УДК 539.3:620.22

ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ДЛЯ ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ КОМПОЗИТОВ

С.Г. Иванов, Д.С. Иванов (Пермь)

Abstract

A well-known correlation approximation is used to solve problems of mathematical physics for unidirectional composites with random structure. An accuracy of evaluation of dispersions of physical fields depending on fiber volume fractions is to be investigated. A statistically isotropic set of structure realizations is constructed for this purpose on the base of periodic structure of unidirectional composite.

Постановки и решения различных задач математической физики для композитов со случайной структурой систематически изложены в монографиях [1,2]. Считается, что заданный тип структуры композита может быть воспроизведен в сколь угодно большом количестве реализаций. Тогда в каждой точке поля с радиусом-вектором $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ может находиться либо материал одного компонента (например, волокна), либо другого (матрицы). Весь набор реализаций структуры характеризуется случайной индикаторной функцией одного из компонентов $\lambda(\mathbf{r})$, принимающей значение 1, если в точке $\mathbf{r}$ оказался этот компонент, и 0 в противном случае. Если математическое ожидание этой индикаторной функции $P = \langle\lambda(\mathbf{r})\rangle$ не зависит от $\mathbf{r}$, а двухточечный корреляционный момент индикаторной функции $K_\lambda^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \langle\lambda^0(\mathbf{r})\cdot\lambda^0(\mathbf{r}')\rangle$ зависит только от разности радиус-векторов точек $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$, то такая структура называется статистически однородной в широком смысле [1]. Здесь $\lambda^0(\mathbf{r})=\lambda(\mathbf{r})-\langle\lambda(\mathbf{r})\rangle$. Большинство применяемых в статистической механике методов основываются на предположении о статистической однородности исследуемых структур. Важным свойством статистически однородных случайных функций является их эргодичность. Статистические характеристики случайных функций, обладающих этим свойством, могут быть определены по одной достаточно представительной реализации.

Для статистически изотропной структуры двухточечный корреляционный момент $K_\lambda^{(2)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ не зависит от направления вектора, соединяющего точки и, таким образом, является функцией только расстояния между ними. Эта функция, называемая корреляционной, построена для различных модельных и реальных трехмерных и двумерных структур в работах, ссылки на которые можно найти в [1-3]. К двумерным случайным структурам относится и структура поперечного сечения однонаправленного композита. Корреляционная функция использовалась в работах [2,4,5] для решения стохастических задач теории упругости в корреляционном приближении. Знание ее конкретного вида для той или иной структуры позволяет определять, например, дисперсию физических полей в компонентах в корреляционном приближении. Однако остаются открытыми вопросы о точности, с которой определяются эти дисперсии, и о влиянии объемной доли волокон как на сами дисперсии, так и на точность их определения. В работе [6] исследовалась зависимость вида корреляционной функции от объемной доли волокон в двухкомпонентном композите.

Следуя [1], нормированная корреляционная функция (отнесенная к соответствующей дисперсии $D_\lambda=P\cdot(1-P)$) представлена через условную вероятность попадания второй точки в материал волокна при условии, что первая точка попала в этот материал:

$$K_{\lambda}^{(2)} = \frac{p_{r/r'}(x) - P}{1 - P}. \qquad (1)$$

За x в (1) обозначено безразмерное расстояние между точками, отнесенное к диаметру волокон. Вероятность $p_{r/r'}(x)$ можно представить как сумму вероятностей событий, состоящих в том, что вторая точка попадает на то же волокно, что и первая, вторая точка попадает на ближайшее в данном направлении соседнее волокно, и т.д. :

$$p_{r/r'}(x) = \sum_{j=1} p^{(j)}(x) \qquad (2)$$

Первое слагаемое этой суммы $p^{(1)}(x)$ для матричного композита с одинаковыми включениями из геометрических соображений вычисляется следующим образом. Смещаем включение в заданном направлении на расстояние x. Отношение пересечения смещенного и несмещенного включения S к объему (площади для плоского случая) включения дает искомую вероятность (рис.1).

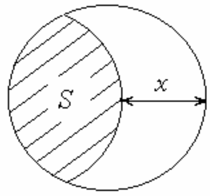

Рис. 1. Условная вероятность попадания двух точек в одно включение

Так, для волокон кругового поперечного сечения в [6] получено :

$$p^{(1)}(x) = \frac{2}{\pi}[\arccos(x) - x \cdot \sqrt{1 - x^2}], \text{ при } 0 \le x \le 1; \quad p^{(1)}_{r|r'} = 0 \text{, при } x > 1. \qquad (3)$$

Из (1) легко видеть, что для разреженных структур при $P \to 0$ нормированная корреляционная функция $K_{\lambda}^{(2)}(x) \to p^{(1)}(x)$. В другом предельном случае при $x \to 0$ для произвольных P в формулу (1) вместо $p_{r/r'}(x)$ можно подставлять $p^{(1)}(x)$.

Для исследования зависимости вида корреляционной функции от объемной доли волокон в [6] использовалось моделирование случайных структур поперечных сечений однонаправленных композитов простым методом Монте-Карло. Сравнение экспериментально построенных корреляционных функций с аналитическими зависимостями вида (1) с заменой $p_{r/r'}(x)$ на $p^{(1)}(x)$ при малых значениях аргумента x для различных объемных долей волокон P показало хорошее соответствие не только для модельных структур с кругами одинакового диаметра, но и для фрагмента структуры реального стеклопластика из [7]. Этот фрагмент показан на рис. 2.

Условные вероятности $p^{(j)}(x)$ для $j>1$ выражаются через $p^{(1)}(x)$ заменой аргумента у функции

$$p^{(j)}(x) = p^{(1)}\left(\sqrt{(l_j^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot l_j \cdot cos\beta_j)}\ \right). \tag{4}$$

Здесь l_j - безразмерное, отнесенное к диаметру круга расстояние между центрами 1-го и j-го кругов, β_j - угол между направлением вектора, соединяющего пару точек (направлением, в котором подсчитывается корреляционная функция), и направлением вектора, соединяющего центры 1-го и j-го кругов. Параметры l_j и β_j, необходимые для аналитического подсчета корреляционной функции, характеризуют взаимное положение кругов и являются случайными величинами для случайной структуры.

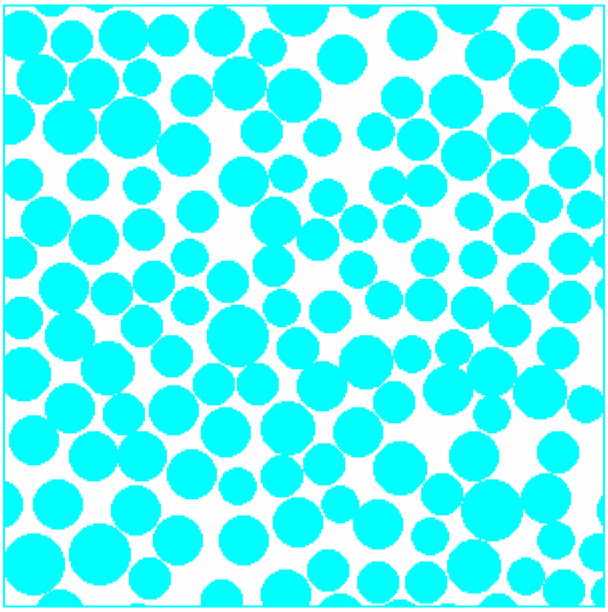

Рис. 2. Фрагмент структуры однонаправленного стеклопластика [6]. Объемная доля волокон 63%

Для того, чтобы исследовать точность корреляционного приближения решений задач математической физики, построим корреляционную функцию для набора реализаций, полученных из одной периодической структуры, путем ее случайных сдвигов. Такой набор реализаций структуры, в отличие от модельных случайных структур, обладает статистической анизотропией. Поэтому организуем статистически изотропный набор реализаций на основе периодической структуры, добавив к случайным сдвигам случайные повороты.

Корреляционную функцию для такого набора реализаций можно получить, осредняя выражение для корреляционной функции в заданном направлении по всем возможным направлениям.

На рис.3 приведена нормированная корреляционная функция для статистически изотропного набора реализаций на основе периодической структуры в сравнении со случайной структурой (см. рис.2) с одинаковой объемной долей волокон. Диаметры кругов в периодической структуре выбирались равными среднему диаметру в случайной структуре.

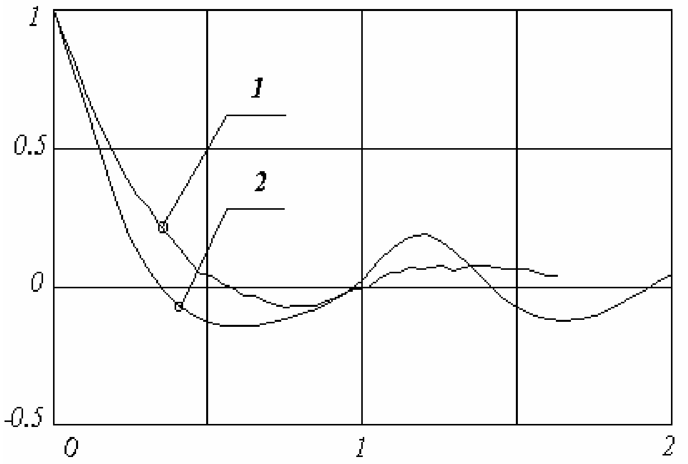

Рис.3. Нормированные корреляционные функции для случайной структуры армированного стеклопластика (1) и статистически изотропного набора реализаций периодической структуры (2) с объемной долей волокон P =63%

Рассмотрим теперь пример задачи математической физики для определения функции координат $\upsilon(\mathbf{r})$ в теле со случайной структурой, удовлетворяющей уравнению

$$(\mathrm{K}(\mathbf{r})\cdot \upsilon_{,i}(\mathbf{r}))_{,i} = 0 \, . \tag{5}$$

Запятой обозначены частные производные по соответствующим координатам, по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2. Функция $\upsilon(\mathbf{r})$ имеет смысл температуры в стационарной задаче теплопроводности или перемещения вдоль направления r_3 в задаче продольного сдвига. Функция $\mathrm{K}(\mathbf{r})$, характеризующая какое-либо физическое свойство тела, является соответственно коэффициентом теплопроводности или продольным модулем сдвига и выражается через соответствующие характеристики компонентов и индикаторную функцию волокон:

$$\mathrm{K}(\mathbf{r}) = \mathrm{K}_1\cdot\lambda(\mathbf{r})+ \mathrm{K}_2\cdot(1-\lambda(\mathbf{r})).$$

При этом пульсация

$$\mathrm{K}^0(\mathbf{r}) = (\mathrm{K}_1 - \mathrm{K}_2) \cdot\lambda^0(\mathbf{r}) \, . \tag{6}$$

Обозначая $u(\mathbf{r}) = \langle\upsilon(\mathbf{r})\rangle$, запишем уравнение для пульсаций $\upsilon^0(\mathbf{r}) = \upsilon(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r})$, используя (5) при условии постоянства осредненных градиентов $u_{,i}(\mathbf{r})$ по объему тела,

$$\langle\mathrm{K}(\mathbf{r})\rangle\cdot \upsilon^0_{,ii}(\mathbf{r}) = - (\mathrm{K}^0(\mathbf{r})\cdot(u_{,i} + \upsilon^0_{,i}(\mathbf{r})))_{,i} \, . \tag{7}$$

Это уравнение требуется решить при условиях $\upsilon^0(\mathbf{r}) = 0$ на границе тела. В корреляционном приближении в правой части уравнения (7) пренебрегаем $\upsilon^0_{,i}(\mathbf{r})$ по сравнению с $u_{,i}$:

$$\langle\mathrm{K}(\mathbf{r})\rangle\cdot \upsilon^0_{,ii}(\mathbf{r}) = - \mathrm{K}^0_{,i}(\mathbf{r})\cdot u_{,i} \, . \tag{8}$$

Как отмечается в [5], если размеры тела неограниченно велики по сравнению с размерами элементов структуры, то решение задачи может быть записано через функцию Грина для неограниченной среды:

$$\upsilon^0(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}\text{-}\mathbf{r}')\cdot K^0_{,i'}(\mathbf{r}')\cdot u_{,i'}\cdot dr'_1\cdot dr'_2\ . \tag{9}$$

Для плоского случая функция Грина имеет вид

$$G(\mathbf{r}) = -\, ln\,|\,\mathbf{r}\,|\,/\,(\,2\cdot\pi\cdot\langle K(\mathbf{r})\rangle\,)\ .$$

Используя выражение (9), найдем дисперсию производных функции $\upsilon^0(\mathbf{r})$ по координатам. Для статистически однородной структуры эта дисперсия не зависит от координат. Воспользовавшись преобразованием полученных интегралов [8], получим вторые производные функций Грина в подынтегральных выражениях. Например, для дисперсии $\langle \upsilon^0_{,1}\cdot\upsilon^0_{,1}\rangle$ будем иметь:

$$\langle \upsilon^0_{,1}\cdot\upsilon^0_{,1}\rangle = E_{11ij}\cdot u_{,i}\cdot u_{,j}\ ; \tag{10}$$

$$E_{11ij} = \int G_{,1i}(\mathbf{r})\cdot G_{,1j}(\mathbf{r}')\cdot\langle K^0(\mathbf{r})\cdot K^0(\mathbf{r}')\rangle\cdot dr'_1\cdot dr'_2\cdot dr_1\cdot dr_2\ . \tag{11}$$

Двухточечный корреляционный момент $\langle K^0(\mathbf{r})\cdot K^0(\mathbf{r}')\rangle$ в (10) выражается через нормированную корреляционную функцию индикаторной функции волокон:

$$\langle K^0(\mathbf{r})\cdot K^0(\mathbf{r}')\rangle = (K_1 - K_2)^2\cdot P\cdot(1\text{-}P)\cdot K_\lambda^{(2)}(|\,\mathbf{r}\text{-}\mathbf{r}'\,|)\ . \tag{12}$$

Подставляя в (12), а затем в (11) построенную корреляционную функцию $K_\lambda^{(2)}(|\,\mathbf{r}\text{-}\mathbf{r}'\,|)$ для статистического изотропного набора реализаций периодической структуры, получим E_{11ij} в корреляционном приближении. С другой стороны, эти величины можно вычислить точно, используя свойство эргодичности случайного набора, из которого следует возможность замены осреднения по реализациям осреднением по объему. Для периодической структуры достаточно осреднения по направлениям в пределах одной ячейки периодичности.

Исследования проводились при поддержке гранта РФФИ 98-01-00996.

Библиографический список

1. Волков С.Д., Ставров В.П. Статистическая механика композиционных материалов. - Минск: Изд.-во БГУ им. В.И.Ленина,1978. - 206 с.
2. Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика деформирования и разрушения структурно неоднородных тел. - М.: Наука, 1984. - 116 с.
3. Гаришин О.К. Геометрический синтез и исследование случайных структур // Структурные механизмы формирования механических свойств зернистых полимерных композитов/ Сб. научн. тр. - Екатеринбург: УрО РАН, 1997. -С.48-81.
4. Танкеева М.Г., Ташкинов А.А., Соколкин Ю.В., Постных А.М. Структурно-феноменологический подход к оценке прочности анизотропных композитных конструкций. - Свердловск, 1989. - (Препринт / УрО АН СССР). - 79 с.

5. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика неупругого деформирования и разрушения композитных материалов / Под ред. Ю.В. Соколкина. - М.: Наука; Физматлит, 1997. - 288 с.
6. Иванов Д.С., Иванов С.Г. К статистическому описанию структуры двухкомпонентных композитов. - Вестник ПГТУ. Механика композитов. - Перм. гос. техн. ун-т. Пермь, 1999 (в печати).
7. Miller A., Wei C., Gibson A.G. Manufacture of polyphenylene sulfide (PPS) matrix composites via the powder impregnation route // Composites, Part A . - 1996. - № 1. - P. 49-56.
8. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. - М.: Наука, 1977. - 400 с.

Получено 26.04.99.