УДК 539.3.

РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ ЗАПИСИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НОВОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

М.У. Никабадзе (Москва)

Abstract

Some various forms of writing of the motion's equations and boundary conditions of the new shells' theory are presented in this work.

Уравнения движения новой теории оболочек (НТО) для любой среды, как известно [1], имеют вид

$$\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\nabla}_{\bar I}\overset{\overset{\circ}{(-)}}{M}{}^{\bar I\bar k}+\overset{\circ}{T}{}^{\bar 3\bar k}+\overset{\overset{\circ}{(-)}}{X}{}^{\bar k}=\overset{\overset{\circ}{(-)}}{W}{}^{\bar k},$$

$$\overset{\overset{\circ}{(+)}}{\nabla}_{\bar I}\overset{\overset{\circ}{(+)}}{M}{}^{\bar I\bar k}-\overset{\circ}{T}{}^{\bar 3\bar k}+\overset{\overset{\circ}{(+)}}{X}{}^{\bar k}=\overset{\overset{\circ}{(+)}}{W}{}^{\bar k}. \tag{1}$$

Здесь $\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\nabla}_{\bar I}$ – $\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\sigma}_{\underset{(-)}{\overset{\circ}{g}}}$ -оператор ковариантной производной [2].

Легко усмотреть, что компоненты тензоров внутренних усилий [1] представляются следующим образом:

$$\overset{\overset{\circ}{(-)}}{M}{}^{\bar I\bar k}=\int_0^1\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\eta}\,\overset{\circ}{g}{}^{I}_{\bar J}\overset{\circ}{P}{}^{\bar J\bar k}\left(1-x^3\right)dx^3=$$

$$=\overset{\circ}{h}\int_0^1\left[\left(1-x^3\right)\overset{\circ}{g}{}^{\bar I}_{J}+x^3\left(\overset{\circ}{g}{}^{\bar I}_{\bar J}\overset{\circ}{g}{}^{\bar M}_{\underset{+}{M}}-\overset{\circ}{g}{}^{\bar I}_{\underset{+}{J}}\right)\right]\overset{\circ}{P}{}^{\bar J\bar k}\left(1-x^3\right)dx^3,$$

$$\overset{\overset{\circ}{(+)}}{M}{}^{\bar I\bar k}=\int_0^1\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\eta}\,\overset{\circ}{g}{}^{I}_{\bar J}\overset{\circ}{P}{}^{\bar J\bar k}x^3dx^3==\overset{\circ}{h}\int_0^1\left[\left(1-x^3\right)\overset{\circ}{g}{}^{\bar I}_{J}+x^3\left(\overset{\circ}{g}{}^{\bar I}_{\bar J}\overset{\circ}{g}{}^{\bar M}_{\underset{+}{M}}-\overset{\circ}{g}{}^{\bar I}_{\underset{+}{J}}\right)\right]\overset{\circ}{P}{}^{\bar J\bar k}x^3dx^3, \tag{2}$$

$$\overset{\circ}{T}{}^{\bar 3\bar k}=\int_0^1\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\eta}\,\overset{\circ}{g}{}^{3}_{\bar n}\overset{\circ}{P}{}^{\bar n\bar k}=\overset{\circ}{Q}{}^{\bar 3\bar k}-\overset{\circ}{g}{}^{\bar 3}_{\underset{+}{M}}\overset{\overset{\circ}{(+)}}{M}{}^{\bar M\bar k}\;;\quad \overset{\circ}{Q}{}^{\bar 3\bar k}=\int_0^1\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\eta}\,\overset{\circ}{P}{}^{\bar 3\bar k}dx^3=\overset{\circ}{h}\int_0^1\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\vartheta}\,\overset{\circ}{P}{}^{\bar 3\bar k}dx^3,$$

где

$$\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\eta}=\sqrt{\overset{\circ}{g}\,\overset{\overset{\circ}{(-)}}{g}{}^{-1}\overset{\circ}{g}_{33}}=\overset{\circ}{h}\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\vartheta},\quad \overset{\overset{\circ}{(-)}}{\vartheta}=\sqrt{\overset{\circ}{g}\,\overset{\overset{\circ}{(-)}}{g}{}^{-1}}=\tfrac{1}{2}\in^{IJ}\in_{KL}\overset{\circ}{g}{}^{\bar K}_{I}\overset{\circ}{g}{}^{\bar L}_{J}=\left(1-x^3\right)^2+x^3\left(1-x^3\right)\overset{\circ}{g}{}^{\bar I}_{\underset{+}{I}}+\left(x^3\right)^2\overset{\overset{\circ}{(\mp)}}{\vartheta},$$

$$\overset{\circ}{g}{}^{\bar 3}_{\underset{+}{M}}=\partial_M\ln\overset{\circ}{h},\quad \overset{\overset{\circ}{(\mp)}}{\vartheta}=\tfrac{1}{2}\in^{IJ}\in_{KL}\overset{\circ}{g}{}^{\bar K}_{\underset{+}{I}}\overset{\circ}{g}{}^{\bar L}_{\underset{+}{J}},$$

$$\overset{\circ}{g}{}^{I}_{\bar J}=\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\vartheta}\in^{IM}\in_{JP}\overset{\circ}{g}{}^{\bar P}_{M}=\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\vartheta}{}^{-1}\left[\left(1-x^3\right)\overset{\circ}{g}{}^{\bar I}_{J}+x^3\left(\overset{\circ}{g}{}^{\bar I}_{\bar J}\overset{\circ}{g}{}^{\bar M}_{\underset{+}{M}}-\overset{\circ}{g}{}^{\bar I}_{\underset{+}{J}}\right)\right],$$

$$\overset{\circ}{g}{}^{\bar 3}_{\bar N}=-\overset{\circ}{g}{}^{\bar 3}_{M}\overset{\circ}{g}{}^{\bar M}_{\bar N}=-x^3\overset{\circ}{g}{}^{\bar 3}_{\underset{+}{M}}\overset{\circ}{g}{}^{\bar M}_{\bar N}=-x^3\overset{\circ}{g}{}^{\bar 3}_{\underset{+}{M}}\overset{\overset{\circ}{(-)}}{\vartheta}{}^{-1}\left[\left(1-x^3\right)\overset{\circ}{g}{}^{\bar M}_{N}+x^3\left(\overset{\circ}{g}{}^{\bar M}_{\bar N}\overset{\circ}{g}{}^{\bar Q}_{\underset{+}{Q}}-\overset{\circ}{g}{}^{\bar M}_{\underset{+}{N}}\right)\right].$$

Заметим, что $\overset{\overset{\circ}{(-)}}{X}{}^{\bar k}$ и $\overset{\overset{\circ}{(+)}}{X}{}^{\bar k}$ представляют собой компоненты внешних сил, $\overset{\overset{\circ}{(-)}}{W}{}^{\bar k}$ и $\overset{\overset{\circ}{(+)}}{W}{}^{\bar k}$ -

компоненты инерционных сил, а $\overset{o}{P}{}^{\bar{n}\bar{k}}$ – $\overset{\overset{o}{(-)}}{\sigma}_{\overset{o}{\underset{(-)}{g}}}$ -компоненты тензора напряжений Пиола.

Соответствующие уравнениям (1) граничные условия, например, имеют следующий вид [1]:

$$\overset{\overset{o}{(-)}}{M}{}^{\bar{I}\bar{k}}\overset{\overset{o}{(-)}}{\nu}_{\bar{I}}=\overset{\overset{o}{(-)}}{S}{}^{\bar{k}} \text{ на } \overset{\overset{o}{(-)}}{\gamma}_1;\ \overset{(-)}{u}=\overset{(-)}{u}_0 \text{ на } \overset{\overset{o}{(-)}}{\gamma}_1,$$
$$\overset{\overset{o}{(+)}}{M}{}^{\bar{I}\bar{k}}\overset{\overset{o}{(-)}}{\nu}_{\bar{I}}=\overset{\overset{o}{(+)}}{S}{}^{\bar{k}} \text{ на } \overset{\overset{o}{(+)}}{\gamma}_1;\ \overset{(+)}{u}=\overset{(+)}{u}_0 \text{ на } \overset{\overset{o}{(+)}}{\gamma}_1, \tag{3}$$

где $\overset{\overset{o}{(-)}}{\gamma}=\overset{\overset{o}{(-)}}{\gamma}_1\cup\overset{\overset{o}{(-)}}{\gamma}_2$ и $\overset{\overset{o}{(+)}}{\gamma}=\overset{\overset{o}{(+)}}{\gamma}_1\cup\overset{\overset{o}{(+)}}{\gamma}_2$ – граничные контуры внутренней $\overset{\overset{o}{(-)}}{\sigma}_o$ и внешней $\overset{\overset{o}{(+)}}{\sigma}_1$ базовых поверхностей соответственно.[1]

Следует заметить, что уравнения (1) и соответствующие граничные условия можно записать и в более краткой форме. В самом деле, умножая первое соотношение (1) на (1-x^3), а второе на x^3, и потом, складывая полученные таким образом соотношения, будем иметь

$$\overset{\overset{o}{(-)}}{\nabla}_{\bar{I}}\overset{o}{M}{}^{\bar{I}\bar{k}}+\left(1-2x^3\right)\overset{o}{T}{}^{\bar{3}\bar{k}}+\overset{o}{X}{}^{\bar{k}}=\overset{\overset{o}{(+)}}{W}{}^{\bar{k}},\ \forall\ x^3\in[0,1], \tag{4}$$

где введены следующие обозначения

$$\overset{o}{M}{}^{\bar{I}\bar{k}}\equiv\left(1-x^3\right)\overset{\overset{o}{(-)}}{M}{}^{\bar{I}\bar{k}}+x^3\overset{\overset{o}{(+)}}{M}{}^{\bar{I}\bar{k}},\ \overset{o}{X}{}^{\bar{I}\bar{k}}\equiv\left(1-x^3\right)\overset{\overset{o}{(-)}}{X}{}^{\bar{I}\bar{k}}+x^3\overset{\overset{o}{(+)}}{X}{}^{\bar{I}\bar{k}},$$
$$\overset{o}{W}{}^{\bar{I}\bar{k}}\equiv\left(1-x^3\right)\overset{\overset{o}{(-)}}{W}{}^{\bar{I}\bar{k}}+x^3\overset{\overset{o}{(+)}}{W}{}^{\bar{I}\bar{k}}. \tag{5}$$

Проводя совершенно аналогичную процедуру, из (3) с учётом (5) получаем

$$\overset{o}{M}{}^{\bar{I}\bar{k}}\overset{o}{\nu}_{\bar{I}}=\overset{o}{S}{}^{\bar{k}} \text{ на } \overset{o}{\gamma}_1;\quad \mathbf{u}=\mathbf{u}_0 \text{ на } \overset{o}{\gamma}_2,\ \forall\ x^3\in[0,1],$$

где

$$\overset{o}{S}{}^{\bar{k}}=\left(1-x^3\right)\overset{\overset{o}{(-)}}{S}{}^{\bar{k}}+x^3\overset{\overset{o}{(+)}}{S}{}^{\bar{k}},\quad u=\left(1-x^3\right)\overset{(-)}{u}+x^3\overset{(+)}{u},\ u_0=\left(1-x^3\right)\overset{(-)}{u}_0+x^3\overset{(+)}{u}_0,$$
$$\overset{0}{\gamma}_1=\left(1-x^3\right)\overset{(-)}{\gamma}_1+x^3\overset{(+)}{\gamma}_1,\ \overset{0}{\gamma}_2=\left(1-x^3\right)\overset{(-)}{\gamma}_2+x^3\overset{(+)}{\gamma}_2.$$

Заметим ещё, что при жёстком защемлении краёв будем иметь

$$\mathbf{u}=0 \text{ на } \overset{0}{\gamma},\quad \forall x^3\in[0,1],$$

а при свободных краях

$$\overset{o}{M}{}^{\bar{I}\bar{k}}\overset{\overset{o}{(-)}}{\nu}_{\bar{I}}=0 \text{ на } \overset{0}{\gamma},\ \forall\ x^3\in[0,1],$$

где
$$\overset{0}{\gamma}=\left(1-x^3\right)\overset{(-)}{\gamma}+x^3\overset{(+)}{\gamma}.$$

Представляя уравнения (1) в более развёрнутом виде, будем иметь

[1] Применяются обычные правила тензорного исчисления [3,4,5]. В основном, остаются в силе обозначения и соглашения, принятые в ранее опубликованных работах. В частности, употребляемые прописные и строчные латинские индексы принимают значения 1,2 и 1,2,3 соответственно.

$$\overset{(-)}{\nabla}{}^{o}_{\bar I}\overset{(-)}{M}{}^{\bar I\bar J}+\left(\overset{o}{g}{}^{\bar J}_{\overset{+}{I}}-\overset{o}{g}{}^{\bar J}_{\bar I}\right)\overset{(-)}{M}{}^{\bar I\bar 3}+\overset{o}{T}{}^{\bar 3\bar J}+\overset{(-)}{X}{}^{\bar J}=\overset{(-)}{W}{}^{\bar J},$$

$$\overset{(+)}{\nabla}{}^{o}_{\bar I}\overset{(+)}{M}{}^{\bar I\bar J}+\left(\overset{o}{g}{}^{\bar J}_{\overset{+}{I}}-\overset{o}{g}{}^{\bar J}_{\bar I}\right)\overset{(+)}{M}{}^{\bar I\bar 3}-\overset{o}{T}{}^{\bar 3\bar J}+\overset{(+)}{X}{}^{\bar J}=\overset{(+)}{W}{}^{\bar J},$$

$$\overset{(-)}{\nabla}{}^{o}_{\bar I}\overset{(-)}{M}{}^{\bar I\bar 3}-\overset{o}{h}{}^{-2}\left(\overset{o}{g}_{\overset{+}{I}\bar K}-\overset{o}{g}_{\bar I\bar K}\right)\overset{(-)}{M}{}^{\bar I\bar K}+\overset{o}{g}{}^{\bar 3}_{\overset{+}{I}}\overset{(-)}{M}{}^{\bar I\bar 3}+\overset{o}{T}{}^{\bar 3\bar 3}+\overset{(-)}{X}{}^{\bar 3}=\overset{(-)}{W}{}^{\bar 3},$$

$$\overset{(+)}{\nabla}{}^{o}_{\bar I}\overset{(+)}{M}{}^{\bar I\bar 3}-\overset{o}{h}{}^{-2}\left(\overset{o}{g}_{\overset{+}{I}\bar K}-\overset{o}{g}_{\bar I\bar K}\right)\overset{(+)}{M}{}^{\bar I\bar K}+\overset{o}{g}{}^{\bar 3}_{\overset{+}{I}}\overset{(-)}{M}{}^{\bar I\bar 3}-\overset{o}{T}{}^{\bar 3\bar 3}+\overset{(+)}{X}{}^{\bar 3}=\overset{(+)}{W}{}^{\bar 3},$$

где $\overset{(+)}{\nabla}{}^{o}_{\bar I}$ — $\overset{(-)}{\sigma}_{o}$ -оператор ковариантной производной.

Аналогично из (4) получаем

$$\overset{(-)}{\nabla}{}^{o}_{\bar I}\overset{o}{M}{}^{\bar I\bar J}+\left(\overset{o}{g}{}^{\bar J}_{\overset{+}{I}}-\overset{o}{g}{}^{\bar J}_{\bar I}\right)\overset{o}{M}{}^{\bar I\bar 3}+\left(1-2\,x^{3}\right)\overset{o}{T}{}^{\bar 3\bar J}+\overset{o}{X}{}^{\bar J}=\overset{o}{W}{}^{\bar J},$$

$$\overset{(-)}{\nabla}{}^{o}_{\bar I}\overset{o}{M}{}^{\bar I\bar 3}-\overset{o}{h}{}^{-2}\left(\overset{o}{g}_{\overset{+}{I}\bar J}-\overset{o}{g}_{\bar I\bar J}\right)\overset{o}{M}{}^{\bar I\bar J}+\overset{o}{g}{}^{\bar 3}_{\overset{+}{I}}\overset{o}{M}{}^{\bar I\bar 3}+\left(1-2\,x^{3}\right)\overset{o}{T}{}^{\bar 3\bar 3}+\overset{o}{X}{}^{\bar 3}=\overset{o}{W}{}^{\bar 3}. \qquad (6)$$

Следует отметить, что в случае оболочек постоянной толщины $\overset{o}{g}{}^{\bar 3}_{\overset{+}{I}}=\partial\ln\overset{o}{h}=0$ и, например , из (6) получаем

$$\overset{(-)}{\nabla}{}^{o}_{\bar I}\overset{o}{M}{}^{\bar I\bar J}+\left(\overset{o}{g}{}^{\bar J}_{\overset{+}{I}}-\overset{o}{g}{}^{\bar J}_{\bar I}\right)\overset{o}{M}{}^{\bar I\bar 3}+\left(1-2\,x^{3}\right)\overset{o}{Q}{}^{\bar 3\bar J}+\overset{o}{X}{}^{\bar J}=\overset{o}{W}{}^{\bar J},$$

$$\overset{(-)}{\nabla}{}^{o}_{\bar I}\overset{o}{M}{}^{\bar I\bar 3}-\overset{o}{h}{}^{-2}\left(\overset{o}{g}_{\overset{+}{I}\bar J}-\overset{o}{g}_{\overset{+}{I}\bar J}\right)\overset{o}{M}{}^{\bar I\bar J}+\left(1-2\,x^{3}\right)\overset{o}{Q}{}^{\bar 3\bar 3}+\overset{o}{X}{}^{\bar 3}=\overset{o}{W}{}^{\bar 3}.$$

Библиографический список

1. Никабадзе М.У. Новая кинематическая гипотеза и новые уравнения движения и равновесия теории оболочек и плоских криволинейных стержней //Вестник Моск. ун-та. Сер. Матем. Механ. - 1991. - №6. С. - 54-61.
2. Никабадзе М.У. Параметризация оболочек на основе двух базовых поверхностей. Деп. в ВИНИТИ АН СССР от 12.07.1988. №5588-В88. - 30 с.
3. Векуа И.Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов.-М.: Наука, 1978.- 96с.
4. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. - М.: Наука, 1980. 521 с.
5. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. - М.: Изд-во МГУ, 1986. 264 с.

Получено 28.04.99.