

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЯЧЕЙСТОГО ФРОНТА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ И ФОРМИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ЗАТВЕРДЕВАЮЩЕГО РАСПЛАВА

Н.Д. Няшина, П.В. Трусов (Пермь)

Abstract

In present paper, stability of needle-like crystal which grows in undercooling allow is considered. Instability is characterized by appearance of branches on dendritic main axis. Quasistationary front movement enables to find a automodeling solution for temperature and concentration fields. The stability criterion was established taking into account an influence of concentration undercooling and interphase surface tension. This criterion makes possible to estimate dendritic structure parameters depending on physical constants and crystallization process parameters.

Введение

Качество твердых металлов, получаемых путем направленного затвердевания расплавов, определяется в значительной мере рельефом поверхности раздела фаз.

В данной работе будет рассматриваться бинарный сплав, то есть сплав, состоящий из основного компонента и растворенного. Растворенный компонент имеет более низкую температуру плавления по сравнению с основным (в дальнейшем его будем называть примесью).

Если на межфазной поверхности имеет место равновесие и отсутствует переохлаждение перед зарождающимся кристаллом, а также переохлаждение, связанное с кривизной поверхности раздела, то затвердевание происходит плоским фронтом. Реально же при кристаллизации перед плоским фронтом образуется граничный слой, обогащенный растворенным компонентом.

Образование граничного слоя происходит вследствие зависимости температуры ликвидуса T_L от состава расплава (рис. 1а): чем меньше примеси, тем выше T_L , поэтому сначала кристаллизуется сплав с меньшей долей примеси ($c_s < c_0$), чем исходный состав, при этом избыток растворенного компонента оттесняется в жидкую фазу. Тогда непосредственно перед фронтом кристаллизации оказывается расплав, обогащенный примесью, концентрация которой убывает по мере удаления от фронта до c_0 (рис. 1б). Накопление примеси вблизи фронта приводит к тому, что в этой области T_L ниже, чем в окружающем расплаве (рис. 1в). Плоский фронт будет устойчив, если все точки перед фронтом находятся при температуре выше T_L , так как любой выступ, образовавшийся на гладкой поверхности раздела, оказывается окруженным перегретой относительно T_L жидкостью и снова расплавится; иначе плоский фронт теряет устойчивость [8].

По мере своего роста возмущения формы фронта стабилизируются, при этом граница раздела приобретает форму регулярных гексагональных ячеек [3].

Кроме того, при описании причин неустойчивости плоского фронта следует учесть различные условия теплоотвода от выступающих участков фронта и от плоской межфазной поверхности, а также роль межфазного поверхностного натяжения, которое затрудняет процесс роста выступа, смещая температуру равновесия

фаз в область более низких температур (выступ менее устойчив по отношению к пульсациям температуры, чем плоский фронт)[3,7].

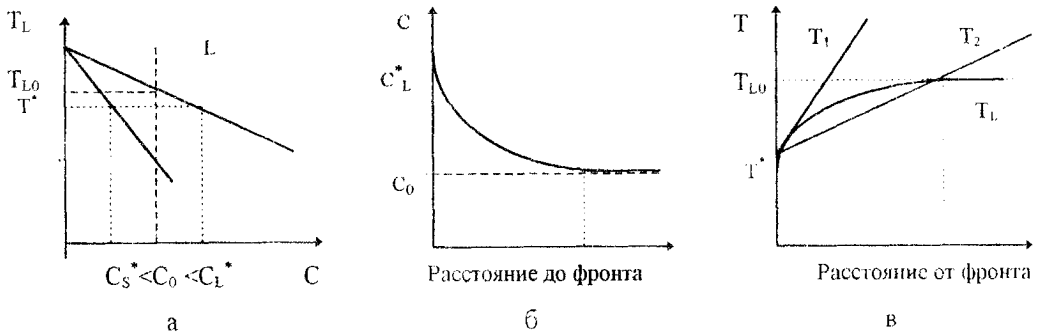


Рис. 1. Схемы к анализу граничного слоя:

а - участок равновесной фазовой диаграммы; б - распределение примеси вблизи фронта; в - распределение температуры вблизи фронта

Итак, при нарушении устойчивости плоского фронта происходит образование правильных ячеек. Появление же дендритов связано с неустойчивостью ячеистых структур, которая обусловлена, по видимому, теми же причинами, что и неустойчивость плоского фронта кристаллизации. Таким образом, устойчивость ячеистого фронта определяется, с одной стороны, концентрационным переохлаждением, с другой, - кривизной фронта и межфазным поверхностным натяжением. Анализ устойчивости позволяет найти зависимости критических характеристик неустойчивых возмущений от критических значений параметров процесса, это позволит выявить те параметры процесса (параметры порядка), которые управляют поведением системы в момент перехода от устойчивости к неустойчивости. Характеристики неустойчивых возмущений можно связать с параметрами структуры кристаллизующегося расплава; в частности, длина волны возмущений плоского фронта может рассматриваться как приближенная оценка характерного расстояния между дендритами, а длина волны возмущений ячеистого фронта - между вторичными ветвями дендрита.

В работах [2,7] рассматривается устойчивость плоского фронта кристаллизации, в первом случае - с учетом концентрационного переохлаждения, во втором - без учета. В представленной работе делается попытка рассмотреть устойчивость ячеистого фронта кристаллизации с учетом как концентрационного переохлаждения, так и межфазного поверхностного натяжения и кривизны поверхности раздела. Это позволит выявить основные параметры, влияющие на устойчивость фронта, а значит, и на формирование структуры кристаллизующегося расплава. Согласно [3] первичная структура закристаллизовавшегося расплава определяет его служебные свойства, поэтому анализ устойчивости дает ключ к возможности управления этими свойствами

Постановка задачи

Будем рассматривать устойчивость ячеистого фронта кристаллизации, считая, что ячейки имеют форму параболоида вращения (z - ось вращения, ρ_0 - радиус кривизны вершины параболы), это соответствует росту в переохлажденном расплаве иглообразного кристалла. Такая форма поверхности и температурное поле вокруг нее были получены при некоторых предположениях Г.П. Иванцовым [4].

Процесс кристаллизации металлического расплава с учетом перераспределения растворенного компонента описывается следующей системой уравнений, дополненной условиями Стефана на поверхности раздела, описанными ниже:

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial t} = a_i \Delta \Theta_i, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = D \Delta \sigma, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

где Θ_1 - температура в жидкой и Θ_2 - в твердой фазах, σ - распределение концентрации примеси в жидкой фазе. Диффузией в твердой фазе и движением расплава пренебрегаем. Зависимость физических характеристик материала от температуры не учитывается. Плотность твердой и жидкой фаз считается одинаковой. На фронте кристаллизации выполняются условия баланса тепла и массы:

$$\lambda_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial n} - \lambda_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial n} = \gamma L n \cdot v, \quad (2)$$

$$D \frac{\partial \sigma}{\partial n} = -(1 - k) \sigma n \cdot v, \quad r \in U,$$

где $U = \{r / \Sigma(t, r) = 0\}$, $\Sigma(t, r) = 0$ задает границу раздела фаз; γ , L - плотность, удельная теплота плавления; k - коэффициент распределения примеси (равен отношению концентрации в момент времени t к начальной концентрации c_0); $\frac{\partial(\cdot)}{\partial n} = n \cdot \nabla(\cdot)$ - производная по направлению единичного вектора нормали к поверхности фронта; v - скорость перемещения поверхности раздела; поверхность раздела пока будем считать изотермической:

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_L, \quad r \in U, \quad (3)$$

где Θ_L - температура фазового перехода без учета перераспределения примеси.

Вдали от фронта задаем условия:

- в расплаве $\sigma \rightarrow c_0, \quad \Theta_1 \rightarrow \Theta_0,$ (4)
- в твердой фазе $\Theta_2 \rightarrow \Theta_{02}.$

В начальный момент времени: $\sigma(0, r) = c_0, \quad \Theta_1(0, r) = \Theta_0, \quad \Theta_2(0, r) = \Theta_{02}.$

Считается, что теплоотвод осуществляется только через твердую фазу.

Изотермическая поверхность раздела, имеющая форму параболоида вращения, является устойчивой в квазистационарном режиме, то есть поля температур и концентрации перемещаются без изменения конфигурации, как жесткое целое, со скоростью v . Так как поверхность раздела фаз изотермическая, вектор ее нормали параллелен градиенту температуры (и концентрации) [1], тогда на поверхности

$$\frac{d\Theta_2(r, t)}{dt} = \frac{\partial \Theta_2}{\partial t} + v \cdot \nabla \Theta_2 = 0 \quad (5)$$

или $\frac{\partial \Theta_2}{\partial t} + v \frac{\partial \Theta_2}{\partial n} = 0 \Rightarrow v = - \frac{\partial \Theta_2}{\partial t} / \frac{\partial \Theta_2}{\partial n}.$

Перемещение поверхности кристалла происходит в направлении, противоположном тепловому потоку, поэтому $v \cdot n = v$ и условие (2₁) на поверхности преобразуется следующим образом:

$$\gamma L \frac{\partial \Theta_2}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial n} \frac{\partial \Theta_2}{\partial n} - \lambda_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial n} \frac{\partial \Theta_2}{\partial n}, \quad r \in U. \quad (6)$$

Введем безразмерные параметры:

- безразмерная температура: $T_i = \frac{\Theta_i}{\Theta_L}$;
- безразмерная концентрация примеси: $c = \frac{\sigma}{c_0} - 1$;
- безразмерная теплоемкость: $\Lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$;
- безразмерная теплота кристаллизации: $R = \frac{L\gamma\nu\rho_0}{2\lambda_2\Theta_L}$;
- безразмерная величина наклона линии ликвидуса на фазовой диаграмме: $M = \frac{m c_0}{\Theta_L}$;
- безразмерная кривизна поверхности раздела (для невозмущенного параболоида вращения она равна 1, но отлична от 1, когда на поверхность раздела накладываются возмущения): $K_1 = K\rho_0$;
- безразмерный коэффициент поверхностного натяжения: $\Gamma_1 = \frac{\Gamma}{\gamma L\rho_0}$;
- безразмерный коэффициент распределения примеси: $P = \frac{1-k}{k}$, (7)

где ν - модуль вектора скорости перемещения поверхности раздела вдоль оси z , m - тангенс угла наклона линии ликвидуса на фазовой диаграмме, K - кривизна поверхности раздела, Γ - коэффициент межфазного поверхностного натяжения

Учитывая осевую симметрию поверхности раздела, можно ограничиться рассмотрением сечения параболоида плоскостью yOz , то есть будет решаться плоская задача. Пусть параболический фронт движется таким образом, что вершина параболы перемещается вдоль оси z со скоростью ν (рис.2), ось y направлена перпендикулярно оси z , начало координат находится в фокусе параболы; тогда уравнения (1) запишутся в виде

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a_i \left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} \right), \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right).$$

Решения уравнений (8) будем искать в виде функции сложного безразмерного аргумента [2]:

$$T_i = T_i \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) = T_i(u), \quad c = c \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) = c(u), \quad (9)$$

$$\rho = z - \nu t + \sqrt{(z - \nu t)^2 + y^2}.$$

Для каждого фиксированного момента времени аргумент u меняется от 0 - бесконечно удаленные точки в твердой фазе, до ∞ - бесконечно удаленные точки в расплаве, $u=1$ соответствует поверхности раздела фаз. Подставляя (9) в систему (8) и используя правила дифференцирования сложной функции ($T_i = T_i(u(t, y, z))$), получим

$$\frac{d^2 T_i}{du^2} + \frac{dT_i}{du} \left(\frac{1}{2u} + \frac{p_i}{2} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{где } p_i = \frac{v\rho_0}{a_i},$$

$$\frac{d^2 c}{du^2} + \frac{dc}{du} \left(\frac{1}{2u} + \frac{q}{2} \right) = 0, \quad \text{где } q = \frac{v\rho_0}{D};$$
(10)

условия на границе раздела фаз:

$$\Lambda \frac{dT_2}{du} - \frac{dT_1}{du} = R, \quad \frac{dc}{du} = -\frac{q}{2} P, \quad T_1 = T_2 = 1, \quad u = 1;$$
(11)

вдали от границы раздела фаз:

$$T_1 \rightarrow T_0, \quad c \rightarrow 0, \quad u \rightarrow \infty,$$

$$T_2 \rightarrow T_{02}, \quad u \rightarrow 0.$$
(12)

Решения уравнений (10) с учетом соответствующих граничных условий имеют вид:

$$T_1(u) = T_0 + \frac{1 - T_0}{\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{p_1}{2}}\right)} \operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{p_1 u}{2}}\right),$$

$$T_2(u) = T_{02} + (1 - T_{02}) \frac{\operatorname{Erf}\left(\sqrt{\frac{p_2 u}{2}}\right)}{\operatorname{Erf}\left(\sqrt{\frac{u}{2}}\right)},$$

$$c(u) = \sqrt{\frac{q\pi}{2}} \exp\left(\frac{q}{2}u\right) P \operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{qu}{2}}\right);$$
(13)

где $\operatorname{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$, $\operatorname{Erfc}(z) = 1 - \operatorname{Erf}(z)$ [8]; соотношения (13) определяют

квазистационарное решение задачи. Условия теплового баланса на границе раздела фаз примут вид

$$\frac{1 - T_{02}}{\operatorname{Erf}\left(\sqrt{\frac{p_2}{2}}\right)} \exp\left(-\frac{p_2}{2}\right) - \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \frac{T_0 - 1}{\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{p_1}{2}}\right)} \exp\left(-\frac{p_1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{p_2}{2}} Q,$$
(14)

$$G_c = M P, \quad \text{то есть } G_c = M \frac{dc}{du}, \quad u = 1,$$

$Q = \frac{L}{c_v}$, где c_v - теплоемкость.

Область концентрационного переохлаждения перед фронтом появляется, если градиент фактической температуры в жидкости пересекает равновесную кривую температуры ликвидуса (рис. 1в) [3]. Чтобы учесть влияние концентрационного переохлаждения и поверхностного натяжения, нужно изменить температурные условия на границе раздела фаз (11):

$$T_1 = T_2 = 1 - M(c+1) + \Gamma_1 K_1, \quad u = 1.$$
(15)

Заметим, что кривизна параболы различна в вершине и вдали от нее, это приводит к невыполнению условия изотермичности поверхности раздела фаз и приведенные выкладки становятся неправомерными. Однако, если рассматривать область

непосредственно вблизи вершины параболы, то условие изотермичности поверхности раздела будет приближенно выполнено, и тогда можно в соотношениях (13,14) изменить константы интегрирования с учетом (15).

Ограничение рассмотрения только области в окрестности вершины параболы оправдано тем, что именно на вершине дендрита при потере устойчивости появляются вторичные ветви [3]. Исследуем устойчивость вершины параболы, внося возмущения на фронте в виде функции $z - vt = Z_1(t, y)$, где $Z_1(t, y)$ - функция, описывающая возмущения поверхности раздела (будем считать их возмущениями плоского фронта $z - vt = \rho_0/2$, но при этом будем учитывать характер распределения температуры и концентрации вблизи вершины параболического фронта); эти возмущения сопровождаются возмущениями $T_i' = T_i - T_{is}$, $c' = c - c_{is}$, $i=1,2$ квазистационарных полей. Величины возмущений считаем малыми, чтобы можно было привести граничные условия при $u' = z - vt = Z_1(t, y)$ к условиям на $u = z - vt = \rho_0/2$, используя разложение в ряд Тейлора.

Компоненты вектора нормали и кривизна вычисляются по формулам

$$\{n_x, n_y\} = \left(1, -\frac{\partial Z_1}{\partial y}\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{\partial Z_1}{\partial y}\right)^2\right)^{-1/2}, \quad K_1 = \frac{\partial^2 Z_1}{\partial y^2} \cdot \left(1 + \left(\frac{\partial Z_1}{\partial y}\right)^2\right)^{-3/2} \quad (16)$$

Записывая систему (1)-(4) для возмущенного и невозмущенного решения, а затем вычитая вторые из первых, получим уравнения эволюции пульсаций:

$$\frac{\partial T_i'}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 T_i'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_i'}{\partial z^2}\right), \quad \frac{\partial c'}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 c'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c'}{\partial z^2}\right), \quad i=1,2; \quad (17)$$

граничные условия на Z_1 приводятся к условиям на $u = z - vt = \rho_0/2$ по методике, изложенной в [3], используя разложение в ряд по Z_1 и сохраняя только линейные члены. Учет концентрационное переохлаждение на вершине параболы

$$\left.\frac{dT_L}{du}\right|_{u=1} < \left.\frac{dT_L}{du}\right|_{u=1} = \frac{dT_L}{dc} \left.\frac{dc}{du}\right|_{u=1} = -M \left.\frac{dc}{du}\right|_{u=1}$$

в виде $T_1(u') - T_1(1) < -M(c(u') - c(1))$, где u' обозначена возмущенная поверхность; после разложения в ряд по Z_1 , сохраняя только линейные члены:

$$\frac{T_0 - T_1(1)}{\rho_0 \left(\text{Erf}\left(\sqrt{\frac{p_1}{2}}\right) - 1\right)} \sqrt{\frac{2p_1}{\pi}} \exp\left(-\frac{p_1}{2}\right) \cdot Z_1 + O(Z_1)^2 < \frac{q}{\rho_0} PM \cdot Z_1 + O(Z_1)^2,$$

или $P_1 Z_1 < G_c Z_1$. Тогда граничные условия (2)-(3) на поверхности раздела для пульсаций представляются в виде ряда по Z_1 (с учетом разложения выражения для кривизны (16) в биномиальный ряд с отрицательным показателем [1]):

$$\begin{aligned} T_i' + \frac{\partial T_i'}{\partial z} Z_1 + M c' + M \frac{\partial c'}{\partial z} Z_1 - \Gamma_1 \frac{\partial^2 Z_1}{\partial y^2} + P_1 Z_1 - G_c Z_1 = 0, \quad i=1,2, \\ \Lambda \frac{\partial \Gamma_2'}{\partial z} - \frac{\partial \Gamma_1'}{\partial z} - \Lambda \frac{\partial Z_1}{\partial y} \frac{\partial \Gamma_2'}{\partial y} + \frac{\partial Z_1}{\partial y} \frac{\partial \Gamma_1'}{\partial y} + \Lambda Z_1 \frac{\partial \Gamma_2'}{\partial z} + Z_1 \frac{\partial \Gamma_1'}{\partial z} - R \frac{\partial Z_1}{\partial t} = 0, \quad (18) \\ \frac{\partial c'}{\partial t} + (1-k)c' + (1-k)Z_1 + \frac{1-k}{k} \frac{\partial Z_1}{\partial t} = 0, \quad \text{при } u' = \frac{\rho_0}{2}. \end{aligned}$$

Граничные условия на бесконечном удалении от поверхности раздела(4):

$$\begin{aligned} c' \rightarrow 0, |T_1| < \infty, z \rightarrow \infty, \\ T_2' \rightarrow 0, z \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (19)$$

Начальные условия следуют из вида возмущений, которые задаются гармониками

$$\{T_2', T_1', c', Z_1\} = \{A_1(z), B_1(z), C_1(z), D_1\} e^{\mu t + i\omega y}. \quad (20)$$

Тогда решения системы с учетом граничных условий (19):

$$\{T_2', T_1', c', Z_1\} = \{A_1 e^{\alpha_2 z}, B_1 e^{-\alpha_1 z}, C_1 e^{-\beta z}, D_1\} e^{\mu t + i\omega y}, \quad (21)$$

где $\alpha_1 = \sqrt{\omega^2 + \frac{\mu}{a_1}}$, $\alpha_2 = \sqrt{\omega^2 + \frac{\mu}{a_2}}$, $\beta = \sqrt{\omega^2 + \frac{\mu}{D}}$, A_1, B_1, C_1 - константы интегрирования, определяемые из (18). Итак, подставляя (21) в (18), получим систему линейных алгебраических уравнений, из которой найдем константы интегрирования:

$$\begin{cases} 0 \cdot A_1 + e^{-\alpha_1 \rho_0 / 2} B_1 + M e^{-\beta \rho_0 / 2} C_1 + (\Gamma_1 \omega^2 + P_1 - G_c) D_1 = 0, \\ e^{\alpha_2 \rho_0 / 2} A_1 + 0 \cdot B_1 + M e^{-\beta \rho_0 / 2} C_1 + (\Gamma_1 \omega^2 + P_1 - G_c) D_1 = 0, \\ \Lambda \alpha_2 e^{\alpha_2 \rho_0 / 2} A_1 + \alpha_1 e^{-\alpha_1 \rho_0 / 2} B_1 + 0 - R \mu D_1 = 0, \\ 0 \cdot A_1 + 0 \cdot B_1 + (\mu + 1 - k) e^{-\beta \rho_0 / 2} C_1 + \left(1 + k + \frac{1 - k}{k} \mu\right) D_1 = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Система (22) разрешима, если ее определитель равен 0, то есть

$$\left[M \left(1 - k + \frac{1 - k}{k} \mu\right) - (\mu + 1 - k) (\Gamma_1 \omega^2 + P_1 - G_c) \right] \cdot (\Lambda \alpha_2 + \alpha_1) - R \mu (\mu + 1 - k) = 0. \quad (23)$$

Соотношение (23) определяет в неявном виде зависимость инкремента нарастания возмущений μ от физических свойств расплава и параметров процесса; оно задает некоторую гиперповерхность $\mu(\omega, P_1, R, G_c, \dots)$ в пространстве параметров [3]. Нарушению устойчивости соответствует изменение знака действительной части μ с отрицательного на положительный. Полагая в (23) $\mu=0$, получаем уравнение границ устойчивости и неустойчивости в пространстве параметров и волнового числа ω . Критическое значение некоторого параметра, например $G_c = G_{c*}$ определяется из условия, что кривая $\mu = \mu(\omega, G_c)$ (при фиксированных остальных параметрах), представляющая собой сечение гиперповерхности плоскостью $G_c = G_{c*}$, лежит ниже плоскости $\mu=0$ везде, за исключением точки $\omega = \omega_*$, в которой она касается плоскости. Тогда при $G_c < G_{c*}$ спонтанно возникающие возмущения формы фронта затухают; при $G_c = G_{c*}$ появляются незатухающие возмущения с волновым числом ω_* ; при $G_c > G_{c*}$ существует непрерывный интервал волновых чисел, соответствующих нарастающим возмущениям. Таким образом, можно установить зависимость параметров дендритной структуры от какого-либо параметра процесса, зафиксировав остальные параметры. Например, длину волны возмущения (измеряемую в метрах) $l_* = 2\pi/\omega_*$ на ячеистом фронте можно рассматривать в первом приближении как расстояние между вторичными ветвями дендрита, так как появление вторичных ветвей на главной оси дендрита связано с потерей устойчивости вершины дендрита; ветви, появившиеся на вершине дендрита, в дальнейшем или продолжают расти, или расплавляются. Линейный анализ устойчивости дает лишь критерий их появления; для того, чтобы проследить эволюцию ветвей, необходима нелинейная постановка задачи.

Используя физические константы, приведенные в [9], были получены некоторые результаты. На рис.3-5 приведены зависимости длины волны возмущения от параметров M, G_c, Γ_1 , характеризующих наклон линии ликвидуса на фазовой

диаграмме, влияние коэффициента диффузии в жидкой фазе и кривизну поверхности раздела; с увеличением M и G_c длина волны устойчивого возмущения уменьшается, с увеличением Γ_1 - увеличивается.

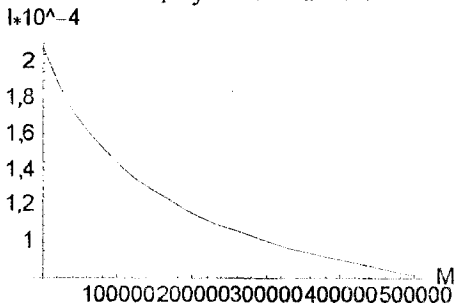


Рис.3. Длина волны критического возмущения в зависимости от параметра M

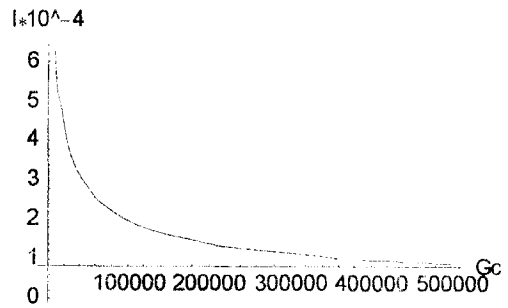


Рис.4. Длина волны критического возмущения в зависимости от параметра G_c

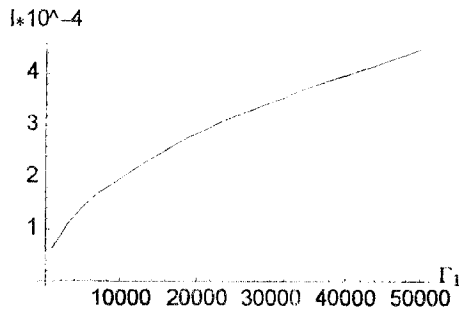


Рис.5. Длина волны критического возмущения в зависимости от параметра Γ_1

Итак, в рамках линейной теории устойчивости рассматривается устойчивость возмущений на ячеистом фронте кристаллизации с учетом концентрационного переохлаждения и межфазного поверхностного натяжения. Получен критерий устойчивости фронта, который позволяет установить зависимости некоторых параметров дендритной структуры от параметров процесса кристаллизации и физических констант.

Библиографический список

1. Бернштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. - М.: Наука, 1986. 544с.
2. Бувечич Ю.А., Исакова Л.Ю., Мансуров В.В. Нелинейная устойчивость и формирование структур при направленном затвердевании бинарного сплава. Ч I // Расплавы. 1989. №6. С. 44-50
3. Ефимов В.А. Разливка и кристаллизация стали. - М.: Металлургия, 1976. 552с.
4. Иванцов Г.П. Температурное поле вокруг шарообразного, цилиндрического и иглообразного кристалла, растущего в переохлажденном расплаве // ДАН СССР. 1947. Т.58. №4. С. 567-570
5. Корн Г. Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1968. 720с.

6. Любов Б.Я. Теория кристаллизации в больших объемах. - М.: Наука, 1975. 256с.
7. Langer J.S., Muller-Krumbhaar Theory of dendritic growth. I. Element of stability analysis// Acta Met. 1978. Vol.26, №. 11. P.1681 - 1687.
8. Цаплин А.И. Теплофизика внешних воздействий при кристаллизации стальных слитков на машинах непрерывного литья. - Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1995. 238с.
9. Флемингс М. Процессы затвердевания / Пер. с англ. - М.: Мир, 1977. 424с.