследования этих материалов проводятся уже более 30 лет; разрабатываются новые, более совершенные композиции, накапливается опыт промышленного производства изделий и конструкций, обобща-

ются результаты механического поведения в различных условиях эксплуатации.

Еще одна отличительная особенность полимербетонов – высокая (достигающая 0,9) степень наполнения этих композитов минеральными частицами (для сравнения: содержание наполнителя в выпускаемых промышленностью пластмассах изменяется в зависимости от функционального назначения в пределах от 0,1 до 0,4, а объемное наполнение конструкционных сферопластиков, как правило, не превышает 0,6–0,7), размер, форма и взаимное расположение которых случайны [1]. Последнее является следствием технологических режимов получения этих материалов (смешение включений со связующим, температурно-временные режимы отверждения и прессования).

В настоящее время большинство исследователей обращают внимание на экспериментальное и теоретическое определение кратковременной и длительной ползучести полиэфирных связующих и полимербетонов (в том числе при циклическом нагружении) [1, 2], на их долговечность, структуру и свойства межфазных слоев [3–5], сорбционные свойства композита [6, 7]. Ограниченное число работ посвящено экспериментальному определению модулей Юнга, коэффициентов Пуассона и модулей объемного сжатия (или их аналогов при неупругом деформировании) в опытах на сжатие и изгиб [1, 6] сухих и влажных (после двухлетней выдержки в воде) образцов. Авторы, занимающиеся прогнозированием эффективных упругих модулей полимербетонов, используют аналитические решения, полученные в рамках полидисперсных и трехфазных моделей для дисперсно-упрочненных композитов с изотропными элементами структуры, отмечая при этом отсутствие удовлетворительного согласования с данными экспериментов [3–5]. Минеральные наполнители имеют ярко выраженную анизотропию свойств, что предопределяет необходимость обобщения разработанных ранее моделей. В работе [8] получены точные выражения (в полидисперсном приближении) для эффективных модулей объемного сжатия полиэфирных связующих, наполненных мраморной мукой, и полимербетонов на их основе, показавшие хорошее совпадение с экспериментальными результатами авторов [3].

В перечисленных выше подходах недостаточно внимания уделяется случайным структурам. Авторы [9], занимающиеся разработ-

кой моделей деформирования и разрушения многофазных полимербетон с упругохрупкими компонентами, отмечают большую трудоемкость описания механического поведения этих материалов с учетом их реальной стохастической структуры. Однако именно эта неоднородная случайная структура является одним из важнейших факторов, предопределяющих закономерности неупругого деформирования и разрушение дисперсно-упрочненных композитов с минеральным наполнителем при нагружении.

Рассмотрим геометрическое описание структуры полимербетона. Пусть неоднородное тело Ω состоит из двух взаимно непроникающих фаз: $\Omega_f = \bigcup_i \omega_f^{(i)}$ – армирующего наполнителя и $\Omega_m = \Omega \setminus \Omega_f$ – матрицы ($\Omega = \Omega_f \cup \Omega_m$, $\Omega_f \cap \Omega_m = \emptyset$). Для описания геометрии тела Ω необходимо задать форму и закон взаимного расположения областей $\omega_f^{(i)}$. Если предположить, что эти области $\omega_f^{(i)}$ имеют одинаковую форму в виде сплошных или полых сфер (диаметры которых D и минимальные расстояния между ними d являются детерминированными или случайными, распределенными по заданным статистическим законам), то геометрическая модель тела Ω будет соответствовать дисперсно-упрочненному композиту матричного типа. Минимальное расстояние между частицами армирующего наполнителя существенно зависит от режимов прессования, состава и свойств адгезионных покрытий, наносимых на поверхность включений, и объемного наполнения полимербетона.

Модельные случайные пространственные плотноупакованные структуры полимербетон будем синтезировать при помощи разработанных ранее алгоритмов [10]. При генерации структур координаты центров размещаемых внутри фрагмента армирующих элементов будем описывать равномерным, а минимальные расстояния между включениями $d \in [d_{\min}, d_{\max}]$ и их диаметры $D \in [D_{\min}, D_{\max}]$ – нормальным и логнормальным законами, ограниченными слева значениями d_{\min} и $D_{\min} = \langle D \rangle / 2$, считая неизменным отношение $\langle D \rangle / L = 0,05$ ($\langle D \rangle$ – средний диаметр включений, L – характерный размер фрагмента) и не исключая возможность соприкосновения частиц.

Прогнозирование эффективных деформационных свойств и определение статистических характеристик случайных полей напряжений

и деформаций в компонентах полимербетона связаны с необходимостью решения стохастически нелинейных краевых задач, для построения приближенных решений которых требуются описывающие многочастичное взаимодействие в системе армирующих элементов условные и безусловные моментные функции различных порядков [11].

Пусть $\lambda(\mathbf{r})$ – случайная кусочно-однородная индикаторная функция:

$$\lambda(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in \Omega_f; \\ 0, & \mathbf{r} \in \Omega_m. \end{cases}$$

Тогда математическое ожидание

$$K_\lambda^{(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \lambda^\circ(\mathbf{r}_1) \lambda^\circ(\mathbf{r}_2) \dots \lambda^\circ(\mathbf{r}_n) \rangle$$

произведения пульсаций $\lambda^\circ(\mathbf{r}) = \lambda(\mathbf{r}) - v_f$ ($v_f = \langle \lambda(\mathbf{r}) \rangle$ – объемная доля включений), определенных в отличных друг от друга точках $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots$ и \mathbf{r}_n , является безусловной n – точечной моментной функцией случайной структуры полимербетона порядка n . Условные и безусловные моментные функции определяют степень усредненного многоточечного взаимодействия в ансамбле включений. Кроме того, безусловные моментные функции второго порядка описывают характер упорядоченности между соседними и удаленными друг от друга армирующими элементами; третьего порядка учитывают форму, а четвертого – позволяют установить, как группируются частицы наполнителя [12].

«Традиционный», основанный на условных вероятностях метод построения многоточечных моментных функций, который был ранее использован для обработки микрошлифов металлов [13], стеклопластиков [11] и сферопластиков [14], связан с построением вспомогательных координатных сеток, определением принадлежности каждого узла этих сеток одной из фаз материала. Так, например, обозначив $\text{Prob}(\gamma)$ вероятность события γ , можно преобразовать первое слагаемое двухточечного момента второго порядка

$$K_\lambda^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv \langle \lambda^\circ(\mathbf{r}_1) \lambda^\circ(\mathbf{r}_2) \rangle = \langle \lambda(\mathbf{r}_1) \lambda(\mathbf{r}_2) \rangle - v_f^2 \quad (1)$$

следующим образом [11, 13]:

$$\langle \lambda(\mathbf{r}_1)\lambda(\mathbf{r}_2) \rangle = \text{Prob}(\mathbf{r}_1 \in \Omega_f / \mathbf{r}_2 \in \Omega_f) v_f \cong v_f \alpha / \beta, \quad (2)$$

где α и β – число событий $\mathbf{r}_1 \in \Omega_f \wedge \mathbf{r}_2 \in \Omega_f$ и $\mathbf{r}_1 \in \Omega_f$ соответственно. Аналогичным образом через условные вероятности могут быть записаны моменты более высоких порядков случайной структуры полимербетона.

При анализе каждого фрагмента случайной структуры необходимо, чтобы получаемые результаты ни качественно, ни количественно не зависели от шага вспомогательной сетки. Это достигается благодаря уменьшению шага и приводит к значительным временным, аппаратным и программным затратам при определении принадлежности каждой точки \mathbf{r}_k одной из фаз материала. Поэтому возникает потребность в существенной модификации и/или разработке новых методов построения условных и безусловных многоточечных моментных функций произвольного порядка случайной структуры композиционных материалов.

В работе [15] предложен новый геометрический подход к определению условных вероятностей, который позволил получить аналитические выражения в виде рядов с конечным числом членов для безусловных статистических моментных функций второго порядка случайной структуры композитов с волокнами произвольного поперечного сечения. Обобщим этот подход на новый класс неоднородных двухфазных материалов – дисперсно-упрочненные композиты.

Определение 1. Следуя [15], назовем *прообразом* условно неподвижный фрагмент, представляющий конкретную реализацию реальной или модельной случайной структуры полимербетона.

Определение 2. Фрагмент, геометрически идентичный прообразу, над которым могут быть осуществлены преобразования трансляции и произвольного пространственного разворота как жесткого целого, назовем *образом* случайной структуры дисперсно-упрочненного композита.

На рис. 1 представлено сечение прообраза $\hat{\Omega}$ случайной структуры полимербетона, содержащее N включений, и сечение образа $\hat{\Omega}'$, полученное в результате параллельного переноса $\hat{\Omega}$ на расстояние, определяемое вектором $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, направляющие косинусы которого относительно неподвижной, связанной с $\hat{\Omega}$ системы координат равны n_1, n_2 и n_3 ($n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$).

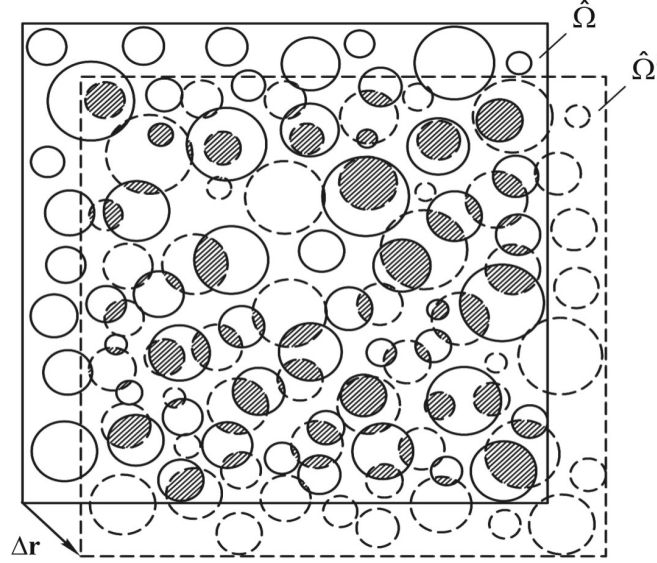


Рис. 1. Геометрический смысл функций $\text{Prob}(\mathbf{r}_1 \in \Omega_f / \mathbf{r}_2 \in \Omega_f)$

Лемма. Геометрическим смыслом условной вероятности $\text{Prob}(\mathbf{r}_1 \in \Omega_f / \mathbf{r}_2 \in \Omega_f)$ является отношение меры $\text{mes} \Omega_f \cap \Omega'_f$ пересечения множеств точек Ω_f и Ω'_f , принадлежащих включениям прообраза $\hat{\Omega}$ и образа $\hat{\Omega}'$ соответственно, к мере множества Ω_f ($\text{mes} \Omega_f = v_f \text{mes} \hat{\Omega}$):

$$\begin{aligned} \text{Prob}(\mathbf{r}_1 \in \Omega_f | \mathbf{r}_2 \in \Omega_f) &= \frac{\text{mes} \Omega_f \cap \Omega'_f}{\text{mes} \Omega_f} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \text{mes} \Omega_i \cap \Omega'_j}{\sum_{i=1}^N \text{mes} \Omega_i} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \text{mes} \Omega_i \cap \Omega'_j}{v_f \text{mes} \hat{\Omega}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\Omega_i \subset \Omega_f$ и $\Omega'_j \subset \Omega'_f$ – армирующие элементы, принадлежащие $\hat{\Omega}$ и $\hat{\Omega}'$.

Необходимым и достаточным условием ненулевого пересечения включений, принадлежащих образу и прообразу, является одновременное выполнение неравенств:

$$R < r_i + r_j, \quad r_i < R + r_j, \quad r_j < R + r_i, \quad R \leq D_{\min}. \quad (4)$$

Здесь и далее $R \equiv |\Delta \mathbf{r}|$. Нарушение первого неравенства (4) свидетельствует об отсутствии пересечения $\Omega_i \subset \Omega_f$ и $\Omega'_j \subset \Omega'_f$, невыполнение второго и третьего неравенств – нахождению Ω'_j внутри Ω_i и Ω_i внутри Ω'_j соответственно. Замена знаков строгих неравенств на нестрогие соответствует внешнему касанию.

Решение вспомогательных геометрической задач о взаимном пересечении двух сфер радиусами r_i и r_j , представленных в приложении, позволяет с использованием полученных выражений (П 2) определить меры пересечения $\text{mes } \Omega_f \cap \Omega'_f$ множеств армирующих элементов, принадлежащих образу и прообразу, следующим образом:

$$\text{mes } \Omega_i \cap \Omega'_j = \begin{cases} 0, & d_{ij} \geq r_i + r_j ; \\ \frac{4}{3} \pi r_i^3, & r_j \geq d_{ij} + r_i ; \\ \frac{4}{3} \pi r_j^3, & r_i \geq d_{ij} + r_j ; \\ \kappa, & (d_{ij} < r_i + r_j) \wedge (r_j < d_{ij} + r_i) \wedge (r_i < d_{ij} + r_j) , \end{cases} \quad (5)$$

$$\kappa = \frac{\pi}{3} \left\{ 2(r_i^3 + r_j^3) - d_{ij}(r_i^2 + r_j^2) - \frac{1}{d_{ij}} \left[(r_i^2 - r_j^2)^2 - 4p(p - r_i)(p - r_j)(p - d_{ij}) \right] \right\},$$

$$p = \frac{1}{2}(r_i + r_j + d_{ij}),$$

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j - Rn_1)^2 + (y_i - y_j - Rn_2)^2 + (z_i - z_j - Rn_3)^2} .$$

Здесь x_i, y_i и z_i, x_j, y_j и z_j – координаты центров сферических включений $\Omega_i \subset \Omega_f$ и $\Omega'_j \subset \Omega'_f$, радиусы которых равны r_i и r_j соответственно.

Таким образом, при помощи соотношения (5) вычисляются все слагаемые выражения (3) для условных вероятностей. Следовательно, для двухточечных моментных функций второго порядка случайной структуры полимербетона справедливо аналитическое представление в виде ряда

$$K_\lambda^{(2)}(R, \varphi) = \frac{1}{\text{mes } \hat{\Omega}} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \text{mes } \Omega_i \cap \Omega'_j - v_f \right) \quad (6)$$

с конечным числом членов, равным количеству частиц армирующего наполнителя N в исследуемом фрагменте. Здесь φ – угол, определяющий ориентацию вектора $\Delta \mathbf{r}$ относительно неподвижной системы координат, связанной с прообразом $\hat{\Omega}$. Обратим внимание на то, что вместо радиус-векторов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 аргументами моментной функции являются $R \equiv |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ и φ . Механический смысл этих аргументов очевиден: независимость $K_\lambda^{(2)}$ от φ будет свидетельствовать о статистической изотропии случайного поля структуры внутри некоторой области (если ее характерный размер ограничен, это будет свидетельствовать о локальной статистической изотропии [16]), независимость от R – об инвариантности двухточечного момента $K_\lambda^{(2)}$ относительно параллельного переноса точек \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , которая одновременно с условием постоянства $\langle \lambda(\mathbf{r}) \rangle \equiv v_f$ является признаком статистической однородности полей структуры $\lambda(\mathbf{r})$ в широком смысле [11]. Отметим также, что последнее условие заранее не постулировалось.

Преимуществом выражения (6) является возможность аналитического построения $K_\lambda^{(2)}(R, \varphi)$, получения из анализа условий сходимости рядов (6) информации о характере затухания, а также определения асимптот, вокруг которых происходит осцилляция моментных функций второго порядка по пределам (если они существуют), к которым стремятся эти последовательности. Кроме того, анализ знаков слагаемых, входящих в соотношения (6), позволяет также определить наличие или отсутствие периодических (квазидетерминированных [16]) составляющих в случайных полях структуры полимербетонов.

При построении приближенных решений нелинейных стохастических краевых задач для матричных материалов с эллипсоидальными и сферическими включениями используются различные (но не вполне обоснованные) гипотезы о характере многочастичного (в частном случае – парного) взаимодействия в ансамбле частиц армирующего наполнителя (например, предельная локальность [11]) и аппроксимации условных и безусловных моментных функций различных порядков [18, 19]. Поэтому существует потребность в разработке критериев для «отбраковки» существующих и вновь

разрабатываемых статистических моделей механики двухфазных дисперсно-упрочненных композитов.

Получение точных аналитических выражений для производных условных и безусловных моментных функций произвольного порядка в точках, соответствующих нулевым значениям аргументов, и доказательство того, что эти производные могут быть определены по параметрам структуры, измеряемым любым экспресс-методом (томография или обработка микрошлифов), является важным этапом на пути решения проблемы идентификации статистических моделей механики композитов [15]. Соотношения (6), с одной стороны, содержат всю необходимую информацию об ансамбле включений полимербетона, с другой – их структура (ряды с конечным числом членов) позволяет записать выражения для производных. Для этого представим равенство (6) в несколько ином виде.

Определение 3. Следуя [15], назовем *приближением «малых расстояний»* случай, когда будет иметь место пересечение i -й частицы армирующего наполнителя образа с той же самой i -й частицей прообраза ($\Omega_i \cap \Omega'_i$) при выполнении условия

$$R \leq \min [D_{\min}, d_{\min}]. \quad (7)$$

В приближении «малых расстояний» соотношения (3) значительно упрощаются:

$$\text{Prob}(\mathbf{r}_1 \in \Omega_f \mid \mathbf{r}_2 \in \Omega_f) = \frac{\sum_{i=1}^N \text{mes } \Omega_i \cap \Omega'_i}{\sum_{i=1}^N \text{mes } \Omega_i} = \frac{\sum_{i=1}^N \text{mes } \Omega_i \cap \Omega'_i}{v_f \text{mes } \hat{\Omega}}. \quad (8)$$

Кроме того, принимая во внимание $r_i = r_j$, преобразуем соотношение (5) к форме

$$\text{mes } \Omega_i \cap \Omega'_i = \begin{cases} \kappa, & 0 < R < 2r_i; \\ \frac{4}{3}\pi r_i^3, & R = 0; \\ 0, & R \geq 2r_i, \end{cases} \quad \kappa = \frac{\pi}{12} (16r_i^3 - 12Rr_i^2 + R^3). \quad (9)$$

В частном случае, если композит содержит сферические включения одинакового радиуса ($r_i = r_j = r$), при $R < 2r$ (или

$0 < R/(2r) < 1$) из (8) и (9) будут следовать выражения для условных вероятностей, полученные ранее авторами [20],

$$\text{Prob}(\mathbf{r}_1 \in \Omega_f / \mathbf{r}_2 \in \Omega_f) = \frac{1}{2} \left[2 - \frac{3R}{4r} + \frac{1}{8} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{R}{2r} \right) \left(1 - \frac{R}{2r} \right)^2.$$

Выделим в выражении (6) слагаемые, соответствующие приближению «малых расстояний»:

$$K_\lambda^{(2)}(R, \varphi) = \frac{1}{\text{mes } \hat{\Omega}} \left\{ \sum_{i=1}^N \text{mes } \Omega_i \cap \Omega'_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [(1 - \delta_{ij}) \text{mes } \Omega_i \cap \Omega'_j] - v_f \right\}, \quad (10)$$

при наложении на аргумент R двухточечной моментной функции второго порядка ограничений (7). Здесь δ_{ij} – коэффициенты, принимающие значения 1 при совпадающих индексах и 0, если индексы различны.

Предполагая постоянство $\langle \lambda(\mathbf{r}) \rangle \equiv v_f$, определим в приближении «малых расстояний» двухточечные нормированные, отнесенные к дисперсии $D_\lambda \equiv v_f(1 - v_f)$, моментные функции второго порядка случайной структуры полимербетона

$$\tilde{K}_\lambda^{(2)}(R) = \frac{\sum_{i=1}^N \text{mes } \Omega_i \cap \Omega'_i - v_f^2 \text{mes } \hat{\Omega}}{v_f(1 - v_f) \text{mes } \hat{\Omega}}. \quad (11)$$

Обратим внимание на то, что равенства (6) и (10) содержат информацию о геометрии и взаимном расположении армирующих элементов, а выражение (11) – только о геометрии. Кроме того, нетрудно показать, что в приближении «малых расстояний» нормированные моментные функции не зависят от угловых координат φ . Это свидетельствует о том, что при выполнении условий (7) для любого типа структуры случайные поля $\lambda(\mathbf{r})$ всегда удовлетворяют условиям локальной статистической изотропии.

Необходимо отметить, что ограничение (7) для приближения «малых расстояний» является достаточно жестким. В ряде случаев, например для случайных структур дисперсно-упрочненных композитов, проявляющих эффекты регуляризации (появление доменов с кубическим объемно-центрированным расположением включений,

характерные масштабы которых значительно отличаются от средних размеров гетерогенности, соединенных областями материала со случайным расположением частиц армирующего наполнителя [16]), условия (7) являются нижней оценкой для аргумента $R = |\Delta \mathbf{r}|$ моментных функций $\tilde{K}_\lambda^{(2)}(R, \varphi)$. Верхняя оценка соответствует другому характерному масштабу, связанному с взаимным расположением доменов.

Подставляя в равенство (11) меры $\text{mes } \Omega_i \cap \Omega'_i$, представленные в виде (9), получим выражение для производной $\tilde{K}_\lambda^{(2)}(R)$ при $R = 0$:

$$\left. \frac{d}{dR} \tilde{K}_\lambda^{(2)}(R) \right|_{R=0} = -\frac{3 \langle r_i^2 \rangle}{4(1-v_f) \langle r_i^3 \rangle} \equiv -\frac{\aleph}{4v_f(1-v_f) \text{mes } \hat{\Omega}}. \quad (12)$$

Как видим, для объемных случайных структур полимербетонов искомая производная при любых наполнениях имеет отрицательный знак (объемная доля включений в неоднородном материале всегда принадлежит диапазону $0 < v_f < 1$) и определяется отношением меры $\aleph = \text{mes } \partial \Omega_f$, связанной с межфазной границей (суммарная площадь) к объему прообраза $\text{mes } \hat{\Omega}$ (или к суммарному объему армирующих элементов, т.к. $\text{mes } \Omega_f = v_f \text{mes } \hat{\Omega}$). Этот неожиданный результат позволяет сделать еще один важный вывод: выражение (12) справедливо для структурно-неоднородных сред, армированных частицами произвольной формы, и, что особенно важно, значение производной $d\tilde{K}_\lambda^{(2)}(R)/dR|_{R=0}$ не зависит от взаимного расположения (отсутствие углов φ ориентации вектора трансляции $\Delta \mathbf{r}$ относительно неподвижной, связанной с $\hat{\Omega}$, системы координат) и связности включений. Последнее является еще одним доказательством локальной статистической изотропии случайных полей $\lambda(\mathbf{r})$ структуры полимербетонов в приближении «малых расстояний». Обратим внимание на то, что в частных случаях $v_f = 0$ или $v_f = 1$ производная $d\tilde{K}_\lambda^{(2)}(R)/dR|_{R=0}$ не определена. Это вполне объяснимо потому, что в рассматриваемых случаях материал является бесструктурным однородным. Описание этого материала не может быть проведено в рамках статистических представлений.

Необходимо отметить, что выражение (12) в точности совпадает с соотношением, полученным авторами [21] иным способом и для другого класса задач (описание закономерностей рассеяния рентгеновских лучей в пористых неоднородных средах).

Для случайных структур полимербетонов, сферические включения которых имеют детерминированные размеры ($r_i = r$), выражение (12) значительно упрощается:

$$\left. \frac{d}{dR} \tilde{K}_\lambda^{(2)}(R) \right|_{R=0} = -\frac{3}{4(1-\nu_f)r}.$$

Обратим внимание на то, что значения производной в рассматриваемом частном случае не зависят от формы и определяются только объемным наполнением ν_f и характерным размером армирующих элементов.

Таблица 1

Значения $d\tilde{K}_\lambda^{(2)}(R)/dR|_{R=0}$ для случайных структур полимербетонов с предельным для $d/\langle D \rangle = 0$ наполнением включениями одинакового диаметра

d/D	1,00	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,00
	-0,78	-0,79	-0,80	-0,81	-0,82	-0,84	-0,86	-0,89	-0,94	-1,01	-1,13
	-0,82	-0,83	-0,84	-0,86	-0,89	-0,92	-0,97	-1,04	-1,15	-1,36	-1,84

Примечание: исследуемые фрагменты при помощи алгоритма, основанного на методе статистических испытаний без модификации случайной структуры (числитель), и алгоритма генерации, предусматривающего корректировку взаимного расположения включений (знаменатель).

В работах [10, 16] приводятся результаты сравнения алгоритмов синтеза пространственных случайных структур дисперсно-упрочненных композитов, основу которых составляет метод статистических испытаний. Эти результаты свидетельствуют о том, что объемные наполнения модельных материалов и стохастические закономерности генерируемых структур существенным образом зависят от наличия корректировки взаимного расположения включений внутри фрагмента. Увеличение объемной доли сферических частиц одинакового диа-

метра, которое достигается модификацией структуры, при одном и том же фиксированном минимальном расстоянии между включениями (изменяется в пределах от $d/\langle D \rangle = 0,0$ до $d/\langle D \rangle = 1,0$) приводит к снижению значений производных нормированных моментных функций второго порядка (табл. 1) ¹.

Поскольку отношение $\langle r_i^2 \rangle / \langle r_i^3 \rangle$, входящее в равенство (12), чувствительно к изменению радиусов включений, для различных модельных пространственных случайных структур полимербетонов можно дать оценку влияния типа закона распределения характерных размеров армирующих элементов на значения $d\tilde{K}_\lambda^{(2)}(R)/dR \Big|_{R=0}$. Полученные результаты (табл. 2) свидетельствуют о том, что при заданной объемной доле частиц наполнителя значения производных существенно зависят от типа закона распределения. Это прежде всего связано с более неоднородным фракционным составом материала, который предопределяется несимметричным логнормальным законом распределения диаметров включений полимербетона [0].

Таблица 2

Значения $d\tilde{K}_\lambda^{(2)}(R)/dR \Big|_{R=0}$ для случайных структур полимербетонов с объемным наполнением $v_f = 0,35$

Коэффициенты вариации диаметров включений, k_D			Постоянный диаметр
0,20	0,40	0,60	
$\frac{-1,30}{-1,32}$	$\frac{-1,41}{-1,34}$	$\frac{-1,40}{-1,28}$	- 1,15

Примечание: диаметры включений распределены по логнормальному (числитель) и нормальному (знаменатель) законам.

В заключение следует отметить, что разработанный подход к определению условных вероятностей обладает достаточной общностью и позволяет определять стохастические закономерности не только модельных, но и реальных случайных структур полимербетонов и дисперсно-упрочненных композитов матричного типа,

¹ Все количественные значения получены в результате осреднения по 20 сгенерированным независимым реализациям пространственных случайных структур полимербетонов.

для которых при постоянстве $\langle \lambda(\mathbf{r}) \rangle \equiv v_f$ могут не выполняться условия статистической однородности. В последнем случае после получения объемного изображения распределения армирующих элементов в матрице (например в результате томографического исследования) потребуется найти решение важных вспомогательных задач – идентификации фаз, определения параметров геометрии и взаимного расположения элементов структуры. Кроме того, разработанный подход может оказаться полезным при решении задач статистической теории атомного упорядочения [22] с целью учета дальнего и ближнего многочастичного взаимодействия в наноструктурированных материалах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ–Урал № 07–01–96056).

Приложение

Для конкретизации слагаемых, входящих в суммы (3) и (8), получим решение вспомогательных геометрических задач о взаимном пересечении двух сферических тел радиусами r_1 и r_2 .

Рассмотрим произвольное сечение двух шаров, проходящее через их центры O_1 и O_2 (возможные случаи взаимного расположения представлены на рис. 2). Исходные сферические тела могут быть получены вращением кругов с центрами в точках O_1 и O_2 вокруг отрезка $O_1O_2 = R$.

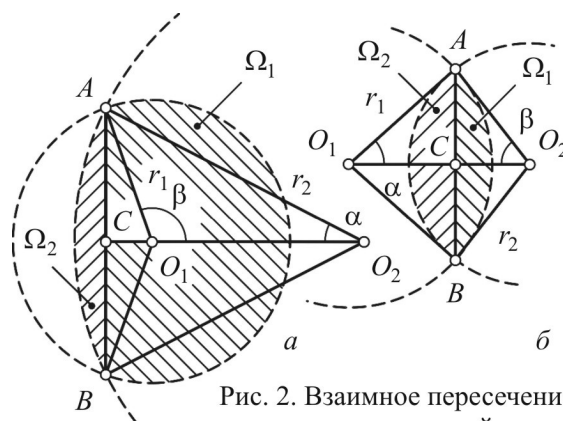


Рис. 2. Взаимное пересечение двух включений

Пусть Ω_{inters} – тело (состоит из двух сферических сегментов Ω_1 и Ω_2), которое получается в результате пересечения шаров. Тогда

$$\text{mes } \Omega_{inters} = \text{mes } \Omega_1 \cup \text{mes } \Omega_2, \quad (\text{П } 1)$$

где

$$\text{mes } \Omega_1 = \frac{2\pi}{3R} \left[Rr_1^3(1 - \cos \alpha) - (\text{mes } \Delta_{O_1AC})^2 \right],$$

$$\text{mes } \Omega_2 = \frac{2\pi}{3R} \left[Rr_2^3(1 - \cos \beta) - (\text{mes } \Delta_{O_2AC})^2 \right],$$

если телесные углы конусов, образующихся в результате вращения треугольников Δ_{O_1AC} и Δ_{O_2AC} вокруг O_1O_2 , удовлетворяют неравенствам $\alpha < \pi$ и $\beta < \pi$ (рис. 2, б) и

$$\text{mes } \Omega_1 = \frac{2\pi}{3R} \left[Rr_1^3(1 - \cos \alpha) + (\text{mes } \Delta_{O_1AC})^2 \right],$$

$$\text{mes } \Omega_2 = \frac{2\pi}{3R} \left[Rr_2^3(1 - \cos \beta) - (\text{mes } \Delta_{O_2AC})^2 \right],$$

в случае $\beta \geq \pi$ и $\alpha < \pi$ (рис. 2, а).

Представим равенство (П 1) в виде, не зависящем от ограничений, накладываемых на телесные углы:

$$\text{mes } \Omega_{\text{inters}} = \frac{2\pi}{3R} \left\{ R \left[r_1^3(1 - \cos \alpha) + r_2^3(1 - \cos \beta) \right] - 2 \left[\text{mes } \Delta_{AO_1O_2} \right]^2 \right\},$$

которое после замены $\cos \alpha$ и $\cos \beta$ выражениями, содержащими радиусы шаров r_1 , r_2 и расстояние между их центрами R , преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{mes } \Omega_{\text{inters}} = \frac{\pi}{3R} \left[2R \left(r_1^3 + r_2^3 \right) - R^2 \left(r_1^2 + r_2^2 \right) - \right. \\ \left. - \left(r_1^2 - r_2^2 \right)^2 - 4p(p - r_1)(p - r_2)(p - R) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П } 2)$$

Здесь p – полупериметр $\Delta_{AO_1O_2}$ (см. рис. 2).

Соотношение (П 2) справедливо в случае, если выполняются все ограничения (4), при замене которых на нестрогие неравенства могут быть получены условия внешнего касания. Невыполнение первого, второго или третьего неравенств (4) свидетельствует об отсутствии пересечения, а также о нахождении одной сферы внутри

другой соответственно. При $r_1 = r_2 = r$ из выражения (П 2) следуют частные случаи:

$$\text{mes } \Omega_{\text{inters}} = \frac{\pi}{12} (16r^3 - 12Rr^2 + R^3), \quad R \leq 2r \text{ (или } 0 < \frac{R}{2r} < 1) \quad (\text{П } 3)$$

при выполнении всех условий ненулевого пересечения (4);

$$\text{mes } \Omega_{\text{inters}} = \frac{4\pi}{3} r^3, \quad R \equiv 0,$$

соответствующее условию совпадения двух сфер, и

$$\text{mes } \Omega_{\text{inters}} = 0, \quad R = 2r,$$

свидетельствующее об отсутствии пересечения.

Библиографический список

1. Механические свойства полиэфирного полимербетона / Р.Д. Максимов [и др.] // Механика композит. материалов. – 1999. – Т. 35. – № 2. – С. 147–162.
2. Христова Ю. Прогнозирование ползучести полимербетона / Ю. Христова, К. Анискевич // Механика композит. материалов. – 1995. – Т. 31. – № 3. – С. 305–309.
3. Христова Ю. Прогнозирование ползучести отвержденной эпоксидной смолы, наполненной мраморной мукой / Ю. Христова, К. Анискевич // Механика композит. материалов. – 1994. – Т. 30, № 5. – С. 590–599.
4. Анискевич К. Влияние концентрации и дисперсности наполнителя на ползучесть полимерного композита / К. Анискевич, Ю. Христова // Механика композит. материалов. – 1995. – Т. 31, № 2. – С. 179–185.
5. Анискевич К. Ползучесть полимербетона в нелинейной области / К. Анискевич, Ю. Христова, Ю. Янсонс // Механика композит. материалов. – 2000. – Т. 36. – № 2. – С. 147–164.
6. Водостойкость полиэфирного полимербетона / Р.Д. Максимов [и др.] // Механика композит. материалов. – 2003. – Т. 39. – № 2. – С. 147–164.
7. Анискевич К. Сорбционные характеристики полимербетона при длительной выдержке в воде / К. Анискевич, Ю. Христова,

Ю. Янсонс // Механика композит. материалов. – 2003. – Т. 39. – № 4. – С. 463–476.

8. Зайцев А.В. Прогнозирование эффективных упругих модулей двухфазных композитов на основе термореактивных смол с минеральным наполнителем / А.В. Зайцев, А.В. Новгородова, Д.И. Федоров // Вестник ПГТУ. Аэрокосмическая техника. – 2005. – Вып. 25. – С. 62–68.

9. Сапожников С.Б. Численное моделирование деформирования и разрушения многофазного полимербетона / С.Б. Сапожников, А.Н. Анискевич, В.А. Царевский // Механика композит. материалов. – 2006. – Т. 42. – № 6. – С. 817–824.

10. Зайцев А.В. Синтез и закономерности случайных структур дисперсно-упрочненных композитов на основе термореактивных смол с минеральным наполнителем / А.В. Зайцев, Н.В. Трефилов // Математическое моделирование и краевые задачи: тр. 4-й Всероссийской конф. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: Изд-во СамГТУ, 2007. – С. 101–108.

11. Волков С.Д. Статистическая механика композитных материалов / С.Д. Волков, В.П. Ставров. – Минск: Изд-во БГУ, 1978. – 208 с.

12. Беран М. Применение статистических теорий для определения тепловых, электрических и магнитных свойств неоднородных материалов / М. Беран // Композиционные материалы. Т. 2: Механика композиционных материалов. – М.: Мир, 1978. – С. 242–286.

13. Богачев И.Н. Статистическое металловедение / И.Н. Богачев, А.А. Вайнштейн, С.Д. Волков. – М.: Металлургия, 1984. – 176 с.

14. Стеликов Н.Е. Упругость и вязкоупругость сферопластика при статическом и циклическом нагружении: дис. ... канд. тех. наук. 01.02.04 / Н.Е. Стеликов; Киевский инженерно-строительный институт. – К., 1989. – 162 с.

15. Зайцев А.В. Моментные функции второго порядка случайной структуры однонаправленно армированных волокнистых композитов / А.В. Зайцев // Вестник УГТУ–УПИ. Механика микронеоднородных материалов и разрушение. – 2006. – № 11 (82). – С. 161–167.

16. Случайные структуры двухфазных композитов: синтез, закономерности, новая оценка характерных размеров представи-

тельных объемов / А.В. Зайцев [и др.] // Математ. моделирование систем и процессов. – 2004. – Вып. 12. – С. 30–44.

17. Соколкин Ю.В. Механика деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел / Ю.В. Соколкин, А.А. Ташкинов. – М.: Наука, 1984. – 115 с.

18. Аристова Ю.О. Моментные функции стохастической краевой задачи структурной механики матричных композитов / Ю.О. Аристова, Н.В. Евлампиева, А.А. Ташкинов // Математ. моделирование систем и процессов. – 1999. – Вып. 7. – С. 3–10.

19. Евлампиева Н.В. Моментные функции для разреженных структур со сферическими и эллипсоидальными включениями / Н.В. Евлампиева // Молодежная наука Прикамья. – 2001. – Вып. 1. – С. 56–64.

20. Иванов Д.С. Физические поля в компонентах композитов с псевдослучайной структурой / Д.С. Иванов, А.А. Ташкинов // Физическая мезомеханика. – 2001. – Т. 4, № 2. – С. 29–36.

21. Debye P. Scattering by an inhomogeneous sold. II. The correlation function and its application / P. Debye, H.R. Anderson, H. Brumberger // J. Appl. Phys. – 1957. – Vol. 28. – № 6. – P. 679–683.

22. Гусев А.И. Парные корреляции и вероятности многочастичных фигур в плоской треугольной решетке / А.И. Гусев // ФТТ. – 2006. – Т. 48. – Вып. 5. – С. 805–813.

Получено 31.08.2007