

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ МИКРОМЕХАНИКИ ДЛЯ ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

А.Н. Аношкин (Пермь)

### Abstract

*The iteration scheme of spatial nonelastic micromechanical problem solution for an unidirectional fiber-reinforced composite are proposed. This scheme consists in sequential solution of the in-plane and antiplane micromechanical problems for the composite. Due to the method of local approximation the micromechanical problems transfer to the boundary-value problems for the structural fragments of the composite. The stress and strain fields in fibers and matrix in these fragments are calculated by FEM. The matrix constitutive equations include formulas of deformation theory of plasticity and stiffness reduction relations for zones where the strength criterion is violated. Fibers were elastic and nonfracturing. The composite stress-strain diagrams and strength surface for the unidirectional glass-epoxy composite subjected transversal compression and longitudinal shear were calculated.*

Расчет многослойных конструкций из композиционных материалов (КМ) требует знания механических характеристик отдельных однонаправленных слоев. Слои в составе конструкции работают, как правило, при сложном напряженном состоянии, сопротивляясь действию осевых продольных и поперечных нагрузок, а также сдвигу в продольной и поперечной плоскости. В настоящее время получено достаточно большое число решений задач микромеханики для простых условий нагружения монослоя - однонаправленного волокнистого композиционного материала (ОВКМ), позволяющих вычислить поля микронапряжений, микродеформаций и эффективные механические свойства композита [1-6]. Общая задача теории упругости о пространственном напряженном состоянии слоя при этом разделяется на три частные задачи: сдвиг в плоскости слоя (атиплоский сдвиг), продольное растяжение или сжатие и комбинированное нагружение в плоскости слоя [1,2,3]. В результате решения данных задач удастся определить все эффективные упругие характеристики слоя, а также оценить его прочность при простейших условиях нагружения, используя данные о деформативных и прочностных свойствах структурных элементов. Для оценки прочности композита в условиях сложного напряженного состояния используются гипотезы о преимущественных механизмах разрушения структурных элементов, определяемых в результате решения частных задач [2]. Непосредственное использование метода суперпозиций для получения решения задачи микромеханики возможно лишь в рамках линейной теории упругости. Однако уже при сравнительно небольших нагрузках в матрице или волокнах композита вследствие концентрации микронапряжений возникают зоны нелинейного деформирования или разрушения, которые и определяют его макроскопическое поведение. Численное прямое решение нелинейной пространственной задачи для неоднородного слоя весьма трудоемко. В работах [7,8] предложен оригинальный алгоритм решения пространственных упругопластических задач, возникающих при правке прокатных профилей. В его

основе лежит идея “расщепления” пространственной задачи на две - задачу о плоском деформированном состоянии и о продольном изгибе, с последующим итерационным решением в приращениях по шагам.

В настоящей работе для решения задачи микромеханики о произвольном пространственном нагружении ОВКМ (слоя) предлагается использовать аналогичный метод пошаговой суперпозиции с итерационным уточнением решений двух нелинейных задач - плоской задачи о произвольном трансверсальном нагружении слоя в условиях обобщенного плоского напряженного или деформированного состояния и антиплоской задачи о продольном сдвиге.

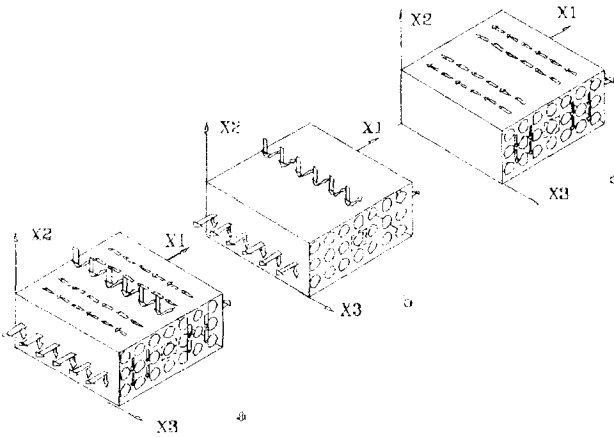


Рис.1 Расчетная схема пространственной задачи микромеханики для однонаправленного волокнистого композита

Общая математическая постановка задачи заключается в решении следующей системы уравнений:

$$\sigma_{ij,j}(\bar{r}) = 0 \quad ; \quad \epsilon_{ij}(\bar{r}) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(\bar{r}) + u_{j,i}(\bar{r})) \quad ; \quad \sigma_{ij}(\bar{r}) = C_{ijkl}(\bar{r}, \Phi, \omega, I_1) \epsilon_{kl}(\bar{r}) \quad ;$$

$$C_{ijkl}(\bar{r}, \Phi, \omega, I_1) = C_{ijkl}^{(1)}(\Phi, \omega, I_1) \lambda^{(1)}(\bar{r}) + C_{ijkl}^{(2)} \lambda^{(2)}(\bar{r}) \quad ; \quad I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad ;$$

$$(1)$$

$$\lambda^{(p)}(\bar{r}) = \begin{cases} 1 & , \bar{r} \in V_p \\ 0 & , \bar{r} \notin V_p \end{cases}$$

где  $\tilde{\sigma}(\bar{r})$  и  $\tilde{\epsilon}(\bar{r})$  - тензоры напряжений и деформаций,  $\tilde{C}^{(p)}$  и  $\lambda^{(p)}(\bar{r})$  - тензор упругих модулей и индикаторная функция p-го структурного компонента КМ,  $\omega(\epsilon_i)$  - функция пластичности Ильюшина,  $\Phi$  - критерий прочности для матрицы. Волокна принимались упругими, изотропными и неразрушаемыми. Для описания нелинейного деформирования и разрушения матрицы использовались уравнения деформационной теории пластичности на участке активного нагружения и редуцирования жесткости в зонах разрушения,

$$C_{ijkl}^{(1)}(\Phi, \omega, I) = \begin{cases} K^{(1)}\delta_{ij}\delta_{kl} + G^{(1)}[1 - \omega(\varepsilon_i)](\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}), & \Phi < 0, \\ K^{(1)}\delta_{ij}\delta_{kl}, & \Phi \geq 0, \quad I_1 < 0; \\ 0, & \Phi \geq 0, \quad I_1 \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Приведенные соотношения отражают два возможных механизма поведения матрицы в разрушенных зонах: полная потеря несущей способности при  $I_1 \geq 0$  и способность воспринимать только сжимающую нагрузку в области  $I_1 < 0$ . Функцию пластичности Ильюшина  $\omega(\varepsilon_i)$  строили на основе кривой  $\sigma_i - \varepsilon_i$ . На межфазной поверхности задавали условия полной адгезии. Граничные условия на контуре фрагмента  $\hat{\sigma}_{ij}$  подбирали таким образом, чтобы напряжения, осредненные по центральной периодической ячейке, равнялись заданным макроскопическим  $\tilde{\Sigma}$ . Связь между граничными условиями и макронапряжениями можно представить с помощью соотношений [ 5 ]

$$s_{ij} = A_{ijkl}(\tilde{\Sigma})\hat{\sigma}_{kl}. \quad (3)$$

Начальные значения тензора корректировки граничных условий  $A_{ijkl}$  можно определить из решения трех пробных задач с единичными граничными условиями, последующие значения определяются с помощью итераций. Математические постановки задач об обобщенном плоском деформированном состоянии (рис. 1,b) и антиплоском сдвиге (рис. 1,c) являются частными случаями системы уравнений (1)-(2) и рассматривались ранее для расчета нелинейных полей напряжений и деформаций в однонаправленном композите в работах [ 9,10]. В результате решения первой задачи определяются следующие компоненты тензоров напряжений и деформаций

$$\sigma_{11}(\bar{r}), \sigma_{22}(\bar{r}), \sigma_{12}(\bar{r}), \sigma_{33}(\bar{r}), \quad (4)$$

$$\varepsilon_{11}(\bar{r}), \varepsilon_{22}(\bar{r}), \varepsilon_{12}(\bar{r}), \varepsilon_{33}(\bar{r}),$$

из второй задачи подлежат определению

$$\sigma_{12}(\bar{r}), \sigma_{33}(\bar{r}), \varepsilon_{12}(\bar{r}), \varepsilon_{33}(\bar{r}). \quad (5)$$

Макроскопические напряжения задавались по шагам в соответствии с условиями простого макронапряжения

$$S_j^{(k)} = S_j^{(0)}(1 + \alpha k), \quad k=0,1,2,\dots,z \quad (6)$$

$$S_j^{(k)} = S_j^{(0)}[1 + \alpha z + \beta(k - z)], \quad k=z+1,z+2,\dots,Z.$$

От начального уровня  $S_j^{(0)}$  до некоторого значения  $S_j^{(z)}$ , предшествующего первому акту разрушения, нагружение происходило с крупным шагом  $\alpha$ , далее до заключительной точки траектории  $S_j^{(Z)}$ , с мелким шагом  $\beta$ . На каждом шаге осуществлялось попарное решение плоской и антиплоской задачи в следующем итерационном цикле. Первоначально решается плоская нелинейная задача при фиксированных значениях  $\sigma_{13}(\bar{r}), \sigma_{23}(\bar{r})$  и  $\varepsilon_{13}(\bar{r}), \varepsilon_{23}(\bar{r})$  принятых по результатам предыдущего шага (в исходном состоянии считаются нулевыми). Данные

компоненты тензоров напряжений и деформаций используются при вычислении функции пластичности Ильюшина и критерия прочности. Полученные в результате решения плоской задачи напряжения и деформации (4) удовлетворяют не только нелинейным определяющим соотношениям (2), но и (при осреднении по центральной ячейке) соответствуют заданным макронапряжениям (3). Далее решается нелинейная антиплоская задача при фиксированных значениях компонент (4). Вычисленные таким образом  $\sigma_{13}(\bar{r})$ ,  $\sigma_{23}(\bar{r})$  и  $\varepsilon_{13}(\bar{r})$ ,  $\varepsilon_{23}(\bar{r})$  также удовлетворяют уравнениям (2) и (3). На следующем итерационном шаге снова решается плоская нелинейная задача с теми же заданными макронапряжениями  $S_{ij}^{(k)}$ , но обновленными значениями компонент тензоров напряжений и деформаций, соответствующих продольному сдвигу. Найденные значения компонент тензоров напряжений и деформаций (4) затем снова используются при решении антиплоской задачи. Описанная итерационная процедура повторяется до тех пор, пока отличие компонент тензора напряжений, вычисленных на двух последующих шагах, не будет меньше заданной величины. Если искомому тензору напряжений  $\sigma_{ij}(\bar{r})$  поставить в соответствие вектор решений, определенный на конечно-элементной сетке  $\{\sigma\}$ , то условие завершения итерационного процесса можно записать в виде одновременного выполнения двух неравенств:

$$\frac{\|\{\sigma\}^k - \{\sigma\}^{k+1}\|_2}{\|\{\sigma\}^k\|_2} \leq \delta_2, \quad \frac{\|\{\sigma\}^k - \{\sigma\}^{k+1}\|_\infty}{\|\{\sigma\}^k\|_\infty} \leq \delta_\infty, \quad (7)$$

где нормы векторов определяются через компоненты вектора  $\{\sigma\}$  по формулам

$$\|\{\sigma\}\|_2 = \left( \sum_{j=1} \sigma_j^2 \right)^{1/2}, \quad \|\{\sigma\}\|_\infty = \max_j |\sigma_j|. \quad (8)$$

В проведенных расчетах принимались  $\delta_2 = 0,007$ ,  $\delta_\infty = 0,05$ .

Рассмотренная итерационная процедура используется на каждом шаге макроагружения (6). Начальные значения  $S_{ij}^{(0)}$  выбирались таким образом, чтобы соответствующие поля микронапряжений и микродеформаций являлись упругими. Величина шагов  $\alpha$  и  $\beta$  принималась достаточно малой ( $\alpha = 1,00$  и  $\beta = 0,25$ ), такой, что уменьшение шага в два раза изменяло значения напряжений в матрице и волокнах на большей части траекторий не более, чем на 5%. Нелинейные плоская и антиплоская задачи решались с помощью метода начальных напряжений.

Используя данный алгоритм, были рассчитаны диаграммы деформирования и пределы прочности однонаправленного стеклопластика при нескольких простых траекториях комбинированного нагружения растяжения или сжатия в поперечной плоскости слоя совместно с продольным сдвигом. Начальные точки траекторий  $s_{ij}^{(0)}$  приведены в табл.1. Количество итераций при решении одной плоской или антиплоской задачи до появления зон разрушения не превышало 10, после начала разрушения в ряде случаев для сходимости требовалось до 25 итераций. Количество последовательных решений плоской и антиплоской задач на одном шаге нагружения составляло от 2 (в зоне упругого деформирования структурных элементов) до 15 (в зоне развития разрушений).

В расчетах использовался критерий прочности для матрицы (ЭДТ-10) в виде функции

$$\Phi = p_1 I_2^{1/2} + p_2 I_1 + p_3 I_2^{1/2} I_1^2 + p_4 I_2^{-1} I_1^3 + p_5 I_2^{-1} I_3 + p_6 I_2^{-3/2} I_1 I_3 + p_7 I_2^{-3/2} I_1^4 - 1, \quad (9)$$

$$I_1 = \sigma_{ii}, \quad I_2 = \sigma_{ij} \sigma_{ij}, \quad I_3 = \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ik}.$$

Коэффициенты  $p_i$  рассчитывались по экспериментальным данным [11,12]. Корректность вычисления коэффициентов данного критерия зависит от полноты исходных данных, при этом желательно задавать как можно больше точек, соответствующих комбинированному пространственному напряженному состоянию, экспериментальное получение которых чрезвычайно трудоемко. Ввиду недостаточного количества опытных точек было вычислено пять вариантов наборов коэффициентов  $p_i$  с различным значением прочности матрицы при гидростатическом сжатии  $R_{123}$ : 140, 200, 400, 800 и 1500 МПа (табл.2), используемых в последующих расчетах. Для всех вариантов сечения поверхностей прочности плоскостью  $\sigma_{11} - \sigma_{13}$  практически идентичны и показаны для примера на рис.3 штрихпунктирной линией.

Таблица 1

Параметры исследованных траекторий нагружения (МПа)

Траектория	$S_{11}^{(0)}$	$S_{22}^{(0)}$	$S_{12}^{(0)}$	$S_{13}^{(0)}$	$S_{23}^{(0)}$
T <sub>1</sub>	5,0	0,0	0,0	0,0	0,0
T <sub>2</sub>	5,0	0,0	0,0	2,5	0,0
T <sub>3</sub>	5,0	0,0	0,0	5,0	0,0
T <sub>4</sub>	2,5	0,0	0,0	5,0	0,0
T <sub>5</sub>	1,25	0,0	0,0	5,0	0,0
T <sub>6</sub>	-10,0	0,0	0,0	0,0	0,0
T <sub>7</sub>	-10,0	0,0	2,5	0,0	0,0
T <sub>8</sub>	-10,0	0,0	5,0	0,0	0,0
T <sub>9</sub>	-10,0	0,0	10,0	0,0	0,0
T <sub>10</sub>	-5,0	0,0	10,0	0,0	0,0
T <sub>11</sub>	0,0	0,0	10,0	0,0	0,0

Таблица 2

Коэффициенты критерия прочности ( $10^{-2}$  МПа<sup>-1</sup>)

$R_{123}$ , МПа	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$
140	1,36	0,0304	-0,597	0,206	0,365	0,398	0,0911
200	1,36	-0,130	-0,504	0,074	0,472	0,334	0,0601
400	1,36	-0,317	-0,396	-0,137	0,598	0,263	0,0241
800	1,36	-0,413	-0,343	0,168	0,662	0,228	0,0063
1500	1,36	-0,448	-0,311	0,181	0,683	0,204	-0,0039

Анализ результатов расчетов показал, что диаграммы деформирования композита, соответствующие растяжению со сдвигом, являются линейными. Пределы прочности для этих траекторий определялись по точке макронагружения, предшествующей процессу лавинообразного развития зон разрушения вдоль боковой стороны центральной ячейки или по межфазной поверхности, и, как следствие, прекращение сходимости итерационных процедур. Диаграммы деформирования для траекторий сжатия и сдвига (рис.2, а, б) имеют нелинейный участок, обусловленный

главным образом, развитием равновесных зон разрушения. Прочность композита в данном случае, как и в работах [9,10], оценивалась по условию образования в ячейке непрерывного кластера разрушенных зон, пересекающих ячейку либо вдоль одной из сторон, либо по межфазной поверхности.

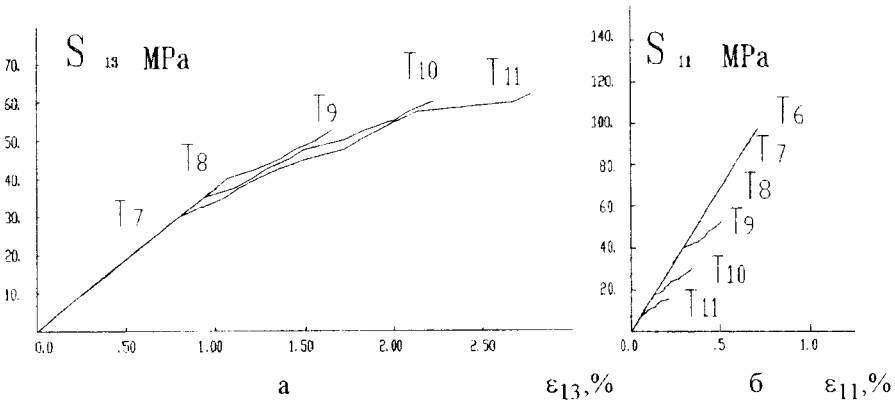


Рис.2 Диаграммы деформирования однонаправленного стеклопластика при комбинированном нагружении поперечным сжатием (а) и продольным сдвигом (б)

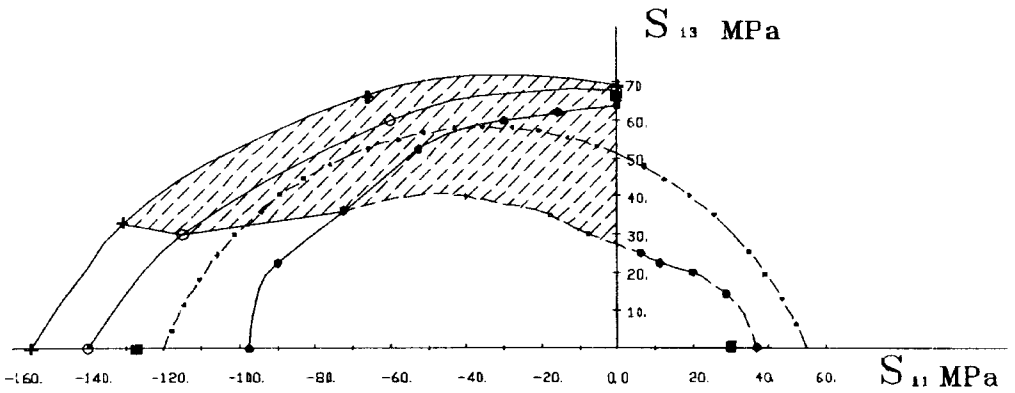


Рис.3 Сплайн-аппроксимация расчетной поверхности прочности однонаправленного стеклопластика с различными коэффициентами критерия прочности для матрицы:  $R_{123}=200$  МПа (•),  $R_{123}=800$  МПа (O),  $R_{123}=1500$  МПа (+); штриховая линия - начальная поверхность прочности композита; штрихпунктирная линия - поверхность прочности матрицы; заштрихованная область соответствует равновесному разрушению в матрице композита; ■ - экспериментальные данные [13]

На рис.3 показана сплайн-аппроксимация построенных поверхностей прочности композита при значениях  $p_1$ , отвечающих  $R_{123}=200, 800, 1500$  МПа, а также поверхность прочности матрицы для  $R_{123}=200$  МПа. Поверхности прочности для композита при  $R_{123}=140$  и  $400$  МПа практически совпадают с аналогичными для  $R_{123}=200$  и  $800$  МПа соответственно. Как видно из рисунка значение  $R_{123}$  связывающего, использованное при построении критерия прочности, не влияет на прогнозируемую прочность композита при растягивающих и сдвиговых нагрузках. Диапазон нагрузок,

соответствующий возможному появлению зон равновесного разрушения в матрице, представлен на рис.3 в виде заштрихованной области. При увеличении значения  $R_{123}$  прочность композита при сжимающих нагрузках в комбинации со сдвигом увеличивается.

### **Заключение.**

Предложенный метод решения нелинейных задач микромеханики в объемной постановке совместно с методом локального приближения позволяет прогнозировать деформационные и прочностные характеристики ОВКМ при любых условиях продольно-поперечного нагружения и дает возможность построения полной поверхности прочности композита.

### **Библиографический список**

1. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов - Киев: Наукова думка, 1985. - 304с.
2. Скудра А.М., Булавс Ф.Я. Структурная теория армированных пластиков. - Рига: Зинатне, 1979. - 191с.
3. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: Изд-во МГУ, 1984. - 336с.
4. Композиционные материалы. / Под ред. Дж. Сендецки Т. 2.: Механика композиционных материалов. - М.: Мир, 1978 - 564с.
5. Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел. - М.: Наука, 1984. - 115с.
6. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. - М.: Наука, 1984. - 352с.
7. Гитман М.Б., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Об одном методе расчета напряженно-деформированного состояния при правке профилей различной конфигурации// Краевые задачи: Межвуз. сб. научн. тр. - Пермь: Изд. ППИ.- 1981.- С.3-7.
8. Трусов П.В., Гитман М.Б. Методика и результаты исследования напряженно-деформированного состояния, возникающего при правке прокатных профилей// Изв. вузов. Черная металлургия, - 1982.- №6-С.47-51.
9. Аношкин А.Н. Неупругое деформирование и прочность однонаправленных композитов при продольном сдвиге// Математическое моделирование систем и процессов. Пермь. ПермГТУ. - 1995. -№3.- С.4-10.
10. Аношкин А.Н. Неупругое поведение однонаправленных композитов в условиях обобщенной плоской деформации // Математическое моделирование систем и процессов. Пермь. ПермГТУ. - 1996. №4.- С.4-13.
11. Удрис А.О., Упитис З.Т. Экспериментальное исследование упругих и прочностных свойств эпоксидного связующего ЭДТ-10 в условиях сложного напряженного состояния // Механика композит. материалов 1988. - №6. - С. 972 - 978.
- 12.Рикардс Р.Б., Чате А.К. Начальная поверхность прочности однонаправленно армированного композита при плоском напряженном состоянии // Механика полимеров.- 1976. - N4. - С. 635 - 639.
13. Мешков Е.В., Кулик В.И., Нилов А.С., Упитис З.Т., Сергеев А.А. Исследование механических характеристик однонаправленных композитных материалов при статическом нагружении// Механика композит. материалов. - 1991. - N3. - С. 459 - 467.