

УДК 539.3

**Ю.П. Стефанов**

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН (Томск)

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ  
КОНСОЛИДИРОВАННЫХ И ВЫСОКОПОРИСТЫХ  
ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СРЕД В УСЛОВИЯХ СЖАТИЯ**

*Abstract*

*In this work the behaviour of consolidation and highly porous materials under loading were simulated numerically. To describe the inelastic deformation processes, we put forward modifications of the Drucker–Prager–Nikolaevskii and Rudnicki models with a non-associated flow rule. Considers the shear and compaction bands formation, as well as uniform compaction in specimens under compression at different confining stresses. The stress-strain curves were computed.*

Под действием нагрузки геологические материалы проявляют различные особенности поведения, которые зависят от условий и величины нагружения, а также минерального состава, структуры и величины пористости. Деформация таких материалов за пределом упругости сопровождается изменением объема, они могут разрыхляться или уплотняться, соответственно формируются полосы локализованного сдвига, расширения или уплотнения.

Несмотря на то, что основные модели поведения геологических сред предложены несколько десятилетий назад, остается множество вопросов, касающихся как решения конкретных задач, так и описания тех или иных особенностей поведения. Остается актуальной задача разработки численных моделей, которые позволят описывать процессы деформирования в различных условиях нагружения. К числу основных проблем относятся процессы неупругого деформирования, локализации деформации и разрушения как в природных условиях геологических структур, так и в условиях, связанных с технологическим воздействием.

Модель поведения среды строится на основании экспериментальных данных о поведении образцов конечных размеров, при этом

предполагается, что поведение каждой точки образца соответствует поведению образца целиком. При изучении поведения геологических материалов, построении предельных поверхностей и зависимостей напряженного состояния от деформации возникает сложная проблема, связанная с тем, что процессы протекают неоднородно, деформация нередко имеет локализованный характер, что, в первую очередь, характерно для запредельной области деформирования, области потери прочности, разупрочнения, разрушения.

Поэтому построенная модель и подобранные параметры не гарантируют, что поведение элемента среды в зоне локализации следует построенным соотношениям, а значит, и поведение образца не будет описываться этими соотношениями. Однозначную оценку работоспособности модели и ее пригодности для описания поведения не единичного элемента среды, а физического объекта, в заданных условиях нагружения, могут дать лишь результаты численного моделирования.

В данной работе для описания процесса деформации за пределом упругости используются модели двух типов: модификация модели Друккера–Прагера–Николаевского с параметрами, зависящими от величины давления и накопленной неупругой деформации, и модель, построенная на основе эллиптической предельной поверхности Рудницкого. Обе модели предлагается использовать с неассоциированным законом течения, что позволит учитывать переменный характер величины дилатансии любого знака.

С использованием предложенных моделей рассмотрено поведение образцов песчаника с малой и высокой пористостью при различных условиях нагружения. Смоделировано развитие однородного деформирования, формирование полос локализованного сдвига и уплотнения при различной величине обжатия. Построены кривые зависимости напряжений от объемной и осевой деформации.

### **Математическое описание процесса деформации**

Для моделирования процесса деформации будем численно решать систему уравнений механики, включающую уравнения движения и неразрывности, при определенных формах уравнения состояния и уравнение энергии:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \dot{u}_i,$$

$$\rho_0 V_0 = \rho V.$$

где  $\rho_0, \rho$  – начальное и текущее значения плотности материала;  $V_0, V$  – начальное и текущее значения элементарного объема материала.

Эта система замыкается определяющими соотношениями, которые конкретизируют поведение среды, устанавливая связь между напряжениями, деформациями и/или скоростями, определяют ее поведение, а также геометрическими соотношениями для вычисления тензора деформации. Будем считать, что полные деформации  $\varepsilon_{ij}$  состоят из упругой  $\varepsilon_{ij}^e$  и пластической  $\varepsilon_{ij}^p$  частей. Аналогичное разложение примем для скорости деформации:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p.$$

Связь между напряжениями и деформациями для упругого поведения опишем гипопругим законом

$$\sigma_{ij} = -\sigma \delta_{ij} + s_{ij},$$

$$\frac{Ds_{ij}}{Dt} = 2\mu \left( \dot{\varepsilon}_{ij}^e - \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_{kk}^e \delta_{ij} \right),$$

$$\frac{Ds_{ij}}{Dt} = \dot{s}_{ij} - s_{ik} \dot{\omega}_{jk} - s_{jk} \dot{\omega}_{ik},$$

$$\sigma = -K \frac{\dot{V}}{V}.$$

Здесь  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $s_{ij}$  – компоненты девиатора тензора напряжений;  $\sigma$  – среднее давление;  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформаций Коши,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}),$$

$\dot{\omega}_{ij}$  – компоненты тензора скоростей вращения,  $u_i$  – компоненты вектора перемещения,

$$\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} - \dot{u}_{j,i}),$$

точка сверху означает производную по времени,  $K$  и  $\mu$  – модули сжатия и сдвига соответственно.

Наиболее распространенной моделью описания прочности геологических и других неоднородных хрупких материалов остается модель Друккера–Прагера [1], которая является обобщением закона Кулона–Мора. Предельная поверхность в данной модели имеет вид конуса, который ограничивают в области растяжения, что связано с низкой прочностью материалов на отрыв (рис. 1). При высоких значениях давления, когда раскрытие трещин и проскальзывание их поверхностей становится практически невозможным, происходит переход к пластическому деформированию кристаллической решетки зерен, что имеет место, например, на глубинах в несколько десятков километров. При таких нагрузках подходящей формой предельной поверхности будет цилиндр Мизеса (см. рис. 1, а).

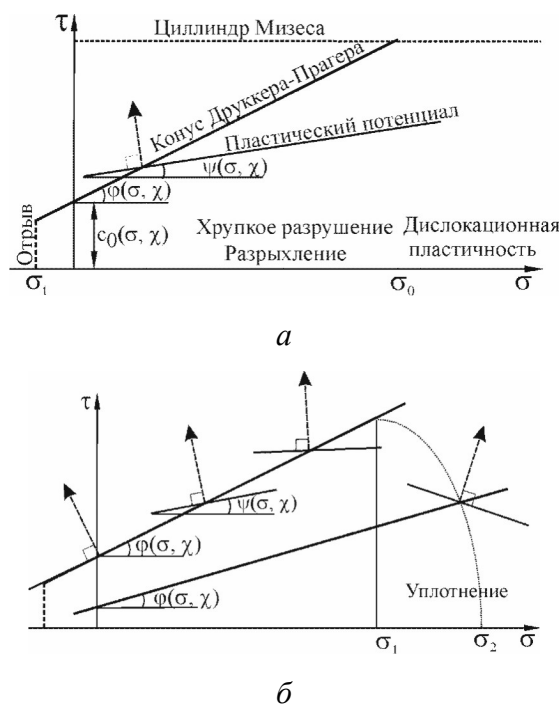


Рис. 1. Вид предельных поверхностей для (а) консолидированных и (б) высокопористых сред

Однако поведение геологических сред может оказаться еще более сложным. При большой величине пористости предельная поверхность, построенная по экспериментальным данным, оказывается ограниченной в области давлений, превышающих определенную величину, поверхность имеет не только «дно» в области растяжения,

но и «шапку» в области сжатия [2–4], она оказывается замкнутого вида (рис. 2, *a*). Учитывая эту особенность, Рудницкий предложил использовать для описания процесса деформирования с учетом уплотнения предельную поверхность эллиптической формы [5, 6], с полуосями, длина которых есть функции накопленных неупругой объемной и сдвиговой деформации. С этой целью предложены также комбинированные модели, например, в модели Керрола использована комбинация конической поверхности с подвижной параболической поверхностью в области больших давлений.

Основная сложность описания поведения состоит в том, что эти предельные поверхности не являются фиксированными, они меняются в ходе деформирования. На диаграммах нагружения наблюдают участок упрочнения, где приращение пластической деформации происходит с ростом напряжений, за которым следует сброс напряжений, происходит разрушение. В ходе деформирования меняется не только предельная поверхность, но и соотношение между приращениями сдвиговой и объемной частей пластической деформации, т.е. направление вектора пластической деформации. Таким образом, параметры, описывающие поведение среды за пределом упругости, становятся функциями от накопленной пластической деформации и давления.

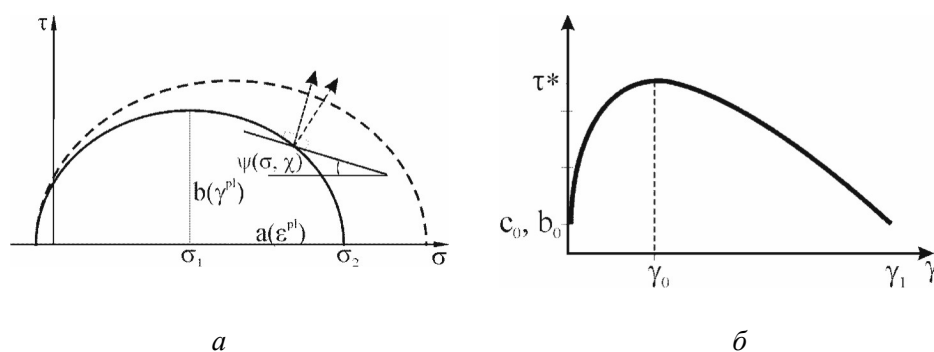


Рис. 2. Эллиптическая предельная поверхность для высокопористых материалов (*a*) и зависимость длины полуоси  $b$  от накопленной пластической деформации сдвига (*б*)

Следует отметить, что участок упрочнения на диаграмме нагружения в таких средах трактовать очень сложно. Формально прочность описывается двумя параметрами: сцеплением и внутренним трением. Однако в эффективное упрочнение вносят вклад геометрические причины. Дилатансионное упрочнение [7, 8] особо проявляет-

ся в стесненных условиях деформирования, когда увеличение объема приводит к росту давления. Это явление имеет особое значение в геомеханических процессах. В [9] было показано, что рост эффективной прочности образца может наблюдаться даже при снижении величины сцепления. В работе, посвященной закономерностям поведения сыпучих сред [10], показано, как эффект дилатансионного упрочнения может быть использован на практике.

Уравнение предельной поверхности модели Друккера–Прагера–Николаевского записывается в виде

$$f = \tau - \alpha\sigma - c,$$

где  $\alpha = \alpha(e^p, \sigma)$ ,  $c = c(e^p, \sigma)$  – коэффициенты внутреннего трения и сцепления,  $\sigma = -\sigma_{kk}/3$  – первый инвариант напряжений,  $\tau = (s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$  – второй инвариант девиатора напряжений. Нормаль к функции

$$g = \tau - \Lambda\sigma$$

определяет направление приращений пластической деформации, где  $\Lambda$  – коэффициент дилатансии. Интенсивность пластической деформации сдвига  $d\gamma^p = 2 \left( (de_{ij})^p (de_{ij})^p / 2 \right)^{1/2}$  будет определяться из соотношения  $d\gamma^p = \frac{\partial g}{\partial \tau} d\lambda$ , а объемная часть пластической деформации

$$d\varepsilon^p = -(d\varepsilon_{kk})^p : d\varepsilon^p = \frac{\partial g}{\partial \sigma} d\lambda.$$

Уравнение предельной поверхности эллиптического типа (см. рис. 2, а), предложенной Рудницким [5, 6] имеет вид

$$f = \frac{\sigma - p_0^2}{a^2} + \frac{\tau^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Как и в предыдущей модели, для вычисления приращений пластических деформаций необходимо задать уравнение пластического потенциала. В случае линейной формы его удобно записать в виде

$$g = \kappa\tau - \beta\sigma,$$

где  $\beta = \sin \psi$ ,  $\kappa = \cos \psi$ ,  $\frac{\beta}{\kappa} = \Lambda$ . Такая форма записи может быть удобна и для модели Друккера–Прагера–Николаевского.

Упрочнение в этих моделях описывалось при помощи соотношения:

$$c(\gamma^p), b(\gamma^p) = h \left( 2 \frac{\gamma}{\gamma_0} - \left( \frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^2 \right), \text{ для } \gamma < \gamma_0,$$

где  $\gamma_0$  – величина предельной деформации (рис. 2, б).

Описание используемого подхода моделирования процессов деформации и необходимые соотношения можно найти в работах [11–13]. Задачи решались в двумерной постановке для условий плоской деформации. Для решения системы уравнений использовалась явная конечно-разностная схема, подробно изложенная в [14].

### **Примеры расчетов**

В связи с тем, что геологические и другие материалы подобного типа обычно находятся в условиях сжатия, экспериментальные исследования осуществляют на образцах при сжатии. Предварительно их подвергают действию определенной обжимающей нагрузки, а затем деформируют в направлении наибольшей оси образца до полного разрушения, сохраняя на боковых поверхностях постоянное значение давления. Размеры образцов обычно составляют несколько сантиметров, а соотношения сторон от 1:1,5 до 1:2,75. Чаще всего с этой целью используют цилиндрические образцы, реже образцы имеют прямоугольную форму.

В данной работе расчеты осуществлялись для условий плоской деформации, что несколько затрудняет сопоставление с экспериментальными данными, т.к. таких измерений существенно меньше.

#### **Квазихрупкое поведение консолидированных сред. Песчаник с малой пористостью**

Рассмотрим поведение образца песчаника с соотношением сторон 1:2,5.

Моделирование процесса деформирования выполним с использованием модели Друккера–Прагера–Николаевского с неассоциированным законом течения. Свойства материала приведены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры модели для плотного песчаника

$\rho$ (г/см <sup>3</sup> )	$K$ (ГПа)	$\mu$ (ГПа)	$c_0$ (МПа)	$\alpha_0$	$\Lambda_0$	$\gamma_0$ (%)	$h$
2,2	12,8	5,3	8	0,57	0,36	$0,1(1+w\sigma/\sigma^*)$ $w=20, \sigma^*=500$ МПа	0,6

На рис. 3, *a, б* приведены кривые нагружения образца при различных давлениях обжатия и распределение интенсивности деформации в образце при обжимающем давлении 50 МПа. На диаграммах можно выделить упругий и пластический участки деформирования. Заметно увеличение эффективной прочности с ростом давления, что связано с более поздним наступлением пластичности, согласно предельной поверхности. Кроме того, хорошо видно, что с ростом обжимающего давления величина пластической деформации, которую испытывает образец до разрушения, увеличивается, более плавным становится и сброс напряжений. Такая особенность поведения соответствует экспериментальным данным о переходе от хрупкого к вязкому характеру поведения материалов при увеличении давления. На рис. 3, *a* проиллюстрировано, что выбор значений коэффициента  $w$  (см. табл. 1) позволяет управлять этим поведением. Началу сброса напряжений соответствует появление полос локализации деформации, пересекающих все сечение образца под углом, определяемым коэффициентами внутреннего трения и дилатансии [7, 8] (рис. 3, *в*). Условие формирования полос локализации в виде отношения для коэффициентов упрочнения, внутреннего трения и дилатансии было получено в [15].

На упругом участке деформирования заметно уменьшение объема, которое затем компенсируется пластическим расширением, кривые зависимости напряжения от объемной деформации на рис. 3, *б* разворачиваются в обратную сторону. Такой вид зависимости напряжений от объемной деформации является типичным для горных пород.

В работе [9] удалось построить необходимые соотношения для параметров модели, при которых кривые зависимости напряжений от осевой и объемной деформаций для образца песчаника при давлении 5 МПа с высокой точностью соответствовали экспериментальным данным, приведенным в работе [16]. Небольшое усовершенствование модели в виде зависимости предельной деформации от дав-



ления позволяет расширить диапазон давлений для моделирования поведения таких материалов с удовлетворительным соответствием экспериментальным наблюдениям.

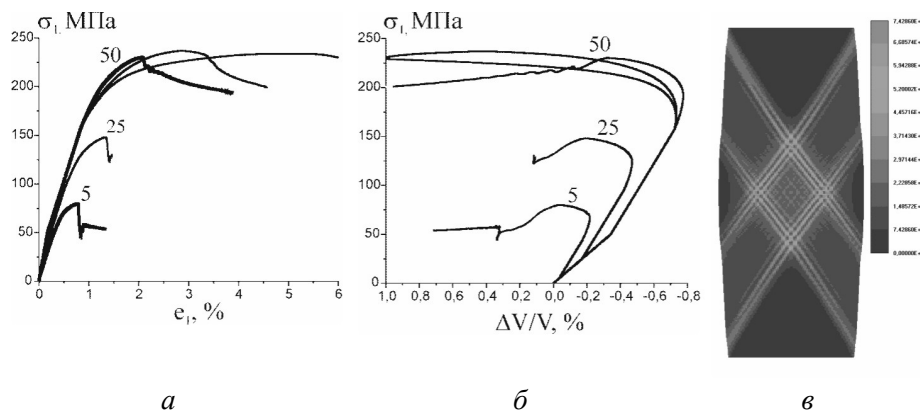


Рис. 3. Кривые нагружения песчаника: (а) зависимость осевой нагрузки от деформации, (б) зависимость осевой нагрузки от изменения объема.

Цифрами над кривыми указано давление обжатия образцов (с).

Распределение интенсивности сдвиговой деформации (%)

в деформированном образце, при  $\sigma_{обж} = 50$  МПа

Таким образом, на участке упрочняющегося поведения можно достичь необходимого согласования с экспериментальными данными. К сожалению, пока не удается описать эффект увеличения прочности образца, который наблюдается при увеличении трения на торцевых нагружаемых поверхностях без явного учета неоднородности материала. В работе [12] было показано, что при явном учете пористости данный эффект проявляется.

### Вязкое разрушение высокопористых материалов

Перейдем к рассмотрению поведения высокопористых материалов. С этой целью воспользуемся предельной поверхностью эллиптического вида.

Свойства материала приведены в табл. 2.

Таблица 2

Параметры модели для высокопористого песчаника

$\rho$ (г/см <sup>3</sup> )	$K$ (ГПа)	$\mu$ (ГПа)	$b_0$ (МПа)	$\sigma_0$ (МПа)	$\sigma_1$ (МПа)	$\gamma_0$ (%)	$\varepsilon_0$ (%)	$h$
1,6	7,6	2,7	30	50	110	1,0	30	5

На рис. 4 показаны кривые нагружения образцов высокопористого песчаника при различной величине обжимающего давления. В противоположность результатам расчетов для песчаника с малой пористостью видно, что увеличение давления обжатия приводит к снижению эффективной прочности. Это следует из эллиптической формы предельной поверхности: чем выше давление, тем более низкий уровень интенсивности касательных напряжений необходим для начала пластической деформации. Процесс уплотнения развивается лишь с ростом величины приложенных напряжений, поэтому характеризуется большим упрочнением.

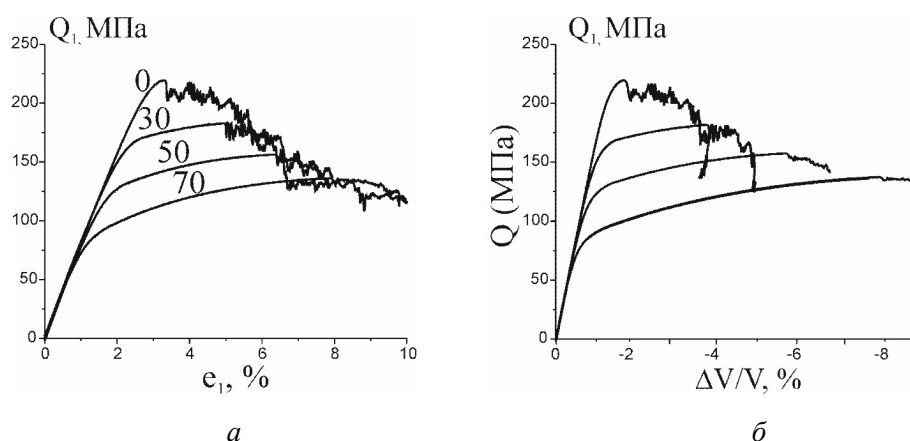


Рис. 4. Кривые нагружения высокопористого песчаника, полученные с использованием эллиптической предельной поверхности ( $Q = \sigma_1 - \sigma_0$ ,  $\sigma_0$  – обжимающее давление)

Объемная деформация тоже ведет себя иначе, чем в рассмотренном выше случае. При больших давлениях пластическая деформация в высокопористых средах протекает с уменьшением объема.

Формирование полос уплотнения нередко проявляется на диаграмме нагружения небольшим сбросом напряжений, образованием «зуба», либо происходит на ее горизонтальном участке [4–5]. Дальнейшее деформирование происходит с ростом напряжений, а полосы локализации нередко расширяются и формируются новые, до тех пор, пока не сформируются условия, обеспечивающие образование полосы локализованного уплотнения-сдвига. Моделирование процесса уплотнения показало, что образование полос локализации не всегда

проявляется на кривых нагружения. Нередко наблюдается формирование полос повышенного, в пределах нескольких процентов, уплотнения. В ходе дальнейшего деформирования эти полосы исчезают, степень уплотнения в образце выравнивается. Вероятно, такая картина наблюдается, в достаточно однородных условиях нагружения, при строго ортогональной ориентации полос уплотнения к оси наибольшего сжатия. В экспериментальных исследованиях также не всегда удается идентифицировать образование зон уплотнения на кривых нагружения [6].

На кривых нагружения на рис. 5. примерно при 8 % деформации заметны небольшие скачки напряжений, которые свидетельствуют о формировании полос локализованного уплотнения. До этого момента средний путь нагружения был направлен в основном вверх по эллиптической поверхности, т.к. хорошо заметен интенсивный рост интенсивности касательных напряжений при существенно меньшем росте гидростатической части, что может говорить о достаточно однородном развитии уплотнения образца. Снижение интенсивности напряжений началось после 7 % при продолжающемся росте давления. Путь нагружения изменил направление в сторону гидростатической части напряжений.

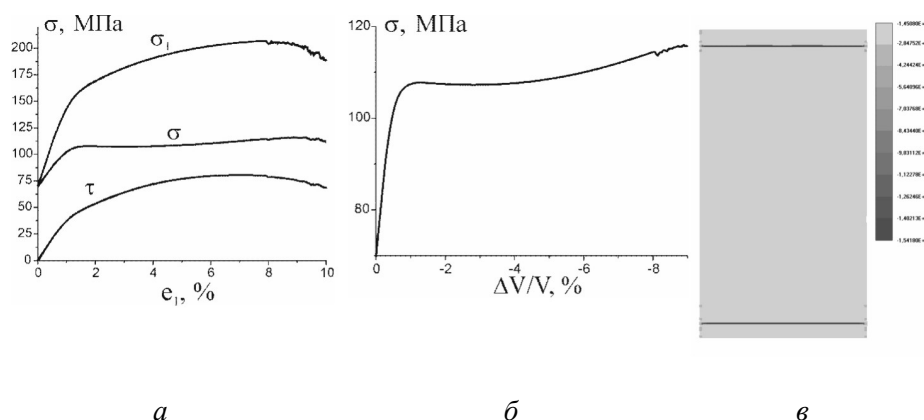


Рис. 5. Кривые нагружения высокопористого песчаника (а, б), полученные с использованием эллиптической предельной поверхности при давлении обжатия 70 МПа. Распределение объемной пластической деформации (%) в начале процесса локализации уплотнения (с)

Остается закономерный вопрос о причинах образования полос локализованного уплотнения. В работе [17] сформулировано условие формирования полос локализованного уплотнения. Однако деформирование с упрочнением, как правило, протекает достаточно однородно и не сопровождается локализацией деформации. Но упрочнение материала зависит от пути нагружения, что особенно сильно проявляется в нелинейных моделях. Поэтому в неоднородной среде и в образцах с границами или конечных размеров, когда напряженно-деформированное состояние не может быть однородным, имеются области, в которых упрочнение минимально, а приращение деформации будет наибольшим, появляется область повышенной деформации, но пока о локализации говорить преждевременно, если процесс развивается с упрочнением. Ускоренный рост деформации в данной области будет иметь место в случае, если будет происходить приращение лишь гидростатической части напряжений, или начнется снижение сдвиговой прочности. При этом часто локализация уплотнения происходит в виде полос, ортогональных оси наибольшего сжатия. Ориентация полос локализации такого типа зависит от наклона огибающей к предельной поверхности и коэффициента дилатансии [17], имеющего в данном случае отрицательное значение.

Очевидно, что данные утверждения относятся к условно однородной среде, т.е. когда неоднородности распределены равномерно, а их масштаб не соизмерим с масштабом зон локализации и тем более исследуемого образца. В реальных материалах именно неоднородности наряду с границами тела являются очагами развития процессов локализации.

### **Заключение**

Существует множество моделей для описания различных особенностей поведения геологических сред и других материалов с подобными свойствами. В этом ряду изучение уплотнения занимает особое место, работ по моделированию данного процесса крайне мало, несмотря на пристальное внимание исследователей к данной проблеме.

Как правило, при изучении поведения таких сложных сред во внимание принимаются явления, связанные только с разрыхлением либо уплотнением, в соответствии с типом исследуемого материала и диапазоном нагрузки. Очевидно, что существует диапазон давле-

ний, когда механизмы разрыхления и уплотнения компенсируют друг друга. Такая ситуация может возникнуть, когда в ходе сдвиговой деформации консолидированной среды разрыхление достигло критической величины. Таким образом, для полноценного описания поведения необходимо принимать во внимание весь спектр возможных явлений, включая образование зон разрыхления и уплотнения, а в некоторых случаях и раскрытие макроскопических трещин. Особенно важно это при решении задач, связанных с горными работами и поведением геологических структур, разломов, поскольку изменение напряженного состояния может привести и смене механизма деформации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 07-05-00274-а, а также проекта Программы Президиума РАН 16.3.

#### **Библиографический список**

1. Друккер Д. Механика грунтов и пластический анализ или предельное проектирование / Д. Друккер, В. Прагер // Механика. Новое в зарубежной науке. Вып. 2. Определяющие законы механики грунтов. – М.: Мир, 1975. – С. 166–177.
2. Schultz R.A. A general framework for the occurrence and faulting of deformation bands in porous granular rocks / R.A. Schultz, R. Siddharthan // *Tectonophysics*. – 2005. – № 411. – P. 1–18.
3. Cuss R.J. The application of critical state soil mechanics to the mechanical behaviour of porous sandstones / R.J. Cuss, E.H. Rutter, R.F. Holloway // *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*. – 2003. – Vol. 40. – P. 848, 847–862.
4. Holcomb D.J. Inelastic constitutive properties and shear localization in Tennessee marble / D.J. Holcomb, J.W. Rudnicki // *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* – 2001. – Vol. 25. – P. 109–129.
5. Grueschow E. Elliptic yield cap constitutive modeling for high porosity sandstone / E. Grueschow, J.W. Rudnicki // *International Journal of Solids and Structures*. – 2005. – Vol. 42. – P. 4574–4587.
6. Acoustic emission and velocities associated with the formation of compaction bands in sandstone / J. Fortin [et al.] // *Journal of Geophysical Research*. – 2006. – Vol. 111B10203, doi: 10.1029/2005JB003854.
7. Николаевский В.Н. Механические свойства грунтов и теория пластичности / В.Н. Николаевский // Механика твердых деформируемых тел. Т. 6: Итоги науки и техники. – М.: ВИНТИ АН СССР, 1972.

8. Гарагаш И.А. Неассоциированные законы течения и локализации пластической деформации / И.А. Гарагаш, В.Н. Николаевский // Успехи механики. – 1989. – Т. 12. – № 1. – С. 131–183.

9. Stefanov Yu.P. Numerical investigation of deformation localization and crack formation in elastic brittle-plastic materials / Yu.P. Stefanov // Int. J. Fract. – 2004. – Vol. 128 (1). – P. 345–352.

10. Ревуженко А.Ф. Механика сыпучей среды / А.Ф. Ревуженко. – Новосибирск: ЗАО ИПП «ОФСЕТ», 2003. – 373 с.

11. Стефанов Ю.П. Локализация деформации и разрушение в геоматериалах. Численное моделирование / Ю.П. Стефанов // Физ. мезомех. – 2002. – № 5. – С. 107–118.

12. Стефанов Ю.П. Некоторые особенности численного моделирования поведения упруго-хрупкопластичных материалов / Ю.П. Стефанов // Физ. мезомех. – 2005. – Т. 8. – № 3. – С. 129–142.

13. Стефанов Ю.П. Моделирование поведения высокопористых геоматериалов при формировании полос локализованного уплотнения / Ю.П. Стефанов, М. Тьерселен. – 2007. – Т. 10. – № 1. – С. 93–106.

14. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений / М.Л. Уилкинс // Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир, 1967. – С. 212–263.

15. Rudnicki J.W. Condition for localization of plastic deformation in pressure sensitive dilatant materials / J.W. Rudnicki, J.R. Rice // J. Mech. and Phys. Solids. – 1975. – Vol. 23. – № 6. – P. 371–390.

16. Labuz J.F. Plane-strain compression of rock-like materials / J.F. Labuz, S.-T. Dai, E. Papamichos // Int. J. of Rock Mech. and Min. Sci. & Geomech. Abstr. – 1996. – Vol. 33. – № 6. – P. 573–584.

17. Issen K. A. Conditions for compaction bands in porous rock / K.A. Issen, J. W. Rudnicki // J. Geophys. Res. – 2000. – Vol. 105. – № 21. – P. 529–536.

Получено 31.08.2007