

УДК 539.3; 548.4

УДК 539.215; 539.374

Д.А. Китаева^{*}, Ш.Т. Пазылов^{}, Я.И. Рудаев^{**}**

Институт проблем машиноведения РАН РФ (г. Санкт-Петербург)^{*}
Кыргызско-Российский славянский университет (г. Бишкек)^{**}

О ПРИЛОЖЕНИЯХ МЕТОДОВ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ В МЕХАНИКЕ МАТЕРИАЛОВ

Abstract

The problems of modeling in mechanics dynamic superplasticity and mechanics of the rocks are considered with position nonlinear dynamics. It is shown acceptability to elementary theory of the catastrophes to description of the regularities high temperature deformation in broad rates range, including superplasticity, commercial aluminum alloys. They are offered analytical conditions to realization of the effect superplasticity. The state equation, satisfying this conditions, recorded in final form and is complemented by evolutionary equations for controlling parameter and internal state parameters.

It is formulated mathematical model suitable to description deformation type material behaviours of the rocks at compression. The process to deformation is considered as opened inconvertible phase transition, but to state equation is added kinetic equation for parameter imperfection, characterizing variability of the structure under loading.

The theoretical results were compared to experienced data.

подавляющее большинство физико-механических процессов в деформируемых материалах происходит во времени. Вследствие этого определяющие соотношения, моделирующие закономерности деформирования, в принципе, можно отнести к динамическим.

В последнее время большое внимание уделяется исследованию деформационного поведения материалов, которые можно рассматривать как незамкнутые неравновесные системы [1]. В качестве примера сошлемся на материалы, которым при деформации отвечает иерархия необратимых структурных состояний, характерная для систем, находящихся вдали от термодинамического равновесия. Для изучения динамики таких материалов оказывается неприемлемым квазистационарный подход. Последний рассматривает развитие любой сложной

системы как смену одного устойчивого состояния другим с кратким периодом переходного процесса между ними [2]. Однако анализ реальной деформационной динамики показывает, что период неравновесного состояния может оказаться слишком длительным, чтобы им можно было пренебречь. Более того, часто требуется поддержание системы в неравновесном состоянии. Поэтому квазистационарный подход эффективен до момента, пока в силу некоторых причин характер стационарного состояния не изменяется кардинальным образом. Подобные бифуркационные изменения принадлежат к области приложений методов нелинейного динамического анализа, получившего название синергетики [3...5].

Остановимся на некоторых конкретных приложениях синергетического подхода к моделированию деформационных процессов.

1. Динамическая сверхпластичность алюминиевых сплавов

Сверхпластичность неорганических материалов внешне проявляется в форме аномального квазиоднородного удлинения при малых значениях напряжений пластического течения. Начиная с классической работы К. Пирсона [6], сверхпластическую деформацию связывают с превалированием механизма зернограничного проскальзывания со сменой соседей зерен [7, 8] над другими формами массопереноса. Не ставя сказанное под сомнение, отметим, что реализация такого механизма облегчается формированием ультрамелкозернистой структуры на предварительном этапе (микроструктурная сверхпластичность) или в процессе нагрева и деформации (динамическая сверхпластичность).

Установлено [9], что сверхпластичность промышленных алюминиевых сплавов объясняется происходящим при нагреве и деформации структурным фазовым переходом – динамической рекристаллизацией. Происходящие при этом структурные изменения заключаются [9] в возникновении равноосной микроструктуры с очень мелким зерном, примерно совпадающим по размерам с субзернами. Так создается структурная ситуация, способствующая реализации механизма зернограничного проскальзывания и, естественно, проявлению сверхпластических свойств. Указанная ситуация является промежуточным структурным состоянием между исходным деформированным и крупно-

зернистым рекристаллизованным. Следовательно, наличие нагрева и деформации в определенном сочетании при неизменном химическом составе изменяет структурное состояние материалов. По существу, в меняющихся термических и кинематических условиях в деформированных алюминиевых сплавах может наблюдаться иерархия структурных состояний: деформированное, переходное к мелкозернистому, мелкозернистое, переходное к крупнозернистому рекристаллизованному, рекристаллизованное.

Таким образом, при анализе на микроуровне эффектов, характеризующих динамическую сверхпластичность, полезным может оказаться привлечение представлений о неравновесных фазовых переходах.

В связи со сказанным актуальнейшей становится задача установления термомеханических условий реализации явления сверхпластичности. При этом выделяются две проблемы:

1. Пусть имеется массив экспериментальных данных по деформированию материала в широких температурно-скоростных диапазонах. Требуется выработать достаточно эффективные критерии оценки выборки опытных данных, отвечающих проявлению сверхпластических свойств.

2. Условия перехода в сверхпластическое состояние должны иметь аналитическую формулировку механического типа. Очевидно, что деформационный процесс, одним из этапов которого является сверхпластичность, не может заменяться моделью только нелинейно-вязкой среды, преобладающей в теориях сверхпластичности [7, 8, 10, 11]. Кроме этого, при постановке и решении задач объемного формоизменения на базе управляемой сверхпластической деформации к уравнениям состояния предъявляются требования пригодности последних не только для описания процессов сверхпластического течения, но для пограничных сверхпластичности областей термопластичности и высокотемпературной ползучести.

Впервые задача определения условий перехода промышленных алюминиевых сплавов в сверхпластическое состояние рассмотрена в [12], хотя попытка решения её предпринималась и ранее [13]. Постановка указанной задачи основана на большом количестве экспериментальных данных [14...16], обобщенных в [17] и относящихся к сплавам АМг5, 1561, Д18Т, 1980, В95, АК4, АК6, АК8.

Для формулировки аналитических условий реализации эффекта сверхпластичности принято уравнение состояния вида

$$\sigma = \sigma(\theta, \bar{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}), \quad (1.1)$$

где σ – действительное напряжение; θ – абсолютная температура; $\bar{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}$ – соответственно степень и скорость деформации.

Таким образом, ставится задача определения условий, которым должно удовлетворять напряжение как функция температуры, степени и скорости деформации, ограничивающая термические и кинематические условия сверхпластичности.

На рис. 1.1, *a* схематично изображено качественное представление накопленных экспериментальных данных по зависимостям напряжения от температуры и скорости деформации. Выявлено существование термических и скоростных диапазонов, в которых семейство изотерм «напряжение – скорость деформации» отклоняется от монотонного характера с появлением точек бифуркации. Ниспадающие ветви указанных изотерм принимаются соответствующими проявлению

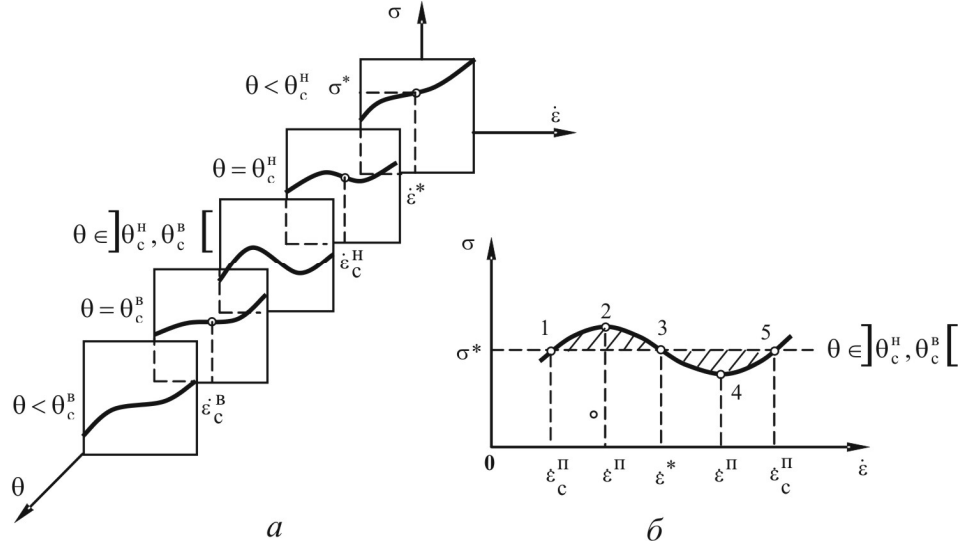


Рис. 1.1. Качественное представление экспериментальных зависимостей: «напряжение – скорость деформации» в различных температурных диапазонах (*a*); к условиям перехода материала в сверхпластическое состояние (*б*)

сверхпластических свойств. Характерные признаки сверхпластичности – низкий уровень напряжений и высокая деформационная способность при растяжении отмечаются в упомянутых диапазонах. Указанная неустойчивость напряжения по отношению к скорости деформации имеет место в температурном интервале $\theta \in]\theta_c^H, \theta_c^B[$, причем θ_c^H, θ_c^B названы соответственно нижней и верхней критическими температурами.

Далее полагаем, что изотермы $\sigma \sim \dot{\varepsilon}$ описываются гладкими функциями, имеющими точки перегиба, в которых, естественно, выполняются равенства

$$\left. \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \dot{\varepsilon}^2} \right|_{\dot{\varepsilon}=\dot{\varepsilon}^*} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь скорости деформации $\dot{\varepsilon}^* = \dot{\varepsilon}^*(\theta)$ ставится в соответствие напряжение $\sigma^* = \sigma^*(\theta)$ (см. рис. 1.1, а).

Уравнение состояния (1.1) при критических температурах должно удовлетворять условиям

$$\left. \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varepsilon}} \right|_{\theta_c^H, \dot{\varepsilon}_c^H} = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \dot{\varepsilon}^2} \right|_{\theta_c^H, \dot{\varepsilon}_c^H} = 0; \quad \left. \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varepsilon}} \right|_{\theta_c^B, \dot{\varepsilon}_c^B} = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \dot{\varepsilon}^2} \right|_{\theta_c^B, \dot{\varepsilon}_c^B} = 0, \quad (1.3)$$

где $\dot{\varepsilon}_c^H, \dot{\varepsilon}_c^B$ – абсциссы точек перегиба изотерм $\sigma \sim \dot{\varepsilon}$ соответственно при θ_c^H, θ_c^B .

Скоростной диапазон структурных превращений при конкретных температурах $\theta \in]\theta_c^H, \theta_c^B[$ установим, придерживаясь принципа Максвелла [18]. В соответствии с указанным принципом фазовые переходы имеют место при пересечении кривой равновесия компоненты максвелловского множества (рис. 1.1, б). График $\sigma \sim \dot{\varepsilon}$ (см. рис. 1.1, б) можно рассматривать как фрагмент фазовой диаграммы при $\theta \in]\theta_c^H, \theta_c^B[$. При этом восходящие ветви участка немонотонности (1–2–3–4–5) будем считать соответствующими измельчению исходной деформированной (1–2) и формированию крупнозернистой рекристаллизованной (4–5) структур. Между ними лежит зона неустойчивости (2–3–4), отвечающая проявлению сверхпластических свойств. Скоростной интервал сверхпластичности ограничен точками бифуркации (2,4), в которых имеют место равенства

$$\left. \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varepsilon}} \right|_{\dot{\varepsilon}=\dot{\varepsilon}^{\text{л}}} = 0; \quad \left. \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varepsilon}} \right|_{\dot{\varepsilon}=\dot{\varepsilon}^{\text{п}}} = 0, \quad (1.4)$$

где $\dot{\varepsilon}^{\text{л}}$, $\dot{\varepsilon}^{\text{п}}$ – скорости деформации, характеризующие диапазоны проявления сверхпластических свойств.

Аналитически принципу Максвелла для нахождения скоростных диапазонов структурных превращений соответствует интеграл

$$\int_{\dot{\varepsilon}_c^{\text{л}}}^{\dot{\varepsilon}_c^{\text{п}}} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varepsilon}} \right)_{\theta} \dot{\varepsilon} d\dot{\varepsilon} = 0, \quad (1.5)$$

причем $\dot{\varepsilon}_c^{\text{л}}$, $\dot{\varepsilon}_c^{\text{п}}$ – скорости деформаций, определяющие диапазон структурных превращений.

Следуя [19], считаем, что структурная термостабильность горячедеформированных алюминиевых сплавов не зависит от степени деформации, а обусловлена лишь скоростными ограничениями. Поэтому допустимо предположить существование деформационных условий, в которых при неизменной температуре и скорости деформации форма и размеры измельченных зерен сохраняют стабильность. Следовательно, можно утверждать, что

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varepsilon}} = 0. \quad (1.6)$$

Итак, реализация эффекта сверхпластичности промышленных алюминиевых сплавов обусловлена факторами температуры, степени и скорости деформации, удовлетворяющими соотношениям (1.3)...(1.6). При этом начальным пунктом является выявление экспериментальным путем неустойчивых изотерм $\sigma \sim \dot{\varepsilon}$ и, как следствие, критических температур $\theta_c^{\text{л}}$, $\theta_c^{\text{п}}$. Скоростной диапазон структурных превращений не следует отождествлять со скоростным интервалом сверхпластичности, поскольку при $\dot{\varepsilon} \in]\dot{\varepsilon}_c^{\text{л}}, \dot{\varepsilon}^{\text{л}}[$ и $\dot{\varepsilon} \in]\dot{\varepsilon}^{\text{п}}, \dot{\varepsilon}_c^{\text{п}}[$ имеют место метастабильные состояния.

Термомеханические режимы сверхпластичности исследованных алюминиевых сплавов приведены в табл. 1.1.

Теперь понятно, что сверхпластичность может быть интерпретирована как явление, происходящее в условиях неравновесной (возбужденной) динамической структуры с возникновением аморфного состояния границ [20], стимулирующего зернограничное проскальзывание.

вание. Макропроявление структурной неравновесности заключается в возникновении неоднозначности напряжения течения по отношению к скорости деформации и температуре и, естественно, в появлении особых точек, соответствующих границам устойчивости. Напомним, что структурные изменения носят необратимый характер.

Классическое описание в рамках детерминированного подхода фазовых переходов предусматривает введение семейства потенциальных функций $\Phi(\eta, \beta)$, зависящих от параметров (η – параметр порядка, β – управляющий параметр). Из условия качественной идентичности экспериментальным данным выбираем потенциальную функцию в форме катастрофы сборки [5, 18] с учетом влияния внешнего поля

$$\Phi(\eta, \beta) = \frac{1}{4} m_0 \eta^4 + \frac{1}{2} \beta(\xi) \eta^2 - q\eta. \quad (1.7)$$

Таблица 1.1

Термомеханические параметры сверхпластических промышленных алюминиевых сплавов

Марка сплава	Исходное состояние	Вид деформации					
		Растяжение			Сжатие		
		θ, K	$\dot{\epsilon}, c^{-1}$	Примечание	θ, K	$\dot{\epsilon}, c^{-1}$	Примечание
АМг5	Деформированный	743...783	10^{-3}	СП	743...783	$10^{-2}...10^{-1}$	СП
1561 (АМг61)	Деформированный	743...783	10^{-3}	СП	–	–	нет
1561 (АМг61)	Литой	–	–	нет	753...793	10^{-2}	СП
Д18Т	Деформированный	783...833	10^{-3}	СП	783...833	10^{-2}	СП
В48	Деформированный	–	–	нет	813...853	10^{-2}	СП
В95	Деформированный	–	–	нет	733...793	10^{-2}	СП
АК4	Деформированный	753...793	10^{-3}	СП	753...793	10^{-2}	СП
АК6	Деформированный	–	–	нет	723...763	10^{-2}	СП
АК8	Деформированный	723...763	10^{-3}	СП	723...763	10^{-2}	СП

Примечание. В колонке $\dot{\epsilon}, c^{-1}$ приведены порядки скоростей деформаций по модулю; символ «СП» означает наличие сверхпластического состояния материала.

Здесь положено

$$q = \frac{\sigma}{\sigma^*} - 1; \quad \eta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^*} - 1; \quad \xi = \frac{\theta - \theta_c^H}{\theta_c^B - \theta_c^H}, \quad (1.8)$$

где $m_0 \sim \text{const}$, $\beta = \beta(\xi)$ – функция температуры.

Итак, стандартной редукцией (1.8) вводится связь описания процесса деформации с теорией катастроф. Поскольку $\eta = \eta(\varepsilon, \theta)$, то параметр порядка должен анализироваться как коллективная мода.

Из (1.8) следует, что $\sigma^* = \sigma^*(\theta)$, $\varepsilon^* = \varepsilon^*(\theta)$, отвечающие точкам перегиба изотерм $\sigma \sim \varepsilon$ (рис. 1.1, а), могут рассматриваться как альтернативные внутренние параметры состояния. Укажем, что

$$\varepsilon_c^H = \varepsilon^*(\theta_c^H); \quad \varepsilon_c^B = \varepsilon^*(\theta_c^B). \quad (1.9)$$

Состоянию равновесия отвечает уравнение, полученное минимизацией (1.7) по параметру порядка,

$$q = m_0 \eta^3 + \beta \eta. \quad (1.10)$$

В рамках представлений о функции (1.7) как о морсовской [18] можно утверждать, что при $\beta > 0$ ($\xi \notin]0,1[$) изменений структурного характера в деформируемом материале не происходит. Условие $\beta < 0$ ($\xi \in]0,1[$) соответствует структурно неустойчивому состоянию среды. В переходных состояниях имеет место равенство $\beta = 0$.

Качественная картина, отражающая влияние знака управляющего параметра β на характер кривых $q \sim \eta$, представлена на рис. 1.2.

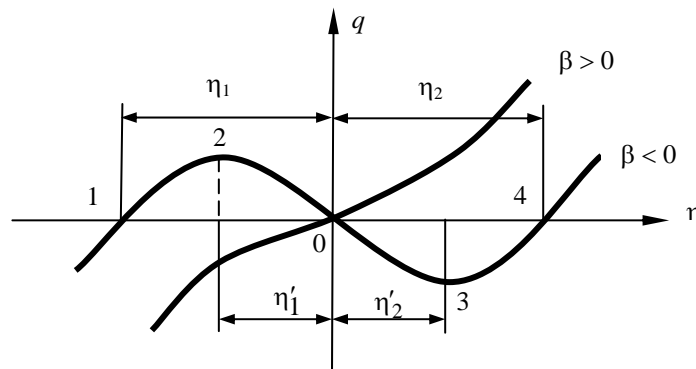


Рис. 1.2. Влияние знака управляющего параметра β на характер кривых $q-\eta$

Значения параметров порядка $\eta_{1,2}$ и, следовательно, скоростей деформаций, ограничивающих при $\xi \in]0,1[$ область структурных изменений, найдем из условия (1.5), которое заменой (1.8) трансформируется в равенство $q = 0$. С учетом (1.8), (1.10) получим

$$\eta_{1,2} = \pm \left(-\frac{\beta}{m_0} \right)^{1/2} ; \quad \varepsilon_c^{\eta, \pi} = \varepsilon^* \left[1 \pm \left(-\frac{\beta}{m_0} \right)^{1/2} \right]. \quad (1.11)$$

Ограничения по параметрам порядка $\eta'_{1,2}$ и скоростям деформации на диапазон проявления сверхпластических свойств установим из (1.4), (1.8). Имеем

$$\eta'_{1,2} = \pm \left(-\frac{\beta}{3m_0} \right)^{1/2} ; \quad \varepsilon^{\eta \pi} = \varepsilon^* \left[1 \pm \left(-\frac{\beta}{3m_0} \right)^{1/2} \right]. \quad (1.12)$$

Теперь очевидно, что при деформации реализуется процесс самоорганизации через изменение управляющих параметров [3,4]. Действительно, алюминиевые сплавы переходят из исходного состояния в рекристаллизованное через сильные структурные флуктуации, ответственность за описание которых возлагается на управляющий параметр β .

Отметим, что уравнение (1.10) отвечает условиям осуществления эффекта сверхпластичности (1.3).

Поскольку управляющий параметр β введен независимым от времени, то для описания его эволюции можно привлечь эволюционное уравнение вида

$$\frac{d\beta}{dt} = f(\beta). \quad (1.13)$$

Будем считать $f(\beta)$ функцией, характеризующей чувствительность материала к структурным превращениям. Тогда указанная функция должна удовлетворять условиям: $f'(\beta) < 0$ при $\xi \notin]0,1[$; $f'(\beta) > 0$ при $\xi \in]0,1[$; $f'(0) = 0$. Кроме этого, $f(\beta)|_{\xi < \frac{1}{2}} < 0$;

$f(\beta)|_{\xi = \frac{1}{2}} = 0$; $f(\beta)|_{\xi > \frac{1}{2}} > 0$, а приведенная температура $\xi = 1/2$ соответствует середине температурного диапазона сверхпластичности.

Альтернативные внутренние параметры состояния σ^* , ε^* также могут считаться чувствительными к происходящим структурным превращениям. Поэтому их кинетику проследим посредством параметра β .

Пусть при некотором значении $\beta = s$ имеем $\sigma^* = \sigma^*(s)$. Допустим, что изменению β на величину $d\beta$ параметр σ^* откликается изменением на величину, пропорциональную σ^* . Поэтому положим

$$d\sigma^* = \sigma^* K(\beta - s) d\beta, \quad (1.14)$$

где $K(\beta - s)$ – ядро, зависящее от температуры.

Решение уравнения (1.14) имеет вид

$$\ln \frac{\sigma^*}{\sigma^*(s)} = \int_s^\beta K(\beta - s) d\beta. \quad (1.15)$$

Полагая ядро экспоненциального вида

$$K(\beta - s) = A_0 \exp(\beta - s), \quad (1.16)$$

из (1.15) получим

$$\ln \frac{\sigma^*}{\sigma^*(s)} = A_0 [\exp(\beta - s) - 1], \quad (1.17)$$

где A_0 – постоянная материала.

Продифференцировав (1.17) по времени, можем записать следующее кинетическое уравнение для параметра σ^* :

$$\frac{d \ln \sigma^*}{dt} = A_0 \frac{d\beta}{dt} \exp(\beta - s). \quad (1.18)$$

Далее полагаем, что связь между параметрами σ^* и ε^* записывается следующим образом:

$$\frac{d \ln \sigma^*}{d \ln \varepsilon^*} = \lambda^*(\xi). \quad (1.19)$$

Для установления вида функции $\lambda^*(\xi)$ воспользуемся условием (1.6), которое при достаточно медленном процессе ($d\eta = -(1+\eta)d \ln \varepsilon^*$) преобразуется к линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\beta}{d\eta} + \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1-\lambda^*}{\lambda^*} \right) \frac{\beta}{1+\eta} = \frac{1+m_0\eta^3}{\lambda^*\eta(1+\eta)} - 3m_0\eta. \quad (1.20)$$

Интеграл уравнения (1.20) с учетом условия $q|_{\eta=0} = 0$ будет следующим:

$$\beta = \frac{(1+\eta)^{1/\lambda^*}}{\eta} \left[1 - (1+\eta)^{-1/\lambda^*} (1+m_0\eta^3) \right]. \quad (1.21)$$

Разрешая (1.21) относительно λ^* , получим

$$\lambda^* = \frac{\ln(1+\eta)}{\ln(1+m_0\eta^3 + \beta\eta)}. \quad (1.22)$$

Полагая $\eta = 0$ и раскрывая неопределенность, будем иметь

$$\lambda^* = \beta^{-1}. \quad (1.23)$$

Теперь кинетическое уравнение для параметра ε^* может быть представлено в виде

$$\frac{d \ln \varepsilon^*}{dt} = A_0 \beta \frac{d\beta}{d\xi} \exp(\beta - s). \quad (1.24)$$

Таким образом, предложена модель, связывающая напряжение, температуру и кинематические переменные для случая простого растяжения и сжатия, включая диапазоны сверхпластичности. При этом уравнение состояния записано в конечной форме (1.10), (1.8) и дополнено эволюционными уравнениями для управляющего параметра (1.13) и внутренних параметров состояния (1.17), (1.24). Указанные соотношения пригодны для описания закономерностей деформирования при наличии явного выражения функции чувствительности материала к структурным превращениям.

В качестве варианта функции $f(\beta)$ для алюминиевых сплавов предложено [17] выражение

$$f(\beta) = \frac{4}{\alpha} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \left[\Gamma(\xi) - \frac{1}{2} \right]. \quad (1.25)$$

Здесь

$$\Gamma(\xi) = (1 - \beta)^{-\alpha} \frac{1 + \mu}{2} \frac{2\xi - 1}{\lambda + \mu(2\xi - 1)^2} + \frac{1}{2}, \quad (1.26)$$

где α, μ – постоянные материала.

Функцию $\Gamma(\xi)$ при $\beta < 0$ и $\xi \in]0, 1[$ можно рассматривать как степень полноты фазового перехода, причем $\Gamma(0) = 0$; $\Gamma(1) = 1$.

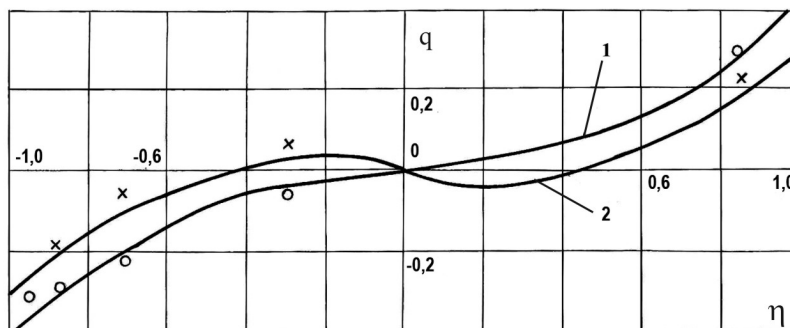
При сопоставлении теоретических и опытных данных ограничимся рассмотрением зависимостей $q \sim \eta$. Последнее вполне объяснимо, поскольку уравнения (1.10), (1.8) включают в себя управляющий и внутренний параметры, связанные с функцией чувствительности материала к структурным превращениям. Укажем, что модель содержит четыре константы – m_0, A_0, α, μ (табл. 1.2).

Таблица 1.2

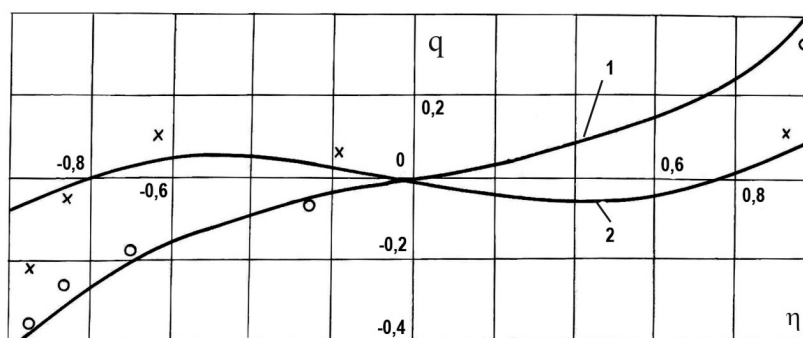
Постоянные модели высокотемпературной деформации промышленных алюминиевых сплавов

Марка сплава	Состояние	Вид деформации	Значения констант			
			m_0	α	μ	A_0
АМг5	Деформир.	Растяжение	0,3333	0,54	1,08	-0,8434
		Сжатие	0,3333	0,54	1,08	-0,8434
Д18Т	Деформир.	Растяжение	0,3965	0,5	1,2	-1,0987
		Сжатие	0,3965	0,5	1,2	-1,0987
1561	Деформир.	Растяжение	0,3717	0,6	1,2	-2,8445
1561	Литое	Сжатие	0,3497	0,65	1,07	-1,394
В95	Деформир.	Сжатие	0,49	0,3	1,5	-1,5759
В48	Деформир.	Сжатие	0,4482	0,41	1,32	-1,3623
АК4	Деформир.	Растяжение	0,2428	0,4	1,33	-1,2622
		Сжатие	0,2428	0,4	1,33	-1,2622
АК6	Деформир.	Растяжение	0,2846	0,45	1,1	-1,3922
		Сжатие	0,2732	0,43	1,09	-1,3318
АК8	Деформир.	Сжатие	0,2846	0,45	1,1	-1,3922

На рис. 1.3, а, б представлено сопоставление расчетных (сплошные линии) и экспериментальных результатов для сплавов АМг5, АК4.



а



б

Рис. 1.3. Сопоставление теоретических (сплошные линии) и экспериментальных данных при растяжении и сжатии образцов сплава АМг5 при: 1 (○) – $\theta = 713 \text{ K}$; $m_0 = 0,3333$; $\beta = 0,1727$;

2 (×) – $\theta = 753 \text{ K}$; $m = 0,3333$; $\beta = -0,0335$ (а);

образцов сплава АК4 при:

1 (○) – $\theta = 723 \text{ K}$; $m = 0,2428$; $\beta = 0,1733$;

2 (×) – $\theta = 783 \text{ K}$; $m_0 = 0,2428$; $\beta = -0,1679$ (б)

2. Деформация горных пород как неравновесный фазовый переход

Освоение больших глубин меняет привычные взгляды на характер деформирования горных пород в окрестности выработок и скважин [21]. В первую очередь указанное изменение связано с необходимостью учета неупругих деформаций и разрушения. Эксперименты на жестком испытательном оборудовании при изучении поведения геоматериалов на сжатие показывают, что нагрузка, достигнув максиму-

ма, начинает падать при продолжающемся росте деформаций [22...25]. Следовательно, особенностью в поведении горных пород можно считать наличие запредельной области.

Горные породы относятся к начально-неоднородным материалам [23]. В соответствии с классификацией пространственно-временных диссипативных структур [26] горные породы на больших глубинах могут считаться автоструктурами – локализованными пространственными образованиями, устойчиво существующими в диссипативных неравновесных средах. Именно поэтому процесс деформации и разрушения горных пород может рассматриваться как иерархия последовательных переходов из одного устойчивого состояния в другое, новое. Приведенные рассуждения свидетельствуют о полезности привлечения методов теории катастроф [18] к описанию равновесия и потери устойчивости горных пород.

В качестве исходной информации принимаем паспортные диаграммы зависимостей максимального касательного напряжения T и относительного изменения объема θ от максимального сдвига Γ , качественно отражающие известные опыты [23] на одноосное сжатие. При этом на рис. 2.1, а кривая 1 соответствует функции $T = T(\Gamma)$, а кривая 2 – функции $\theta = \theta(\Gamma)$. Упругий участок диаграммы $T = T(\Gamma)$ ($\Gamma \leq \Gamma_e$; $T \leq T_e$) сменяется областью упрочнения, переходящей при $\Gamma = \Gamma_0$, $T = T_0$ в зону разупрочнения. После достижения сдвиговой

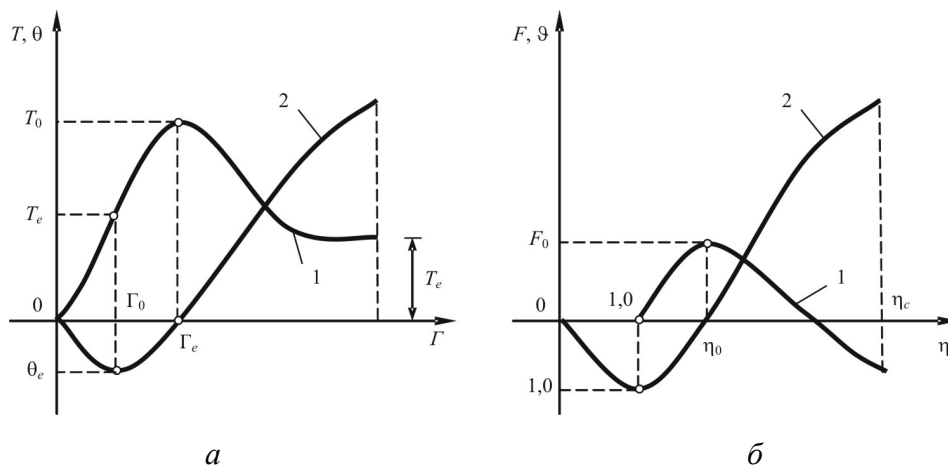


Рис. 2.1. Паспортные диаграммы деформирования горных пород при сжатии

деформацией значения $\Gamma = \Gamma_c$ наступает разрушение. Анализ опытных данных [23] указывает на то, что при $\Gamma = \Gamma_0$, $T = T_0$ изменение объема близко к нулю, т.е. на пределе прочности материал оказывается несжимаемым. Здесь же происходит смена знака объемной деформации. Последнее означает, что переход на запредельную ветвь сопровождается превалированием разрыхления над другими формами массопереноса.

Введем безразмерные прочностные и деформационные характеристики

$$F = \frac{T}{T_e} - 1 ; \eta = \frac{\Gamma}{\Gamma_e} ; \nu = \frac{\theta}{\theta_e} , \quad (2.1)$$

где θ_e – объемная деформация, соответствующая пределу упругости.

С учетом (2.1) диаграммы $T \sim \Gamma$ и $\theta \sim \Gamma$ трансформируются в $F \sim \eta$ и $\nu \sim \eta$ (рис. 2.1, б).

Пусть текущему напряженно-деформированному состоянию отвечает энергетическая функция [27, 28] вида

$$V = V(F, \eta, \beta),$$

где β – параметр, ответственный за дефекты не только исходного состояния, но и появившиеся в условиях нагружения.

В процессе деформирования материал испытывает ряд состояний, смена которых имеет место в критических точках. Так, при $\eta = 1$ (см. рис. 2.1, б) наступает пластичность и формируется диссипативная структура, которая при $\eta > \eta_0$ (запредельная область) сменяется новой диссипативной структурой. По существу, в деформируемом материале возникают синергетические эффекты [3, 4]. Поскольку в процессе эксперимента реализуется медленное внешнее воздействие, то указанные эффекты можно отнести к самоорганизации через управляющие параметры β .

Функцию (2.2) представим суперпозицией потенциала $V_p(F, \eta)$, ответственного за обратимые процессы, и возмущения $S(\eta, \beta)$. Имеем

$$V = V(F, \eta, \beta) = V_p(F, \eta) + S(\eta, \beta). \quad (2.3)$$

Потенциальная составляющая энергетической функции записывается в виде разложения в ряд Тейлора вблизи состояния равновесия,

$$V_p = V_0 + V_1(\eta - 1) + \frac{1}{2}V_2(\eta - 1)^2 + \frac{1}{3!}V_3(\eta - 1)^3 + \dots \quad (2.4)$$

Для возмущения примем морсовское разложение [18]

$$S(\eta, \beta) = \beta_1\eta + \frac{1}{2}\beta_2\eta^2 + \frac{1}{3}\beta_3\eta^3 + \dots \quad (2.5)$$

Зависимость (2.5) путем соответствующей нелинейной замены может принять каноническую форму катастрофы [18]. Но такое преобразование приведет к сложной нелинейной связи между нормированным напряжением F и параметром β . Можно показать [28], что чувствительность материала к несовершенствам вполне определяется первым слагаемым разложения (2.5) и позволяет исключить все возмущения, кроме линейного.

С учетом сказанного для функции $V(F, \eta, \beta)$ можем записать

$$V(F, \eta, \beta) = \beta\eta + \frac{1}{2}(F_0 - F)\eta^2 + \frac{1}{3}\eta^3, \quad (2.6)$$

где $F_0 = F|_{\eta=\eta_0}$ (см. рис. 2.1, б).

Равновесному состоянию отвечает уравнение

$$F = \frac{\beta}{\eta} + \eta + F_0, \quad (2.7)$$

где $\beta = \beta_1$ ($\beta < 0$), $\eta \in]1, \eta_c[$.

Уравнение (2.7) с позиций теории катастроф можно рассматривать как двухмерное многообразие, включенное в пространство R^3 с координатными осями η, F, β . Состояния равновесия будут найдены для каждого $\beta = \text{const}$. Свойства устойчивости критических точек при этом легко определяются – все точки левее $\eta = \eta_0$ ($\eta \in]1, \eta_0[$) (см. рис. 2.1, б) есть локально устойчивые критические точки, все точки $\eta \in]\eta_0, \eta_c[$ – неустойчивые точки.

Удобным представляется связать параметр β с характеристикой текущего структурного состояния, в качестве которой, следуя [29], примем параметр повреждаемости ω . Очевидно, что величина ω должна рассматриваться как внутренний параметр состояния, эволюция которого определяется соответствующим кинетическим уравнением. При этом полагаем, что $\omega = \omega(\chi, t)$, где $\chi = \eta / \eta_c$, t – время.

Для анализа физической природы повреждаемости обратимся к опытам, проведенным в Институте физики и механики горных пород НАН КР на различных геоматериалах. При испытаниях на осевое сжатие осуществлялась регистрация акустической эмиссии образцов как результат трещинообразования. На рис. 2.2 дано качественное

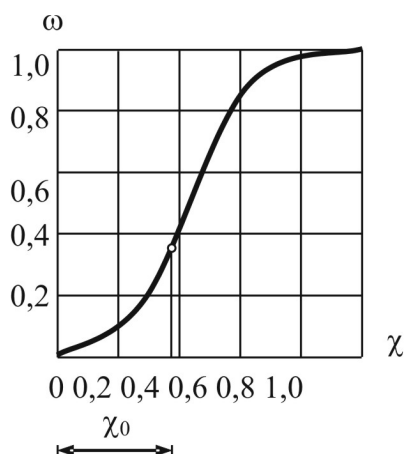


Рис. 2.2. Качественное представление зависимости параметра повреждаемости от деформации

представление характера процесса образования микротрещин. Здесь по оси абсцисс отложена нормализованная деформация χ , а по оси ординат – отношение текущего количества трещин в образце (N) к максимальному (N_{\max}), отвечающему моменту разрушения. Отождествляя параметр повреждаемости ω с N/N_{\max} и анализируя его эволюцию, приходим к выводу, что процесс деформирования может рассматриваться как многостадийный размытый необратимый фазовый переход [30]. На графике $\omega - \chi$ наблюда-

ются характерные для размытого фазового перехода особенности. Понятно, что переходу материала в запредельную область сопутствует смена типа устойчивости, обусловленная сильными структурными флуктуациями. Поэтому появление на графике $\omega - \chi$ точки перегиба, соответствующей пределу прочности материала ($\chi = \chi_0 = \eta_0 / \eta_c$), вполне предсказуемо.

Отметим, что в области упругих деформаций параметр ω возрастает слабо. При переходе в пластическое состояние ω начинает интенсивно расти. Это объясняется природой остаточных деформаций начально неоднородных материалов, к которым, как указывалось выше, относятся горные породы. Здесь, помимо чисто сдвиговых процессов, существенный вклад в деформацию дает разрыхление, сопровождающееся потерей связности, наличием поверхностей отрыва [23].

Кроме того, на этапе упрочнения следует ожидать появление локализованных областей, в которых частицы материала измельча-

ются. Тем самым в образовавшейся структуре зарождаются ростки новой, более сложной структуры, переход к которой совершается при смене типа устойчивости. В новом состоянии, при котором напряжение уменьшается при росте деформаций, отмечается быстрый рост параметра повреждаемости, и при появлении магистральной трещины $\omega \rightarrow 1$.

Итак, в ходе необратимого деформирования материала реализуется переориентация форм массопереноса. Это обуславливает иерархию диссипативных структур, причем параметр повреждаемости характеризует их изменчивость, растянутую во времени. При таком подходе параметр $\omega = \omega(\chi, t)$ можно трактовать как степень полноты фазового перехода. Эволюции параметра «повреждаемость» придадим вероятностный характер, т.е. положим, что функция $\omega = \omega(\chi, t)$ есть распределение вероятностей, качественная идентичность которому очевидна (см. рис. 2.2). Тогда в качестве кинетического можно принять вариант известного в неравновесной статистической механике уравнения Фоккера–Планка [31], описывающего вероятность соответствия величины ω в данный момент времени определенной координате χ . Уравнение Фоккера–Планка имеет вид [31]

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \chi} \left(R(\chi)\omega - \lambda(\chi) \frac{\partial \omega(\chi)}{\partial \chi} \right) = 0. \quad (2.8)$$

Здесь $R = R(\chi)$ – функция, на которую возлагается ответственность за внутреннее скольжение и разрыхление в материале (коэффициент «дрейфа»), $\lambda = \lambda(\chi)$ – коэффициент диффузии, для геоматериалов принимаемый постоянным.

Физический подтекст уравнения (2.8) заключается в равенстве временного изменения плотности вероятности $\omega(\chi, t)$ дивергенции потока вероятности, взятого со знаком минус. В механическом аспекте уравнению (2.8) отвечает условие сплошности.

Статическое нагружение считаем соответствующим стационарному состоянию. При этом из уравнения (2.8) непосредственно получаем

$$\lambda \frac{d\omega}{d\chi} = R(\chi)\omega. \quad (2.9)$$

В уравнении (2.9) учтены характерные для размытого фазового перехода условия

$$\omega|_{\chi=0} = 0; \quad \left. \frac{d\omega}{d\chi} \right|_{\chi=0} = 0. \quad (2.10)$$

После интегрирования (2.9) будем иметь

$$\omega(\chi) = A \exp\left(\frac{1}{\lambda} \int R(\chi) d\chi\right), \quad (2.11)$$

где A – постоянная интегрирования.

Для идентификации параметра $\omega(\chi)$ с опытными данными, представленными на рис. 2.2, выбираем функцию $R = R(\chi)$ в виде

$$R(\chi) = \frac{b(1 - \ln \chi) - c}{\chi^2} - (b - c), \quad (2.12)$$

где b, c – постоянные материала.

Выражение (2.12) отвечает, как видно из (2.9), свойственному для степени полноты фазового перехода условию

$$\left. \frac{d\omega}{d\chi} \right|_{\chi=1} = 0. \quad (2.13)$$

После подстановки (2.12) в уравнение (2.11) и его интегрирования можем записать

$$\ln \omega = \ln A + \frac{1}{\lambda} \left[\frac{b}{\chi} \ln \chi + \frac{c}{\chi} - (b - c)\chi + Q \right], \quad (2.14)$$

при Q – постоянная интегрирования.

Теперь кинетическое уравнение для параметра повреждаемости представимо в следующей форме:

$$\frac{d\omega}{dt} = \dot{\chi} \frac{\omega}{\lambda} \left[\frac{b(1 - \ln \chi)}{\chi^2} - (b - c) \right], \quad (2.15)$$

где $\dot{\chi} = \frac{d\chi}{dt}$ – скорость изменения нормализованной деформации.

Установим теперь связь между параметрами несовершенства β и повреждаемости ω . Пусть на приращение параметра повреждаемо-

сти $d\omega$ параметр несовершенства откликается уменьшением на величину $d\beta$. Примем, что указанное приращение пропорционально параметру β и происходит тем быстрее, чем выше значение ω . Следовательно,

$$d\beta = \beta K(\omega, \omega') d\omega, \quad (2.16)$$

где $\omega' = d\omega/d\chi$, а $K(\omega, \omega')$ – ядро, убывающее с ростом ω .

Решение уравнения (2.16) запишется так:

$$\ln \frac{\beta}{\beta_e} = \int_{\omega} K(\omega, \omega') d\omega, \quad (2.17)$$

причем в соответствии с (2.7) имеем

$$\beta_e = \beta|_{\eta=1} = -(1 + F_0). \quad (2.18)$$

Примем ядро оператора (2.17) в виде

$$K(\omega, \omega') = \frac{\lambda}{\omega} - \frac{b - c\omega}{\omega'}. \quad (2.19)$$

После подстановки (2.19) в формулу (2.17) и интегрирования получим следующее уравнение:

$$\ln \frac{\beta}{\beta_e} = a + \frac{b \ln \chi}{\chi} + \frac{c}{\chi}, \quad (2.20)$$

где постоянные материала a, b, c удовлетворяют условию

$$a + \frac{b \ln \chi_e}{\chi_e} + \frac{c}{\chi_e} = 0, \quad (2.21)$$

причем

$$\chi_e = \chi|_{\eta=1} = \frac{1}{\eta_c} \text{ и } a = \lambda \ln A + Q.$$

Значения постоянных материала a, b, c определены из сопоставления опытных [23] и теоретических данных и приведены наряду с постоянными интегрирования λ, A, Q в табл. 2.1. При этом для нахождения λ, A, Q имеем условия

$$\omega|_{\chi=1} = 1; \quad \left. \frac{d^2\omega}{d\chi^2} \right|_{\chi=\chi_0} = 0, \quad (2.22)$$

и, учитывая вероятностный характер процесса,

$$\int_0^1 \omega(x) d\chi = \frac{1}{2}. \quad (2.23)$$

Исходя из (2.22), (2.23) и принимая во внимание (2.14), получаем следующую систему уравнений:

$$\lambda = \frac{[b(1 - \ln \chi_0) - c - (b - c)\chi_0^2]^2}{\chi_0(2c - 3b + 2b \ln \chi_0)}; \quad A \exp\left[\frac{1}{\lambda}(2c - b + Q)\right] = 1; \quad (2.24, a)$$

$$\frac{1}{2A} \exp\left(-\frac{Q}{\lambda}\right) = \int_0^1 \exp\left\{\frac{1}{\lambda}\left[\frac{b \ln \chi}{\chi} + \frac{c}{\chi} - (b - c)\chi\right]\right\} d\chi. \quad (2.24, б)$$

Таблица 2.1

Значения постоянных материала и постоянных интегрирования

Порода	a	b	c	λ	A	Q
Коелгинский мрамор	5,5915	-1,3923	-3,3741	0,793	0,334	6,224
Биотитовый гранит	5,7592	-1,1207	-2,9698	1,005	0,015	9,009
Неотитовый гранит	5,6697	-1,6426	-3,7128	0,910	0,032	8,914
Песчаник НВО (Донбасс)	6,0706	-1,7498	-3,9491	0,918	0,027	9,458
Плагиогранит (Южуралзолото)	5,5070	-1,1195	-3,9423	1,058	0,114	9,062
Диабаз (Братская ГЭС)	5,7349	-1,8874	-4,0410	0,929	0,004	11,439
Талькохлорит	5,3946	-1,6030	-3,6052	0,932	0,028	8,936
Песчаник (Донбасс)	5,8672	-1,9419	-4,1109	0,935	0,002	12,104

Таким образом, установлена связь между параметрами повреждаемости (2.14) и несовершенства (2.20) в параметрической форме. При этом эволюционное уравнение для параметра несовершенства будет иметь вид

$$\frac{d\beta}{dt} = \chi \frac{\beta}{\chi^2} [b(1 - \ln \chi) - c] \quad (2.25)$$

при начальном условии

$$\beta|_{\chi=\chi_e} = \beta_e. \quad (2.26)$$

Выше уже отмечалось, что характерным в поведении горных пород под нагрузкой является зависимость объемной деформации от сдвиговой. Поскольку указанная зависимость принята в качестве паспортной характеристики, то естественно считать явный вид функции $\vartheta = \vartheta(\chi)$ отражением опытных данных.

В первом приближении будем считать, что изменение объема за пределом упругости связано с накоплением несовершенств и определяется кусочно-линейной функцией вида

$$\vartheta = \begin{cases} k_1 \left(\frac{\beta}{\beta_e} \right) + k_2 & \chi_e \leq \chi \leq \chi_0; \\ k_3 \left(\frac{\beta}{\beta_e} \right) + k_4 & \chi_0 \leq \chi \leq 1; \end{cases} \quad (2.27)$$

где для β , β_e имеем выражение (2.20), а значения коэффициентов k_1 , k_2 , k_3 , k_4 определены из сопоставления теоретических и экспериментальных данных и приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Значения коэффициентов

Порода	k_1	k_2	k_3	k_4
Коелгинский мрамор	0,5521	-1,5521	0,3763	-1,1538
Биотитовый гранит	0,7072	-1,7072	0,4143	-0,5317
Неотитовый гранит	0,7833	-1,8020	0,7446	-1,6862
Песчаник НВО (Донбасс)	0,6387	-1,6387	0,5414	-1,3964
Плагиогранит (Южуралзолото)	1,2101	-2,2101	1,2851	-2,3482
Диабаз (Братская ГЭС)	0,7172	-1,7521	0,9503	-2,2086
Талькохлорит	0,5993	-1,5993	0,3748	-0,7118
Песчаник (Донбасс)	0,9125	-1,9125	0,5295	-1,1095

На рис. 2.3 *а*, *б* в качестве примера представлено сопоставление теоретических (сплошные линии) и экспериментальных данных в координатах F - η (кривая 1), ϑ - η (кривая 2) соответственно для диабаза и коелгинского мрамора при сжатии.

Таким образом, сформулирована модель, включающая уравнение состояния в форме связи между напряжениями F и деформациями η (2.7) и дополненная кинетическим уравнением для пара-

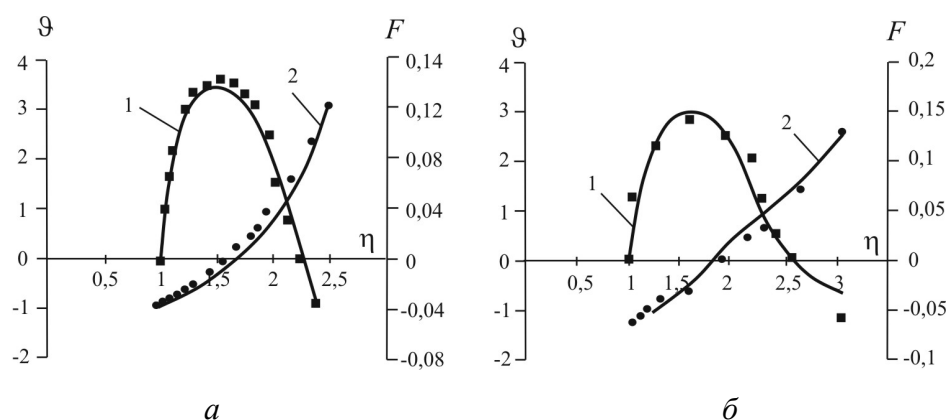


Рис. 2.3. Сопоставление теоретических (сплошные линии) и опытных данных для диабаза (а) и коелгинского мрамора (б)

метра несовершенства β (2.25) и выражением для относительного изменения объема (2.27), дающая удовлетворительное соответствие опытных и теоретических данных.

Библиографический список

1. Пригожин И. Порядок из хаоса / И. Пригожин, И. Стенгерс. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 212 с.
2. Занг В.-Б. Синергетическая экономика / В.-Б. Занг. – М.: Мир, 1999. – 335 с.
3. Хакен Г. Синергетика / Г. Хакен. – М.: Мир, 1980. – 405 с.
4. Хакен Г. Синергетика: иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / Г. Хакен. – М.: Мир, 1980. – 405 с.
5. Малинецкий Г.Г. Математические основы синергетики / Г.Г. Малинецкий. – М.: КомКнига, 2005. – 312 с.
6. Pearson C.B. The viscous properties of extruded eutectic alloys of lead-tin and bismuth-tin / C.B. Pearson // J. Inst. Metals. – 1934. – Vol. 57. – P. 111.
7. Кайбышев О.А. Сверхпластичность промышленных сплавов / О.А. Кайбышев. – М.: Металлургия, 1984. – 264 с.
8. Смирнов О.М. Обработка металлов давлением в состоянии сверхпластичности / О.М. Смирнов. – М.: Машиностроение, 1979. – 168 с.

9. Вайнблат Ю.М. Динамическая рекристаллизация алюминиевых сплавов / Ю.М. Вайнблат, Н.А. Шаршагин // Цветные металлы. – 1984. – № 2. – С. 67–70.
10. Чумаченко Е.Н. Сверхпластичность: материалы, теория, технологии / Е.Н. Чумаченко, О.М. Смирнов, М.А. Цепин. – М.: КомКнига, 2005. – 320 с.
11. Новиков И.И. Сверхпластичность сплавов с ультрамелким зерном / И.И. Новиков, В.К. Портной. – М.: Металлургия, 1981. – 168 с.
12. Рудаев Я.И. О фазовых переходах в сверхпластичности / Я.И. Рудаев // Проблемы прочности. – 1990. – № 10. – С. 50–54.
13. Горынин И.В. К вопросу об аналитических условиях начала сверхпластичности / И.В. Горынин, Я.И. Рудаев, Д.И. Чашников // Судостроительная промышленность, серия металловедение, металлургия. – 1987. – Вып. 5. – С. 28–31.
14. Сверхпластичность некоторых алюминиевых сплавов / Ю.С. Золотаревский [и др.] // Судостроительная промышленность, серия материаловедение. – 1991. – Вып. 16. – С. 21–26.
15. Паняев В.А. О сверхпластичности алюминиевых сплавов 1980 и В95 / В.А. Паняев, Я.И. Рудаев, Д.И. Чашников // Вопросы материаловедения. – 1995. – № 1 (4). – С. 36–40.
16. Температурно-скоростная деформация литого алюминиевого сплава 1561 / Н.В. Жданов [и др.] // Судостроительная промышленность, сериал материаловедение. – 1990. – Вып. 15. – С. 45–40.
17. Рудаев Я.И. Введение в механику динамической сверхпластичности / Я.И. Рудаев. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2003. – 134 с.
18. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Ч. 1 / Р. Гилмор. – М.: Мир, 1984. – 285 с.
19. Горелик С.С. Рекристаллизация металлов и сплавов / С.С. Горелик. – М.: Металлургия, 1978. – 582 с.
20. Перевезенцев В.Н. Современное состояние теории сверхпластичности / В.Н. Перевезенцев, В.В. Рыбин // Сверхпластичность металлов: тез. докл. IV Всесоюзной научно-технической конференции. – Ч. 1. – Уфа, 1989. – С. 5.
21. Алимжанов М.Т. Устойчивость равновесия тел и задачи механики горных пород / М.Т. Алимжанов. – Алма-Ата: Наука, 1982. – 272 с.
22. Ставрогин А.Н. Пластичность горных пород / А.Н. Ставрогин, А.Г. Протосеня. – М.: Недра, 1979. – 301 с.

23. Ставрогин А.Н. Прочность горных пород и устойчивость выработок на больших глубинах / А.Н. Ставрогин, А.Г. Протосеня. – М.: Недра, 1985. – 271 с.

24. Христианович С.А. Деформация упрочняющегося пластического материала / С.А. Христианович // МТТ. – 1974. – № 2. – С. 6–14.

25. Шемякин Е.И. Задача о «хрупком шарнире» / Е.И. Шемякин // МТТ. – 1996. – № 2. – С. 138–144.

26. Нелинейные волны, структуры и бифуркации / под ред. А.В. Гапонова-Грехова, М.И. Рабиновича. – М.: Наука, 1983. – 264 с.

27. Адигамов Н.С. Уравнение состояния, учитывающее разупрочнение материала / Н.С. Адигамов, Я.И. Рудаев // ФТПРПИ. – 1991. – № 4. – С. 24–32.

28. Адигамов Н.С. О самоорганизации структурообразования при деформировании горных пород / Н.С. Адигамов, Я.И. Рудаев // Геодинамика и напряженное состояние недр земли: тр. международного конф. – Новосибирск, октябрь. – 1999. – С. 51–58.

29. Работнов Ю.Н. О разрушении вследствие ползучести / Ю.Н. Работнов // ПМТФ. – 1963. – № 2. – С. 113–123.

30. Ролов Б.Н. Физика размытых фазовых переходов / Б.Н. Ролов, В.Э. Юркевич. – Ростов: Изд-во РГУ, 1983. – 320 с.

31. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. Т. 2 / Р. Балеску. – М.: Мир, 1978. – 399 с.

Получено 18.05.2007