УДК 539.3

РАЗЛИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТЕНЗОРА ДЕФОРМАЦИЙ КОШИ-ГРИНА И ЛИНЕЙНОГО ТЕНЗОРА ДЕФОРМАЦИЙ И ИХ КОМПОНЕНТ В НОВОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

М.У. Никабадзе (Москва)

Abstract

A new kinematic hypothesis is formulated as well as some various presentations of the Cauchy-Green and linear strain tensors and their components in the new shells' theory are considered in this work.

Рассматриваются две конфигурации пространства оболочки – отсчётная и актуальная. Величины, символы, компоненты тензоров, а иногда и тензоры, относящиеся к отсчётной конфигурации пространства оболочки, снабжаются нуликом сверху, а величины, символы и компоненты тензоров, относящиеся к актуальной конфигурации, пишутся без нулика [1,2,3].

Радиус-векторы произвольных точек пространства оболочки в отсчётной и актуальной конфигурациях задаются соответственно выражениями

$$\overset{\circ}{\vec r}(x^1,x^2,x^3)=(1-x^3)\overset{(\overset{\circ}{-})}{\vec r}(x^1,x^2)+x^3\overset{(\overset{\circ}{+})}{\vec r}(x^1,x^2)=\overset{(\overset{\circ}{-})}{\vec r}(x^1,x^2)+x^3\overset{\circ}{\vec h}(x^1,x^2) \tag{1}$$

и

$$\vec r(x^1,x^2,x^3)=(1-x^3)\overset{(-)}{\vec r}(x^1,x^2)+x^3\overset{(+)}{\vec r}(x^1,x^2)=\overset{(-)}{\vec r}(x^1,x^2)+x^3\vec h(x^1,x^2), \tag{2}$$

где $\overset{(\overset{\circ}{-})}{\vec r}=\overset{(\overset{\circ}{-})}{\vec r}(x^1,x^2)\left(\overset{(-)}{\vec r}=\overset{(-)}{\vec r}(x^1,x^2)\right)$ и $\overset{(\overset{\circ}{+})}{\vec r}=\overset{(\overset{\circ}{+})}{\vec r}(x^1,x^2)\left(\overset{(+)}{\vec r}=\overset{(+)}{\vec r}(x^1,x^2)\right)$ задают внутреннюю $\overset{(\overset{\circ}{-})}{\sigma_0}\left(\overset{(-)}{\sigma_0}\right)$ и внешнюю $\overset{(\overset{\circ}{+})}{\sigma_1}\left(\overset{(+)}{\sigma_1}\right)$ базовые поверхности в отсчётной (актуальной) конфигурации [2-4].

Вектор $\overset{\circ}{\vec h}(x^1,x^2)=\overset{(\overset{\circ}{+})}{\vec r}(x^1,x^2)-\overset{(\overset{\circ}{-})}{\vec r}(x^1,x^2)\left(\vec h(x^1,x^2)=\overset{(+)}{\vec r}(x^1,x^2)-\overset{(-)}{\vec r}(x^1,x^2)\right)$, отображающий внутреннюю базовую поверхность $\overset{(\overset{\circ}{-})}{\sigma_0}\left(\overset{(-)}{\sigma_0}\right)$ на внешнюю $\overset{(\overset{\circ}{+})}{\sigma_1}\left(\overset{(+)}{\sigma_1}\right)$, является (в общем случае, не является) перпендикулярным к внутренней базовой поверхности $\overset{(\overset{\circ}{-})}{\sigma_0}\left(\overset{(-)}{\sigma_0}\right)$ [2,3].

Порождающая новую теорию оболочек новая кинематическая гипотеза заключается в следующем: точка отсчётной конфигурации пространства оболочки с радиус-вектором (1) в актуальной конфигурации займёт положение, определяемое радиус-вектором (2).

Легко усмотреть, что на основании принятой новой кинематической гипотезы параметризации как отсчётная, так и актуальная конфигурации являются новыми параметризациями [4]. В связи с этим, следовательно, соответствующие геометрические объекты этих конфигураций будут отличаться тем, что символы, входящие в геометрические объекты отсчётной конфигурации снабжаются нуликом сверху, а символы актуальной конфигурации надо писать без нулика [2,3]. Притом при выписывании геометрических объектов отсчётной конфигурации необходимо учитывать легко получаемые условия, вытекающие из перпендикулярности вектора $\overset{\circ}{\vec{h}}$ к внутренней базовой поверхности $\overset{(\overset{\circ}{-})}{\sigma}_0$ [4].

Теперь, вводя векторы перемещения внутренней и внешней базовых поверхностей соответственно соотношениями

$$\overset{(-)}{\vec{u}}\left(x^1,x^2\right)=\overset{(-)}{\vec{r}}\left(x^1,x^2\right)-\overset{(\overset{\circ}{-})}{\vec{r}}\left(x^1,x^2\right),\quad \overset{(+)}{\vec{u}}\left(x^1,x^2\right)=\overset{(+)}{\vec{r}}\left(x^1,x^2\right)-\overset{(\overset{\circ}{+})}{\vec{r}}\left(x^1,x^2\right),$$

вектор перемещения произвольной точки пространства оболочки, как легко усмотреть, будет иметь вид [2]

$$\vec{u}\left(x^1,x^2,x^3\right)=\left(1-x^3\right)\overset{(-)}{\vec{u}}\left(x^1,x^2\right)+x^3\,\overset{(+)}{\vec{u}}\left(x^1,x^2\right) \tag{3}$$

Замечание. При изложении материала применяются обычные правила тензорного исчисления [1,5,6]. В основном остаются в силе обозначения и соглашения, принятые в ранее опубликованных работах. В частности, употребляются прописные и строчные латинские индексы. Причём прописные латинские индексы пробегают значения 1,2, а строчные – 1,2,3.

1. **Тензор деформаций Коши-Грина**. Как известно [1,2], этот тензор через вектор перемещения представляется в виде

$$\overset{\circ}{\underset{\sim}{\varepsilon}}=\frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\nabla}\vec{u}+\overset{\circ}{\nabla}\vec{u}^T+\overset{\circ}{\nabla}\vec{u}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\vec{u}^T\right); \tag{4}$$

или в $\overset{\circ}{\sigma}{}_{\tilde{g}}^{x^3}$ - ковариантных компонентах

$$\overset{\theta}{\varepsilon}_{pq}=\frac{1}{2}\left(\overset{\theta}{\nabla}_p\overset{\theta}{u}_q+\overset{\theta}{\nabla}_q\overset{\theta}{u}_p+\overset{\theta}{\nabla}_p\overset{\theta}{u}_m\overset{\theta}{\nabla}_q\overset{\theta}{u}{}^m\right). \tag{5}$$

Легко усмотреть, что на основании (3) градиент вектора перемещения представится в виде [2]

$$\overset{\circ}{\nabla}\vec{u}=\overset{\circ}{\vec{r}}{}^3\left(\overset{(+)}{\vec{u}}-\overset{(-)}{\vec{u}}\right)+\left(1-x^3\right)\overset{\circ}{\nabla}\overset{(-)}{\vec{u}}+x^3\,\overset{\circ}{\nabla}\overset{(+)}{\vec{u}}, \tag{6}$$

или вводя обозначения

$$\vec{\mu}=\overset{(+)}{\vec{u}}-\overset{(-)}{\vec{u}},\quad \overset{(\overset{\circ}{-})}{\underset{\sim}{\mu}}=\overset{\circ}{\nabla}\overset{(-)}{\vec{u}},\quad \overset{(\overset{\circ}{+})}{\underset{\sim}{\mu}}=\overset{\circ}{\nabla}\overset{(+)}{\vec{u}},\quad \overset{\circ}{\underset{\sim}{\mu}}=\left(1-x^3\right)\overset{(\overset{\circ}{-})}{\underset{\sim}{\mu}}+x^3\,\overset{(\overset{\circ}{+})}{\underset{\sim}{\mu}}, \tag{7}$$

будем иметь

$$\overset{\circ}{\nabla}\vec{u}=\overset{\circ}{\vec{r}}{}^3\,\vec{\mu}+\overset{\circ}{\underset{\sim}{\mu}}=\overset{\circ}{\vec{r}}{}^3\,\vec{\mu}+\left(1-x^3\right)\overset{(\overset{\circ}{-})}{\underset{\sim}{\mu}}+x^3\,\overset{(\overset{\circ}{+})}{\underset{\sim}{\mu}}. \tag{8}$$

Учитывая (8) в (4), получим следующее представление тензора деформаций Коши-Грина, а именно

$$\underset{\sim}{\overset{\circ}{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\vec{r}}{}^{3}\,\vec{\mu} + \vec{\mu}\,\overset{\circ}{\vec{r}}{}^{3} + \underset{\sim}{\overset{\circ}{\mu}} + \underset{\sim}{\overset{\circ}{\mu}}{}^{T} + \overset{\circ}{\vec{r}}{}^{3}\,\overset{\circ}{\vec{r}}{}^{3}\,\vec{\mu}\cdot\vec{\mu} + \overset{\circ}{\vec{r}}{}^{3}\,\underset{\sim}{\overset{\circ}{\mu}}\cdot\vec{\mu} + \underset{\sim}{\overset{\circ}{\mu}}\cdot\vec{\mu}\,\overset{\circ}{\vec{r}}{}^{3} + \underset{\sim}{\overset{\circ}{\mu}}\cdot\underset{\sim}{\overset{\circ}{\mu}}{}^{T} \right). \tag{9}$$

Теперь представим (7) и (8), например, в $\overset{\circ}{\sigma}{}_{g}^{x^3}$ –ковариантных компонентах. Легко усмотреть, что будем иметь

$$\overset{\theta}{\mu}_{q} = \overset{(\overset{\theta}{+})}{u}_{q} - \overset{(\overset{\theta}{-})}{u}_{q},\quad \overset{(\overset{\theta}{-})}{\mu}_{pq} = \overset{\theta}{\nabla}_{p}\overset{(\overset{\theta}{-})}{u}_{q},\quad \overset{(\overset{\theta}{+})}{\mu}_{pq} = \overset{\theta}{\nabla}_{p}\overset{(\overset{\theta}{+})}{u}_{q},\quad \overset{\theta}{\mu}_{pq} = \left(1 - x^3\right)\overset{(\overset{\theta}{-})}{\mu}_{pq} + x^3\,\overset{(\overset{\theta}{+})}{\mu}_{pq}, \tag{10}$$

и

$$\overset{\theta}{\nabla}_{p}\overset{\theta}{u}_{q} = \overset{\circ}{g}{}^{3}_{p}\,\overset{\theta}{\mu}_{q} + \overset{\theta}{\mu}_{pq} = \overset{\circ}{g}{}^{3}_{p}\,\overset{\theta}{\mu}_{q} + \left(1 - x^3\right)\overset{(\overset{\theta}{-})}{\mu}_{pq} + x^3\,\overset{(\overset{\theta}{+})}{\mu}_{pq}. \tag{11}$$

Следует заметить, что

$$\overset{(\overset{\theta}{-})}{\mu}_{3q} = \overset{\theta}{\nabla}_{3}\overset{(\overset{\theta}{-})}{u}_{q} = 0,\quad \overset{(\overset{\theta}{+})}{\mu}_{3q} = \overset{\theta}{\nabla}_{3}\overset{(\overset{\theta}{+})}{u}_{q} = 0,\quad \overset{\theta}{\mu}_{3q} = 0. \tag{12}$$

Легко представить также тензор деформации Коши-Грина (9) в $\overset{\circ}{\sigma}{}_{g}^{x^3}$ –ковариантных компонентах. Следовательно, будем иметь

$$\overset{\theta}{\varepsilon}_{pq} = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{g}{}^{3}_{p}\,\overset{\theta}{\mu}_{q} + \overset{\circ}{g}{}^{3}_{q}\,\overset{\theta}{\mu}_{p} + \overset{\theta}{\mu}_{pq} + \overset{\theta}{\mu}_{qp} + \overset{\circ}{g}{}^{3}_{p}\,\overset{\circ}{g}{}^{3}_{q}\,\overset{\theta}{\mu}_{n}\,\overset{\theta}{\mu}{}^{n} + \overset{\circ}{g}{}^{3}_{p}\,\overset{\theta}{\mu}_{qn}\,\overset{\theta}{\mu}{}^{n} + \overset{\circ}{g}{}^{3}_{q}\,\overset{\theta}{\mu}_{pn}\,\overset{\theta}{\mu}{}^{n} + \overset{\theta}{\mu}_{pn}\,\overset{\theta}{\mu}{}_{q}^{\cdot n} \right). \tag{13}$$

Заметим, что (13) можно было получить также подстановкой (11) в (5).

Легко усмотреть, что из (13) с учётом (12) получаем

$$\begin{aligned} \overset{\theta}{\varepsilon}_{PQ} &= \frac{1}{2}\left(\overset{\theta}{\mu}_{PQ} + \overset{\theta}{\mu}_{QP} + \overset{\theta}{\mu}{}_{P\cdot}^{\,n}\,\overset{\theta}{\mu}_{Qn} \right), \\ \overset{\theta}{\varepsilon}_{P3} &= \frac{1}{2}\left(\overset{\theta}{\mu}_{P} + \overset{\theta}{\mu}_{P3} + \overset{\theta}{\mu}_{Pm}\,\overset{\theta}{\mu}{}^{m} \right), \\ \overset{\theta}{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{2}\left(2\,\overset{\theta}{\mu}_{3} + \overset{\theta}{\mu}{}^{m}\,\overset{\theta}{\mu}_{m} \right). \end{aligned} \tag{14}$$

Следует отметить, что тензор деформаций Коши-Грина можно ещё представить в следующем виде:

$$\underset{\sim}{\overset{\circ}{\varepsilon}} = \underset{\sim}{\overset{\circ}{\Delta}}\cdot\cdot\left(\overset{\circ}{\nabla}\vec{u} + \frac{1}{2}\overset{\circ}{\nabla}\vec{u}\cdot\overset{\circ}{\nabla}\vec{u}^{T} \right), \tag{15}$$

где $\underset{\sim}{\overset{\circ}{\Delta}} = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\overset{\circ}{C}}_{II} + \underset{\sim}{\overset{\circ}{C}}_{III} \right)$ – единичный тензор четвёртого ранга [6], а $\underset{\sim}{\overset{\circ}{C}}_{II} = \overset{\circ}{\vec{r}}_{m}\,\overset{\circ}{\vec{r}}_{n}\,\overset{\circ}{\vec{r}}{}^{m}\,\overset{\circ}{\vec{r}}{}^{n}$ и $\underset{\sim}{\overset{\circ}{C}}_{III} = \overset{\circ}{\vec{r}}_{n}\,\underset{\sim}{E}\,\overset{\circ}{\vec{r}}{}^{n}$ – изотропные тензоры четвёртого ранга [1], $\underset{\sim}{E}$ – единичный тензор второго ранга [1,6].

Учитывая (8) в (15), легко получаем

$$\overset{\circ}{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \overset{\circ}{\underset{\sim}{\Delta}}\cdot\left(\overset{\circ}{\vec{r}}{}^{3}\,\vec{\mu} + \overset{\circ}{\underset{\sim}{\mu}} + \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\vec{r}}{}^{3}\,\overset{\circ}{\vec{r}}{}^{3}\,\vec{\mu}\cdot\vec{\mu} + \overset{\circ}{\vec{r}}{}^{3}\,\overset{\circ}{\underset{\sim}{\mu}}\cdot\vec{\mu} + \overset{\circ}{\underset{\sim}{\mu}}\cdot\vec{\mu}\,\overset{\circ}{\vec{r}}{}^{3} + \overset{\circ}{\underset{\sim}{\mu}}\cdot\overset{\circ}{\underset{\sim}{\mu}}{}^{T}\right)\right). \tag{16}$$

Легко усмотреть, что в $\overset{\circ}{\sigma}_{\overset{\circ}{g}}^{x^3}$ –компонентах (16) с учётом (12) представится в виде

$$\begin{aligned}\overset{\theta}{\varepsilon}_{pq} &= \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{g}{}_{p}^{3}\,\overset{\circ}{g}{}_{q}^{l} + \overset{\circ}{g}{}_{p}^{l}\,\overset{\circ}{g}{}_{q}^{3}\right)\overset{\theta}{\mu}_{l} + \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{g}{}_{p}^{K}\,\overset{\circ}{g}{}_{q}^{l} + \overset{\circ}{g}{}_{p}^{l}\,\overset{\circ}{g}{}_{q}^{K}\right)\overset{\theta}{\mu}_{Kl} + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{g}{}_{p}^{3}\,\overset{\circ}{g}{}_{q}^{3}\,\overset{\theta}{\mu}_{n}\,\overset{\theta}{\mu}{}^{n}\,\overset{\circ}{g}{}_{p}^{3}\,\overset{\theta}{\mu}_{qn}\,\overset{\theta}{\mu}{}^{n} + \overset{\circ}{g}{}_{q}^{3}\,\overset{\theta}{\mu}_{pn}\,\overset{\theta}{\mu}{}^{n} + \overset{\theta}{\mu}_{pn}\,\overset{\theta}{\mu}{}_{q\cdot}^{\cdot n}\right).\end{aligned} \tag{17}$$

Теперь выразим компоненты тензора деформаций Коши-Грина через характеристики $\overset{(\overset{\circ}{-})}{\sigma}_{\underset{g}{(\overset{\circ}{-})}}\left(\overset{(\overset{\circ}{+})}{\sigma}_{\underset{g}{(\overset{\circ}{+})}}\right)$- параметризации. С этой целью вспомним, что связь между $\overset{(\overset{\circ}{-})}{\sigma}_{\underset{g}{(\overset{\circ}{-})}}\left(\overset{(\overset{\circ}{+})}{\sigma}_{\underset{g}{(\overset{\circ}{+})}}\right)$- и $\overset{\circ}{\sigma}_{\overset{\circ}{g}}^{x^3}$-компонентами и ковариантными производными от компонент любого тензора, ранг которого не меньше единицы, осуществляется посредством компонент переноса единичного тензора второго ранга (ЕТВР) [2,4]. В частности, имеют место следующие соотношения

$$\begin{aligned}&\overset{\theta}{\mu}_{q} = \overset{\circ}{g}{}_{q}^{\bar{k}}\,\overset{\circ}{\mu}_{\bar{k}}\left(= \overset{\circ}{g}_{q\overset{+}{k}}\,\overset{\circ}{\mu}{}^{\overset{+}{k}}\right), \quad \overset{\theta}{\nabla}_{p}\,\overset{\theta}{u}_{q} = \overset{\circ}{g}{}_{q}^{\bar{k}}\,\overset{(\overset{\circ}{-})}{\nabla}_{\bar{p}}\,\overset{\circ}{u}_{\bar{k}}\left(= \overset{\circ}{g}{}_{q}^{\overset{+}{k}}\,\overset{(\overset{\circ}{+})}{\nabla}_{\overset{+}{p}}\,\overset{\circ}{u}_{\overset{+}{k}}\right), \\ &\overset{\theta}{\mu}_{pq} = \overset{\circ}{g}{}_{q}^{\bar{m}}\,\overset{\circ}{\mu}_{\bar{p}\bar{m}}\left(= \overset{\circ}{g}_{q\overset{+}{n}}\,\overset{\circ}{\mu}{}_{\overset{+}{p}\cdot}^{\cdot\overset{+}{n}}\right), \quad \overset{(\overset{\circ}{\pm})}{\overset{\theta}{\mu}}_{pq} = \overset{\circ}{g}{}_{q}^{\bar{k}}\,\overset{(\overset{\circ}{\pm})}{\mu}_{\bar{p}\bar{m}}\left(= \overset{\circ}{g}{}_{q}^{\overset{+}{n}}\,\overset{(\overset{\circ}{\pm})}{\mu}_{\overset{+}{p}\overset{+}{m}}\right),\end{aligned} \tag{18}$$

сохраняющие силу при любых перемещениях свободных и глухих индексов, за исключением свободного индекса $p = \bar{p} = \overset{+}{p}$ при операторах ковариантных производных.

Следует отметить, что $\overset{\theta}{\nabla}_{p}$ и $\overset{(\overset{\circ}{-})}{\nabla}_{\bar{p}}\left(\overset{(\overset{\circ}{+})}{\nabla}_{\overset{+}{p}}\right)$ – операторы ковариантных производных при $\overset{\circ}{\sigma}_{\overset{\circ}{g}}^{x^3}$- и $\overset{(\overset{\circ}{-})}{\sigma}_{\underset{g}{(\overset{\circ}{-})}}\left(\overset{(\overset{\circ}{+})}{\sigma}_{\underset{g}{(\overset{\circ}{+})}}\right)$- параметризациях соответственно [4].

Легко усмотреть, что

$$\overset{(\overset{\circ}{\pm})}{\mu}_{\bar{3}\bar{m}} = 0\left(\overset{(\overset{\circ}{\pm})}{\mu}_{\overset{+}{3}\overset{+}{m}} = 0\right), \quad \overset{\circ}{\mu}_{\bar{3}\bar{m}} = 0\left(\overset{\circ}{\mu}_{\overset{+}{3}\overset{+}{m}} = 0\right) \tag{19}$$

и, следовательно, на основании соотношений второй строки (18) с учётом (19) опять получаем (12).

Далее для сокращения письма компоненты тензора деформаций Коши-Грина будем выражать только через $\overset{(\overset{\circ}{-})}{\sigma}_{\underset{g}{(\overset{\circ}{-})}}$-характеристики. Из контекста будет видно, что они через $\overset{(\overset{\circ}{+})}{\sigma}_{\underset{g}{(\overset{\circ}{+})}}$-характеристики будут выражаться аналогично.

Легко заметить, что на основании (18), например, (5) и (17) соответственно представляются в виде

$$\overset{\theta}{\varepsilon}_{pq}=\frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{g}{}^{\bar m}_{\bar p}\,\overset{\circ}{g}{}^{\bar n}_{q}+\overset{\circ}{g}{}^{\bar m}_{\bar q}\,\overset{\circ}{g}{}^{\bar n}_{p}\right)\overset{(\overset{\circ}{-})}{\nabla}_{\bar m}\,\overset{\circ}{u}_{\bar n}+\frac{1}{2}\overset{(\overset{\circ}{-})}{\nabla}_{\bar p}\,\overset{\circ}{u}_{\bar m}\,\overset{(\overset{\circ}{-})}{\nabla}_{\bar q}\,\overset{\circ}{u}{}^{\bar m},$$

$$\overset{\theta}{\varepsilon}_{pq}=\frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{g}{}^{3}_{\bar p}\,\overset{\circ}{g}{}^{k}_{q}+\overset{\circ}{g}{}^{3}_{\bar q}\,\overset{\circ}{g}{}^{k}_{p}\right)\overset{\circ}{\mu}_{k}+\frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{g}{}^{\bar M}_{p}\,\overset{\circ}{g}{}^{k}_{q}+\overset{\circ}{g}{}^{\bar M}_{\bar q}\,\overset{\circ}{g}{}^{k}_{p}\right)\overset{\circ}{\mu}_{Mk}+ \tag{20}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{g}{}^{3}_{p}\,\overset{\circ}{g}{}^{\bar 3}_{\bar q}\,\overset{\circ}{\mu}_{\bar n}\,\overset{\circ}{\mu}{}^{n}\,\overset{\circ}{g}{}^{\bar 3}_{\bar p}\,\overset{\circ}{\mu}_{\bar q\bar n}\,\overset{\circ}{\mu}{}^{\bar n}+\overset{\circ}{g}{}^{3}_{q}\,\overset{\circ}{\mu}_{\bar p\bar n}\,\overset{\circ}{\mu}{}^{\bar n}+\overset{\circ}{\mu}_{\bar p\bar n}\,\overset{\circ}{\mu}{}^{\cdot\bar n}_{\bar q\cdot}\right).$$

Из последнего соотношения (20) в свою очередь получаем

$$\overset{\theta}{\varepsilon}_{PQ}=\frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{g}{}^{M}_{\bar P}\,\overset{\circ}{g}{}^{k}_{Q}+\overset{\circ}{g}{}^{M}_{\bar Q}\,\overset{\circ}{g}{}^{k}_{P}\right)\overset{\circ}{\mu}_{\bar M\bar k}+\frac{1}{2}\overset{\circ}{\mu}_{\bar P\bar n}\,\overset{\circ}{\mu}{}^{\cdot\bar n}_{\bar Q\cdot},$$

$$\overset{\theta}{\varepsilon}_{P3}=\frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{g}{}^{k}_{P}\,\overset{\circ}{\mu}_{k}+\overset{\circ}{\mu}_{P3}+\overset{\circ}{\mu}_{\bar P\bar n}\,\overset{\circ}{\mu}{}^{n}\right),\quad \overset{\theta}{\varepsilon}_{33}=\frac{1}{2}\left(2\,\overset{\circ}{\mu}_{\bar 3}+\overset{\circ}{\mu}_{\bar n}\,\overset{\circ}{\mu}{}^{\bar n}\right). \tag{21}$$

Следует отметить, что для выражения компонент тензора деформаций Коши-Грина посредством $\overset{(\overset{\circ}{+})}{\sigma}_{\underset{g}{(\overset{\circ}{+})}}$-характеристик надо воспользоваться помещёнными в круглые скобки соотношениями (18).

2. **Линейный тензор деформаций.** Представления линейного тензора деформаций и его компонент легко получим из приведённых выше соответствующих представлений тензора деформаций Коши-Грина и его компонент, если в них будем пренебрегать произведениями геометрических характеристик. В самом деле, обозначая линейный тензор деформаций через $\overset{\circ}{\underset{\sim}{e}}$, например, из (4), (9) и (16) получаем соответственно

$$\overset{\circ}{\underset{\sim}{e}}=\frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\nabla}\vec u+\overset{\circ}{\nabla}\vec u^{T}\right)=\frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\vec r}{}^{3}\left(\overset{(+)}{\vec u}-\overset{(-)}{\vec u}\right)+\left(\overset{(+)}{\vec u}-\overset{(-)}{\vec u}\right)\overset{\circ}{\vec r}{}^{3}+\left(1-x^{3}\right)\left(\overset{\circ}{\nabla}\overset{(-)}{\vec u}+\overset{\circ}{\nabla}\overset{(-)}{\vec u}{}^{T}\right)+x^{3}\left(\overset{\circ}{\nabla}\overset{(+)}{\vec u}+\overset{\circ}{\nabla}\overset{(+)}{\vec u}{}^{T}\right)\right),$$

$$\overset{\circ}{\underset{\sim}{e}}=\frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\vec r}{}^{3}\vec\mu+\vec\mu\,\overset{\circ}{\vec r}{}^{3}+\overset{\circ}{\underset{\sim}{\mu}}+\overset{\circ}{\underset{\sim}{\mu}}{}^{T}\right)=\frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\vec r}{}^{3}\vec\mu+\vec\mu\,\overset{\circ}{\vec r}{}^{3}+\left(1-x^{3}\right)\left(\overset{(\overset{\circ}{-})}{\underset{\sim}{\mu}}+\overset{(\overset{\circ}{-})}{\underset{\sim}{\mu}}{}^{T}\right)+x^{3}\left(\overset{(\overset{\circ}{+})}{\underset{\sim}{\mu}}+\overset{(\overset{\circ}{+})}{\underset{\sim}{\mu}}{}^{T}\right)\right), \tag{22}$$

$$\overset{\circ}{\underset{\sim}{e}}=\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Delta}}\cdot\left(\overset{\circ}{\vec r}{}^{3}\vec\mu+\overset{\circ}{\underset{\sim}{\mu}}\right)=\overset{\circ}{\underset{\sim}{\Delta}}\cdot\left(\overset{\circ}{\vec r}{}^{3}\vec\mu+\left(1-x^{3}\right)\overset{(\overset{\circ}{-})}{\underset{\sim}{\mu}}+x^{3}\,\overset{(\overset{\circ}{+})}{\underset{\sim}{\mu}}\right).$$

Заметим, что при написании первой строки (22) было учтено соотношение (6), а – последних двух строк (22) – последнее соотношение (7).

Аналогично, обозначая компоненты линейного тензора деформаций через $\overset{\partial}{e}_{pq}$, например, из (17), второго соотношения (20) и (21) получаем соответственно

$$\overset{\theta}{e}_{pq} = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{g}{}^{3}_{p}\, \overset{\circ}{g}{}^{l}_{q} + \overset{\circ}{g}{}^{l}_{p}\, \overset{\circ}{g}{}^{3}_{q}\right)\overset{\theta}{\mu}_{l} + \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{g}{}^{K}_{p}\, \overset{\circ}{g}{}^{l}_{q} + \overset{\circ}{g}{}^{l}_{p}\, \overset{\circ}{g}{}^{K}_{q}\right)\overset{\theta}{\mu}_{Kl},$$

$$\overset{\theta}{e}_{pq} = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{g}{}^{\bar{3}}_{\bar{p}}\, \overset{\circ}{g}{}^{k}_{q} + \overset{\circ}{g}{}^{\bar{3}}_{\bar{q}}\, \overset{\circ}{g}{}^{k}_{p}\right)\overset{\circ}{\mu}_{k} + \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{g}{}^{\bar{M}}_{\bar{p}}\, \overset{\circ}{g}{}^{k}_{q} + \overset{\circ}{g}{}^{\bar{M}}_{\bar{q}}\, \overset{\circ}{g}{}^{k}_{p}\right)\overset{\circ}{\mu}_{\bar{M}k}$$

и

$$\overset{\theta}{e}_{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{g}{}^{\bar{M}}_{\bar{P}}\, \overset{\circ}{g}{}^{k}_{Q} + \overset{\circ}{g}{}^{\bar{M}}_{\bar{Q}}\, \overset{\circ}{g}{}^{k}_{P}\right)\overset{\circ}{\mu}_{\bar{M}k}\,,$$

$$\overset{\theta}{e}_{P3} = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{g}{}^{k}_{P}\, \overset{\circ}{\mu}_{k} + \overset{\circ}{\mu}_{\bar{P}\bar{3}}\right), \quad \overset{\theta}{e}_{33} = \overset{\circ}{\mu}_{3} \qquad (23)$$

Далее не представляет большого труда доказать, что

$$\overset{\circ}{\mu}_{\bar{K}\bar{L}} = \left(1 - x^{3}\right)\overset{(\overset{\circ}{-})}{\mu}_{\bar{K}\bar{L}} + x^{3}\, \overset{(\overset{\circ}{+})}{\mu}_{\bar{K}\bar{L}} = \overset{(\overset{\circ}{-})}{\nabla}_{\bar{K}}\, \overset{\circ}{u}_{\bar{L}} - \overset{\circ}{w}\left(\overset{\circ}{g}_{\bar{K}\bar{L}} - \overset{\circ}{g}_{\overset{+}{K}\overset{-}{L}}\right)\overset{\circ}{h}{}^{-1},$$

$$\overset{(\overset{\circ}{\pm})}{\mu}_{\bar{K}\bar{L}} = \overset{(\overset{\circ}{-})}{\nabla}_{\bar{K}}\, \overset{(\overset{\circ}{\pm})}{u}_{\bar{L}} - \overset{(\overset{\circ}{\pm})}{w}\left(\overset{\circ}{g}_{\bar{K}\bar{L}} - \overset{\circ}{g}_{\overset{+}{K}\overset{-}{L}}\right)\overset{\circ}{h}{}^{-1},$$

$$\overset{\circ}{\mu}{}^{\cdot\bar{L}}_{\bar{K}\cdot} = \overset{(\overset{\circ}{-})}{g}{}^{\bar{L}\bar{N}}\, \overset{\circ}{\mu}_{\bar{K}\bar{N}}, \quad \overset{(\overset{\circ}{\pm})}{\mu}{}^{\cdot\bar{L}}_{\bar{K}\cdot} = \overset{(\overset{\circ}{-})}{g}{}^{\bar{L}\bar{N}}\, \overset{(\overset{\circ}{\pm})}{\mu}_{\bar{K}\bar{N}}, \quad \overset{\circ}{\mu}_{\bar{P}\bar{3}} = \overset{\circ}{h}\overset{\circ}{\psi}_{\bar{P}}, \quad \overset{\circ}{\mu}{}^{\cdot\bar{3}}_{\bar{P}\cdot} = \overset{\circ}{h}{}^{-1}\, \overset{\circ}{\psi}_{\bar{P}}, \quad \overset{\circ}{\mu}_{3} = \overset{\circ}{h}\left(\overset{(\overset{\circ}{+})}{w} - \overset{(\overset{\circ}{-})}{w}\right), \qquad (24)$$

$$\overset{\circ}{\psi}_{\bar{P}} = \left(1 - x^{3}\right)\overset{(\overset{\circ}{-})}{\psi}_{\bar{P}} + x^{3}\, \overset{(\overset{\circ}{+})}{\psi}_{\bar{P}} = \partial_{P}\, \overset{\circ}{w} + \overset{\circ}{u}{}^{\bar{K}}\left(\overset{\circ}{g}_{\overset{-}{P}\overset{-}{K}} - \overset{\circ}{g}_{\overset{+}{P}\overset{-}{K}}\right)\overset{\circ}{h}{}^{-1}, \quad \overset{(\overset{\circ}{\pm})}{\psi}_{\bar{P}} = \partial_{P}\, \overset{(\overset{\circ}{\pm})}{w} + \overset{(\overset{\circ}{\pm})}{u}{}^{\bar{K}}\left(\overset{\circ}{g}_{\overset{-}{P}\overset{-}{K}} - \overset{\circ}{g}_{\overset{+}{P}\overset{-}{K}}\right)\overset{\circ}{h}{}^{-1},$$

где

$$\overset{\circ}{u}_{\bar{k}} = \left(1 - x^{3}\right)\overset{(\overset{\circ}{-})}{u}_{\bar{k}} + x^{3}\, \overset{(\overset{\circ}{+})}{u}_{\bar{k}}, \quad \overset{\circ}{w} = \left(1 - x^{3}\right)\overset{(\overset{\circ}{-})}{w} + x^{3}\, \overset{(\overset{\circ}{+})}{w}, \quad \overset{\circ}{w} = \vec{u}\cdot \overset{(\overset{\circ}{-})}{\vec{n}}, \quad \overset{(\overset{\circ}{\pm})}{w} = \overset{(\pm)}{\vec{u}}\cdot \overset{(\overset{\circ}{-})}{\vec{n}}, \quad \overset{(\overset{\circ}{-})}{\vec{n}} = \left|\overset{\circ}{\vec{h}}\right|^{-1}\overset{\circ}{\vec{h}},$$

а $\overset{(\overset{\circ}{-})}{\nabla}_{\bar{P}} - \overset{(\overset{\circ}{-})}{\sigma}_{\circ}$ - оператор ковариантной производной [3].

Теперь на основании третьей и пятой формул третьей строки (24) компоненты (23) можно еще представить в более подходящем новой теории оболочек виде. Имеем

$$\overset{\theta}{e}_{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{g}{}^{\bar{K}}_{\bar{P}}\, \overset{\circ}{g}{}^{\bar{L}}_{Q} + \overset{\circ}{g}{}^{\bar{K}}_{\bar{Q}}\, \overset{\circ}{g}{}^{\bar{L}}_{P}\right)\overset{\circ}{\mu}_{\bar{K}\bar{L}} + \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{g}{}^{\bar{K}}_{\bar{P}}\, \overset{\circ}{g}{}^{\bar{3}}_{Q} + \overset{\circ}{g}{}^{\bar{K}}_{\bar{Q}}\, \overset{\circ}{g}{}^{3}_{P}\right)\overset{\circ}{h}\overset{\circ}{\psi}_{\bar{K}},$$

$$\overset{\theta}{e}_{P3} = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{g}{}^{k}_{P}\, \overset{\circ}{\mu}_{k} + \overset{\circ}{h}\overset{\circ}{\psi}_{\bar{P}}\right), \quad \overset{\theta}{e}_{33} = \overset{\circ}{h}\left(\overset{(\overset{\circ}{+})}{w} - \overset{(\overset{\circ}{-})}{w}\right) \qquad (25)$$

Следует заметить, что в отличие от названий, принятых в [2,4,5,7], $\overset{\circ}{g}_{p\bar{q}}, \overset{\circ}{g}{}^{\bar{q}}_{p}, \overset{\circ}{g}_{p\overset{+}{q}}, \overset{\circ}{g}{}^{\overset{+}{q}}_{p}, \overset{\circ}{g}_{\overset{+}{p}\overset{-}{q}}, \overset{\circ}{g}{}^{\overset{-}{q}}_{\overset{+}{p}}, \overset{\circ}{g}{}^{\overset{+}{q}}_{\overset{-}{p}}$ называются компонентами переноса ЕТВР. Причем

$\overset{\circ}{g}{}_{pq}^{+-}, \overset{\circ}{g}{}^{\bar{q}}_{\underset{+}{p}} \left(\overset{\circ}{g}{}_{pq}^{-+}, \overset{\circ}{g}{}^{\overset{+}{q}}_{\underset{-}{p}} \right)$ называются основными компонентами переноса ЕТВР, если в качестве основной взята внутренняя (внешняя) базовая поверхность.

Теперь рассмотрим оболочки класса TS (тонкие и пологие) [7]. В этом случае, как легко усмотреть, будем иметь

$$\overset{\circ}{g}_{IJ} \approx \overset{\circ}{g}_{\bar{I}\bar{J}}, \quad \overset{\circ}{g}{}^{\bar{J}}_{I} \approx \overset{\circ}{g}{}^{J}_{\bar{I}}$$

и, например, (25) представится в виде

$$\begin{gathered}
\overset{\theta}{e}_{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{g}{}^{K}_{\bar{P}} \overset{\circ}{g}{}^{L}_{\bar{Q}} + \overset{\circ}{g}{}^{\bar{K}}_{\bar{Q}} \overset{\circ}{g}{}^{L}_{\bar{P}} \right) \overset{\circ}{\mu}_{\overline{KL}} + \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{g}{}^{K}_{\bar{P}} \overset{\circ}{g}{}^{\bar{3}}_{Q} + \overset{\circ}{g}{}^{K}_{\bar{Q}} \overset{\circ}{g}{}^{\bar{3}}_{P} \right) \overset{\circ}{h} \overset{\circ}{\psi}_{\bar{K}}, \\
\overset{\theta}{e}_{P3} = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\mu}_{\bar{P}} + \overset{\circ}{g}{}^{\bar{3}}_{P} \overset{\circ}{h} \left(\overset{\circ}{\overset{(+)}{w}} - \overset{\circ}{\overset{(-)}{w}} \right) + \overset{\circ}{h} \overset{\circ}{\psi}_{\bar{P}} \right), \quad \overset{\theta}{e}_{33} = \overset{\circ}{h} \left(\overset{\circ}{\overset{(+)}{w}} - \overset{\circ}{\overset{(-)}{w}} \right).
\end{gathered} \tag{26}$$

Если оболочка имеет постоянную толщину $\left(\overset{\circ}{h} = \mathrm{const} \right)$, то $\overset{\circ}{g}{}^{\bar{3}}_{P} = x^3 \partial_P \ln \overset{\circ}{h} = 0$ и из (25) получаем

$$\overset{\theta}{e}_{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{g}{}^{K}_{\bar{P}} \overset{\circ}{g}{}^{L}_{\bar{Q}} + \overset{\circ}{g}{}^{K}_{\bar{Q}} \overset{\circ}{g}{}^{L}_{\bar{P}} \right) \overset{\circ}{\mu}_{\overline{KL}}, \quad \overset{\theta}{e}_{P3} = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{g}{}^{\bar{K}}_{P} \overset{\circ}{\mu}_{\bar{K}} + \overset{\circ}{h} \overset{\circ}{\psi}_{\bar{P}} \right), \quad \overset{\theta}{e}_{33} = \overset{\circ}{h} \left(\overset{\circ}{\overset{(+)}{w}} - \overset{\circ}{\overset{(-)}{w}} \right).$$

Наконец, рассмотрим оболочки класса TS, имеющие постоянную толщину. В этом случае, например, из (26) получаем

$$\overset{\theta}{e}_{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{g}{}^{K}_{\bar{P}} \overset{\circ}{g}{}^{\bar{L}}_{Q} + \overset{\circ}{g}{}^{\bar{K}}_{Q} \overset{\circ}{g}{}^{\bar{L}}_{\bar{P}} \right) \overset{\circ}{\mu}_{KL}, \quad \overset{\theta}{e}_{P3} = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\mu}_{\bar{P}} + \overset{\circ}{h} \overset{\circ}{\psi}_{\bar{P}} \right), \quad \overset{\theta}{e}_{33} = \overset{\circ}{h} \left(\overset{\circ}{\overset{(+)}{w}} - \overset{\circ}{\overset{(-)}{w}} \right).$$

Библиографический список

1. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. - М.: Наука, 1980. 512с.
2. Никабадзе М.У. К теории оболочек на основе двух базовых поверхностей, Ч.I. - Деп. в ВИНИТИ АН СССР от 16.11.1988, №8149-В88. 45с.
3. Никабадзе М.У. К теории оболочек на основе двух базовых поверхностей, Ч.II. - Деп. в ВИНИТИ АН СССР от 04.04.1990, №1859-В90. 20с.
4. Никабадзе М.У. Параметризация оболочек на основе двух базовых поверхностей. - Деп. в ВИНИТИ АН СССР от 12.07.1988, №5588-В88. 30с.
5. Векуа И.Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. - М.: Наука, 1978. 295с.
6. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. 264с.
7. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. - М.: Наука, 1982. 288с.