

УДК 539.3

## ДЕФОРМИРОВАНИЕ БАЛКИ ИЗ ПОВРЕЖДАЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

С.В. Жижерин, В.В. Стружанов (Екатеринбург)

### Abstract

*Kinetic equations of damage accumulation, based on the effect of decreasing of unloading module occurring due to formation of microdamages are used to solve the problem of pure bending of beam and to calculate its maximum bearing capacity. Deformation is assumed to be distributed linearly. Iterative procedures of solution are adduced and numerical example is calculated.*

В работе [1] получены кинетические уравнения накопления повреждений, основанные на использовании эффекта выполаживания модуля разгрузки, которое происходит вследствие образования микроповреждений. Приведены итерационные процедуры решения одномерных задач. В данном исследовании эти положения обобщаются на задачу чистого изгиба балки в предположении о линейном характере распределения деформаций по ее высоте.

1. Свойства материала характеризует полная диаграмма деформирования в координатах нормальные напряжения  $\sigma$  – деформации растяжения-сжатия  $\varepsilon$  (рис.1). Часть диаграммы, соответствующая растяжению, состоит из восходящей и ниспадающей до нуля ветвей. На диаграмме  $\sigma^T$ ,  $\sigma^B$ ,  $\varepsilon^T$ ,  $\varepsilon^B$  – соответственно предел текучести, предел прочности при растяжении и деформации растяжения им отвечающие,  $\varepsilon^Z$  – предельное растяжение. На начальной стадии модуль упругости равен  $E$ , на стадиях упрочнения (восходящая после упругости ветвь) и разупрочнения (падающая ветвь) используется касательный (мгновенный) модуль  $E^p = d\sigma/d\varepsilon$  ( $E^p < E$ ). При сжатии материал полагаем идеально упругим.

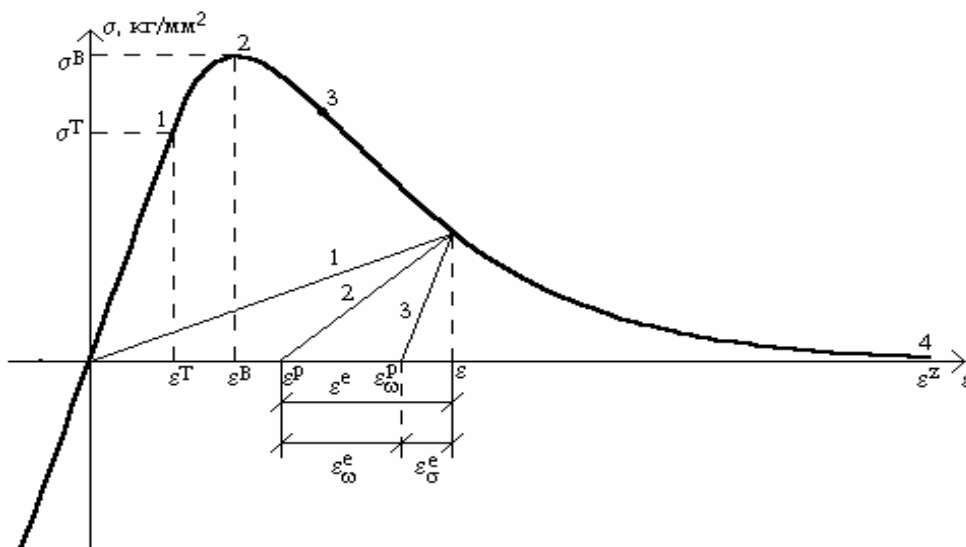


Рис.1. Диаграмма деформирования в координатах нормальные напряжения  $\sigma$  – деформации растяжения-сжатия  $\varepsilon$

В зависимости от процессов, происходящих в материале при деформировании, возможны три варианта разгрузки. Первый – без остаточных деформаций с секущим модулем  $E^s = \sigma/\varepsilon$  (прямая 1, см. рис.1), второй – с образованием остаточных деформаций и модулем разгрузки, равным  $E$  (прямая 3), третий – также с образованием остаточных деформаций и модулем разгрузки  $E^u < E$  (прямая 2). Считаем, что функция  $E^u(\varepsilon) = \sigma/(\varepsilon - \varepsilon^p)$  известна и  $E^u = \sqrt{EE^s}$ .

Такое поведение материала можно объяснить следующим образом. После нагружения в начальный момент в нем возникают напряжения, связанные с деформацией линейным законом упругости. Затем материал стремится снизить уровень напряжений. Для этого существуют два механизма, а именно - пластическая деформация и нарушение сплошности (разрушение на микроуровне). В результате за малый промежуток времени происходит релаксация напряжений. Если явно не проявляются эффекты ползучести, то время релаксации меньше, чем величина, обратная скорости нагружения. Когда релаксация происходит только за счет пластической деформации без разрушения, то реализуется разгрузка по пути 3 (см. рис.1); если только за счет разрушения (образования микропор и микротрещин), то по пути 1. В общем случае, когда имеют место и пластическая деформация, и разрушение на микроуровне - по пути 2. Отсюда отклонение прямой разгрузки от разгрузки по пути 3 характеризует степень поврежденности материала микродефектами.

Запишем уравнение второго закона термодинамики с учетом необратимости и изотермичности процесса деформирования в виде [2]

$$dF = \frac{1}{\rho} \sigma d\varepsilon - dg, \quad (1)$$

где  $F$  – свободная энергия,  $dg \geq 0$  – некомпенсированное тепло,  $\rho$  – плотность материала. Параметрами термодинамического состояния материала являются  $\varepsilon^e$ ,  $\varepsilon^p$  – упругая и пластическая составляющие деформации растяжения ( $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ ) и параметр  $\omega$ , характеризующий поврежденность материала микродефектами. Если упругие свойства материала не зависят от пластических деформаций, то  $F = F(\varepsilon^e, \omega)$ . Тогда уравнение (1) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon^e} - \frac{\sigma}{\rho}\right) d\varepsilon^e + \left(\frac{\partial F}{\partial \omega} d\omega - \frac{\sigma}{\rho} d\varepsilon^p + dg\right) = 0.$$

Отсюда [2]  $\sigma = \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon^e}$ ,  $\rho dg = \sigma d\varepsilon^p - \rho \frac{\partial F}{\partial \omega} d\omega = dg' + dg''$ , где  $dg' = \sigma d\varepsilon^p$  – механическая диссипация,  $dg''$  – диссипация континуального разрушения.

Функция свободной энергии  $F$  определяет ту часть внутренней энергии, которая остается в теле и не переходит в теплоту. Для рассматриваемого процесса деформирования

$$F = \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{2} E \varepsilon^e \varepsilon^e - \frac{1}{2} \omega E \varepsilon^e \varepsilon^e \right), \quad (2)$$

где первый член в скобках является потенциальной энергией упругих деформаций после механической диссипации (релаксации напряжений вследствие пластической деформации), а второй член – энергией, потерянной из-за континуального разрушения (релаксации напряжений вследствие микроразрушений). Тогда, подставляя (2) в выражение для напряжения, получаем

$$\sigma = E \varepsilon^e - \omega E \varepsilon^e = E(1 - \omega)(\varepsilon - \varepsilon^p), \quad (3)$$

где  $E(1-\omega) = E^u$  – модуль разгрузки. Подставляя затем функцию  $F$  в выражение для диссипации, находим

$$dg'' = \frac{1}{2} E \varepsilon^e \varepsilon^e d\omega. \quad (4)$$

Наконец, из (3) следует, что  $\varepsilon^e = \sigma / E + \omega \varepsilon^e = \varepsilon_\sigma^e + \varepsilon_\omega^e$  (см. рис.1). Так как  $\sigma = E^u \varepsilon^e$ , то

$$\omega = 1 - \frac{\varepsilon_\sigma^e}{\varepsilon^e} = 1 - \frac{E^u}{E}, \quad d\omega = -\frac{dE^u}{E}. \quad (5)$$

Далее, используя формулу (3), находим  $d\sigma = E(1-\omega)(d\varepsilon - d\varepsilon^p) - E(\varepsilon - \varepsilon^p)d\omega$ .

С другой стороны, справедливо инкрементальное соотношение  $d\sigma = E^p d\varepsilon$ . Приравняв, получаем дифференциальное уравнение

$$(\varepsilon - \varepsilon^p) \frac{d\omega}{d\varepsilon} + \omega \left(1 - \frac{d\varepsilon^p}{d\varepsilon}\right) = 1 - \frac{E^p}{E} - \frac{d\varepsilon^p}{d\varepsilon} \quad (6)$$

с начальными условиями

$$\omega(0) = 0, \quad \varepsilon^p(0) = 0, \quad E^p(0) = E,$$

или, преобразуя его с учетом выражения для  $d\omega$ , имеем

$$\frac{d\varepsilon^p}{d\varepsilon} = 1 - \frac{E^p}{E^u} + \frac{(\varepsilon - \varepsilon^p)}{E^u} \frac{dE^u}{d\varepsilon}. \quad (7)$$

Если  $\omega = 0$  и не изменяется, то из (6) (или (7)) получаем

$$\frac{d\varepsilon^p}{d\varepsilon} = 1 - \frac{E^p}{E}, \quad d\varepsilon^p = \left(1 - \frac{E^p}{E}\right) d\varepsilon. \quad (8)$$

Если  $\varepsilon^p = 0$  и не изменяется, то

$$\varepsilon \frac{d\omega}{d\varepsilon} + \omega = 1 - \frac{E^p}{E}. \quad (9)$$

Уравнение (6) определяет кинетику совместного формирования поврежденности и пластической деформации, уравнение (8) – кинетику развития пластической деформации при отсутствии поврежденности, а уравнение (9) – кинетику поврежденности при отсутствии пластической деформации. Непосредственно проверяется, что значение  $\omega$  из (5) является общим решением дифференциального уравнения (6) и уравнения (9) при  $E^u = E^s$ .

Относительно слагаемых, входящих в формулу для некомпенсированного тепла, полагаем, что  $dg' \geq 0$  и  $dg'' \geq 0$ . Тогда, подставляя значение  $d\omega$  из (5) в формулу (4) и выражение для  $d\varepsilon^p$  из (7) в формулу для  $dg'$ , получаем неравенства  $E^u > E^p$ ,  $dE^u \leq 0$

и  $dE^u \geq \left(1 - \frac{E^u}{E}\right) E^u \frac{d\sigma}{\sigma}$ . Из последнего неравенства следует, что  $dE^u \leq 0$  как при  $E^p > 0$  ( $d\sigma > 0$ ), так и при  $E^p < 0$  ( $d\sigma < 0$ ). Последнее условие накладывает ограничение на скорость убывания модуля разгрузки, которое обусловлено континуальным разрушением. Оно обеспечивает выполнение неравенства  $d\varepsilon^p \geq 0$  и, следовательно, условия  $dg' \geq 0$ .

Далее естественно полагать, что материал разрушен, если он потерял способность к релаксации напряжений, или, другими словами, не может диссипировать подводимую извне энергию, то есть  $dg' = 0$ ,  $dg'' = 0$ . Отсюда, когда  $\omega = 0$ ,  $d\varepsilon^p \neq 0$  (релаксация только за счет пластической деформации), то получаем при разрушении  $\sigma = 0$ . Из этого условия вытекает также равенство  $\varepsilon = \varepsilon^p$  или  $d\varepsilon = d\varepsilon^p$ . Следовательно,

после разрушения пластическая составляющая деформации совпадает с полной деформацией, а упругая составляющая отсутствует.

Если  $\varepsilon^p = 0$  (релаксация только за счет микроразрушений), то имеем  $d\omega = 0$  или  $\omega = \text{const}$ , то есть поврежденность материала при разрушении достигает постоянного значения. Из равенств (5) вытекает, что разрушение происходит при  $E^u = E^s = 0$  и  $\omega = 1$ .

В общем случае, как правило, сначала выполняется условие  $dg' = 0$ , причем  $\sigma \neq 0$ ,  $d\varepsilon^p = 0$ . Следовательно, материал сначала теряет способность к релаксации напряжений за счет пластической деформации. После этого релаксация идет уже посредством микроповреждений. Разрушение наступает, когда  $dg'' = 0$  (повреждаемость достигает постоянного значения, равного единице).

Вернемся опять к уравнению (3) и запишем его в виде

$$\sigma = E[\varepsilon - \varepsilon^p - \omega(\varepsilon - \varepsilon^p)] = E[\varepsilon - (\varepsilon^p + \varepsilon_\omega^e)] = E(\varepsilon - \varepsilon_\omega^p), \quad (10)$$

где  $\varepsilon_\omega^p$  – величина полной псевдопластической деформации, определяемой разгрузкой с модулем  $E$ . Кинетика ее формирования зависит от изменения  $\varepsilon^p$  и  $\omega$ , а с формальной точки зрения определяется уравнением (8).

2. Рассмотрим теперь чистый изгиб балки прямоугольного поперечного сечения, имеющего высоту  $h$  и ширину  $b$ . Используем формальную связь между напряжениями и деформациями (10). Кроме того, излагаемая ниже методика применима и для случая, когда релаксация идет только за счет пластической деформации ( $\omega = 0$ ).

Деформирование осуществляем либо заданием величины изгибающего момента  $M$  (мягкое нагружение), либо контролируем кривизну балки  $\kappa$  (жесткое нагружение). В первом случае граничные условия

$$b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma(y)y dy = M, \quad b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma(y) dy = 0,$$

во втором  $h\kappa = \varepsilon_c$ . Здесь  $y$  – расстояние от срединной плоскости балки,  $\varepsilon_c$  – сумма абсолютных величин максимальной положительной и отрицательной деформаций.

Данная исходная задача определения напряженно-деформированного состояния разбивается на две, а именно, основную – с законом  $\sigma' = E\varepsilon'$  и с заданными выше граничными условиями и корректирующую – с законом  $\sigma'' = E(e - \varepsilon_\omega^p)$  при  $M = 0$  (или  $\kappa = 0$ ). Здесь  $e$  – полная продольная деформация.

Основная задача является обычной задачей изгиба упругой балки. Ее решение для жесткого нагружения

$$\sigma' = E\kappa y, \quad \varepsilon' = \kappa y, \quad M' = EI\kappa, \quad I = bh^3 / 12, \quad (11)$$

для мягкого нагружения

$$\sigma' = My / I, \quad \varepsilon' = My / EI, \quad \kappa' = M / EI. \quad (12)$$

В первом случае  $M'$  – изгибающий момент, отвечающий  $\kappa$ , во втором  $\kappa'$  – кривизна, отвечающая  $M$ .

Корректирующая задача – это задача об определении остаточных напряжений в балке при заданном распределении остаточной деформации  $\varepsilon_\omega^p(y)$ . Ее решение при  $\kappa = 0$  имеет вид

$$\sigma'' = R^\Phi / bh - E\varepsilon_\omega^p, \quad e' = R^\Phi / Ebh, \quad M'' = -M^\Phi, \quad (13)$$

а при  $M = 0$

$$\sigma'' = M^\Phi y / I + R^\Phi / bh - E\varepsilon_\omega^p, \quad e' = M^\Phi y / EI + R^\Phi / Ebh, \quad \kappa'' = M^\Phi / EI. \quad (14)$$

Здесь  $R^\Phi = bE \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_\omega^p(y) dy$  – фиктивная растягивающая сила,  $M^\Phi = bE \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_\omega^p(y)y dy$  – фиктивный изгибающий момент.

Непосредственно проверяется, что решением исходной задачи при заданном значении  $\varepsilon_\omega^p$  является сумма решений основной и корректирующей задач.

Пусть теперь при некоторых  $M_0, \kappa_0$  балка находится в равновесии и в каждой точке ее сечения известны  $\varepsilon_0, \sigma_0, \varepsilon_{0\omega}^p, \omega_0, E_0^p, E_0^u$ . Увеличим кривизну на  $\Delta\kappa$  и определим параметры нового положения равновесия. Сначала по формулам (11), подставляя вместо  $\kappa$  величину  $\Delta\kappa$ , получаем решение основной задачи  $\varepsilon_1', \sigma_1', M_1'$ . Тогда значения  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \varepsilon_1', \sigma_1 = \sigma_0 + \sigma_1', M_1 = M_0 + M_1'$  представляют собой первое приближение к решению исходной задачи для  $\kappa_1 = \kappa_0 + \Delta\kappa$ . Кроме того, для  $\varepsilon_1$  по диаграмме деформирования находим  $E_1^p, E_1^u$ , затем  $\omega_1 = 1 - E_1^u/E$ .

Далее, используя зависимость (8), куда подставляем  $d\varepsilon = \varepsilon_1', E^p = E_0^p$ , вычисляем  $d\varepsilon_{1\omega}^p$  и по формулам (13), в которых  $\varepsilon_\omega^p$  заменяем на  $d\varepsilon_{1\omega}^p$ , получаем решение корректирующей задачи  $\sigma_1'', \varepsilon_1'', M_1''$ . Тогда второе приближение  $\sigma_2 = \sigma_1 + \sigma_1'', \varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_1'', M_2 = M_1 + M_1''$ . Затем для  $\varepsilon_2$  определяем  $E_2^p, E_2^u, \omega_2$  и  $\varepsilon_{2\omega}^p = \varepsilon_{0\omega}^p + d\varepsilon_{1\omega}^p$ . Снова по формуле (8), где уже  $d\varepsilon = \varepsilon_1', E^p = E_1^p$ , вычисляем  $d\varepsilon_{2\omega}^p$  и процесс повторяется. Схематически приведенная итерационная процедура показана на рис.2 и на рис.3 (прямая 1). Отметим, что процесс сходится, так как ряд  $M_n = M_1 + \sum_{k=1}^{n-1} M_k''$  является монотонно убывающим и ограниченным снизу.

Возмутим теперь положение равновесия, увеличив изгибающий момент на величину  $\Delta M$  ( $M_1 = M_0 + \Delta M$ ). Для определения параметров нового положения равновесия применим ту же итерационную методику, только вместо формул (11), (13) используем формулы (12), (14). На рис.3 этой процедуре отвечает путь, обозначенный цифрой 2.

Однако итерации при мягком нагружении не всегда сходятся. Имеем

$$\kappa_n = \kappa' + \frac{b}{I} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{k=1}^{n-1} d\varepsilon_{k\omega}^p y dy = f_1(\kappa_{n-1}). \quad (15)$$

Формула (15) представляет собой метод простой итерации. Известно [3], что он сходится, если  $|df_1/d\kappa| < 1$  в положении равновесия. Вычисляя данную производную с использованием равенства (8) и условия  $\varepsilon = \kappa(y - y_0)$ , где  $y_0$  – положение горизонтального сечения балки, в котором напряжения и деформации равны нулю, получаем

$$\frac{df_1}{d\kappa} = 1 - \frac{b}{I} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E^p}{E} y(y - y_0) dy.$$

Если при  $y > 0$  существует большая зона разупрочнения ( $E^p < 0$ ), то интеграл в правой части равенства отрицателен и  $df_1/d\kappa > 1$ . В этом случае итерации расходятся. Таким образом, сходимость выражения (15) в данном варианте зависит от наклона падающей ветви, определяемого отрицательным значением  $E_n^p$  в области

разупрочнения, от характеристики упрочнения и сочетания размеров зон упругости, упрочнения и разупрочнения. Однако в любом случае при достаточно малом шаге догружения в наиболее растянутых слоях балки еще до разрушения появляется зона разупрочнения.

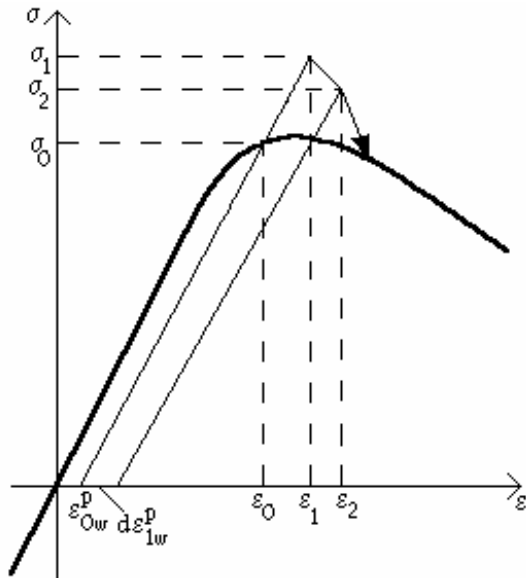


Рис.2. Схема итерационной процедуры

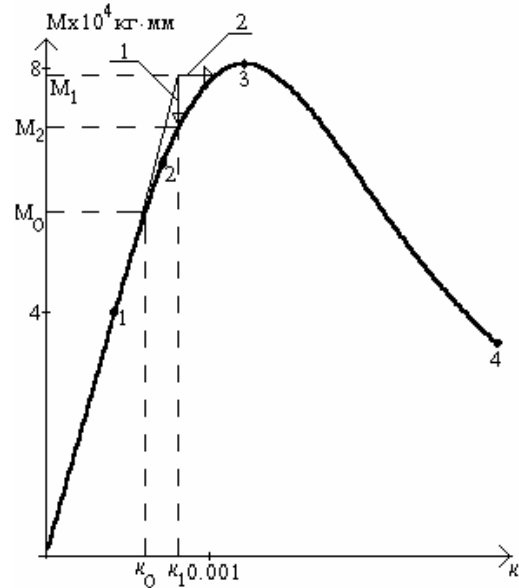


Рис.3. Зависимость  $M - \kappa$

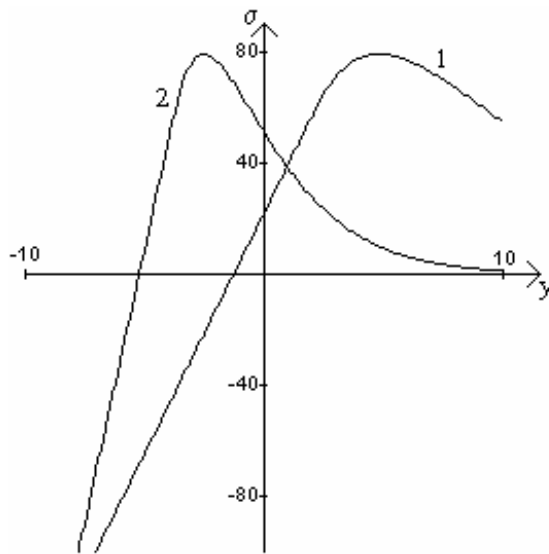


Рис.4. Эпюры напряжений

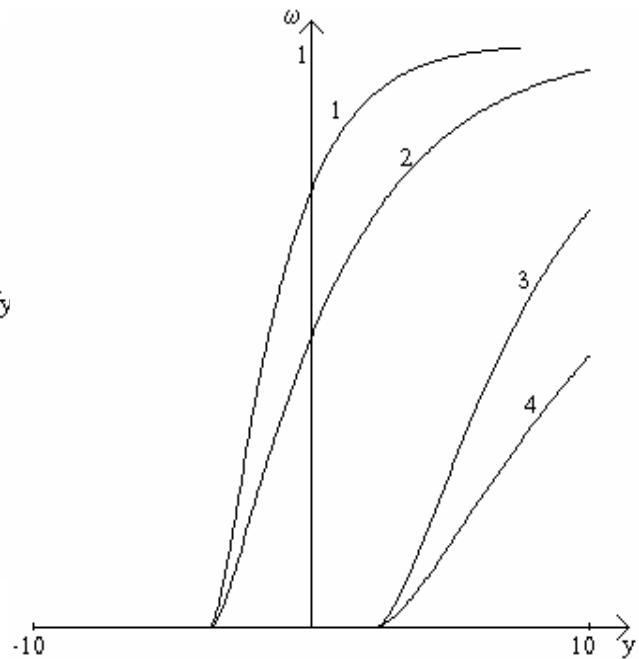


Рис.5. Эпюры повреждаемости

В качестве примера произведем расчеты изгиба балки, свойства материала которой описывает зависимость

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \varepsilon < \varepsilon^T \\ 2.69 E(\varepsilon - 0.00129) \exp\left(\frac{0.00129 - \varepsilon}{0.004}\right), & \varepsilon^T \leq \varepsilon \leq \varepsilon^Z, \end{cases}$$

где  $E = 2 \cdot 10^4 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\varepsilon^T = 0,003$ ,  $\varepsilon^Z = 0,03$ . Полагаем  $b = 10 \text{ мм}$ ,  $h = 20 \text{ мм}$ . При жестком нагружении получаем зависимость  $M - \kappa$ , изображенную на рис.3. Точка 1 отвечает переходу материала наиболее растянутых волокон балки на стадию упрочнения (соответствует точке 1 рис.1), точка 2 – переходу на стадию разупрочнения, точка 4 – разрушению. При мягком нагружении получается только восходящая ветвь диаграммы  $M - \kappa$ . После достижения точки 3 при некоторой величине зоны разупрочнения итерационный процесс расходится, то есть деформирование балки приобретает динамический характер.

На рис.4 показаны эпюры напряжений, отвечающих точке 3 зависимости  $M - \kappa$  (кривая 1) и точке 4 (кривая 2). На рис.5 изображены эпюры повреждаемости, отвечающие соответственно точке 4 (кривая 1 для  $E^u = E^s$ , кривая 2 для  $E^u = \sqrt{EE^s}$ ) и точке 3 (кривая 3 для  $E^u = E^s$ , кривая 4 для  $E^u = \sqrt{EE^s}$ ). Отметим, что при жестком нагружении поврежденность материала наиболее растянутых волокон балки достигает единицы, а при мягком нагружении разрушение этих волокон происходит тогда, когда поврежденность меньше единицы.

3. Рассмотрим теперь задачу изгиба, учитывая в явном виде повреждаемость материала. Исследуем общий случай, когда модуль разгрузки равен  $E^u$  ( $\varepsilon^p \neq 0$ ). При жестком догружении ( $\kappa_1 = \kappa_0 + \Delta\kappa$ ) первое приближение

$$\varepsilon_1 = \kappa_1(y - y_0), \quad \sigma_1 = \sigma(\varepsilon_1).$$

Затем по значениям  $\varepsilon_1$ , используя диаграмму  $\sigma - \varepsilon$ , находим  $E_1^u$  и по формуле (5) вычисляем  $\omega_1$  в каждой точке сечения, после чего определяем  $\varepsilon_1^p$  либо приближенно, решая уравнение (7), либо используя его точное решение  $\varepsilon_1^p = \varepsilon_1 - \frac{\sigma}{E(1 - \omega_1)}$ .

Находим положение нейтральной оси

$$y_0^1 = -\frac{1}{\kappa_1} \frac{-\int_{-h/2}^{h/2} \omega_1 y \kappa_1 + \varepsilon_1^p (1 - \omega_1) dy}{\int_{-h/2}^{h/2} 1 - \omega_1 dy}$$

и второе приближение

$$\varepsilon_2 = \kappa_1(y - y_0^1), \quad \sigma_2 = \sigma(\varepsilon_2),$$

после чего процесс повторяется. По окончании итераций находим значение изгибающего момента

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} b E^u (\kappa_1(y - y_0) - \varepsilon^p) y dy.$$

Процесс итераций соответствует прямой 1 на рис. 3.

При мягком догружении ( $M_1 = M_0 + \Delta M$ ) первое приближение

$$\kappa_1 = \kappa_0 + \Delta M \int_{-h/2}^{h/2} b E_0^u (y - y_0) y dy, \quad \varepsilon_1 = \kappa_1(y - y_0), \quad \sigma_1 = \sigma(\varepsilon_1).$$

Затем находим  $\omega_1, \varepsilon_1^p, y_0^1$  аналогично изложенному в настоящем пункте для жесткого нагружения. Затем определяем фиктивный момент

$$M_1^\Phi = \int_{-h/2}^{h/2} bE^u \varepsilon_1^p y dy$$

и второе приближение для  $\kappa$

$$\kappa_2 = \frac{M_1 + M_1^\Phi}{\int_{-h/2}^{h/2} bE_1^u (y - y_0^1) y dy},$$

после чего итерации повторяются. Описанная процедура схематически показана кривой 2 на рис.3.

Итак, пусть

$$I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} bE^u (y - y_0) y dy, \quad I_2 = M^\Phi = \int_{-h/2}^{h/2} bE^u \varepsilon^p y dy.$$

Тогда итерационная формула для  $\kappa$  принимает вид

$$\kappa_n = f(\kappa_{n-1}) = \frac{M + I_{2n-1}}{I_{1n-1}}.$$

Далее в положении равновесия получаем

$$\frac{df}{d\kappa} = 1 - \frac{1}{I_1} \frac{dM}{d\kappa}.$$

Таким образом, если  $dM/d\kappa > 0$ , то  $df/d\kappa < 1$  и итерации сходятся, если  $dM/d\kappa < 0$ , то расходятся.

В заключение отметим, что численные расчеты по данной методике совпадают с результатами пункта 2. Это объясняется отсутствием зон разгрузки при изгибе балки.

### Библиографический список

1. Стружанов В.В., Жижерин С.В. Об одной модели деформирования повреждающегося материала при одноосном нагружении // Математическое моделирование систем и процессов: Сб. науч. тр./ Перм. гос. техн. ун-т. Пермь, - 1998. - № 6. - С. 119-124.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.2. - М.: Наука. 1970, - 568 с.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1989. - 624 с.

Получено 25.03.99.