УДК 539.3

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЯХ ТЕРМОВЯЗКОПЛАСТИЧНОСТИ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ИНВАРИАНТНЫХ СВОЙСТВ

Э.А. Леонова (Москва)

Abstract

The constitutive relations for theoretical investigation of the problems of thermoviscoplasticity, creep, superplasticity are presented in the paper. The stress and strain rate tensors are assumed to be proportional each other. Scalar properties of the material are described by the functions, which were obtained from the analysis of invariance of differential equations. The method of calculation of parameters and functions on the base of experimental data is recommended. It is demonstrated, that experimental data can be presented in the obtained form.

Термомеханические процессы для широкого класса реальных сред и внешних воздействий описываются системой уравнений, замкнутой тензорно линейными определяющими соотношениями с экспериментально определяемыми скалярными функциями, связывающими инварианты тензоров напряжений, скоростей деформаций и температуру [1 - 3].

В предлагаемой работе задача восстановления функций по данным опыта рассматривается с позиций выявления возможностей и направлений совершенствования базового эксперимента, упрощения и повышения точности решений математических задач за счет использования инвариантности физических законов. Изучается возможность адекватного представления опытных данных функциями [4], связанными с инвариантными свойствами замкнутой системы уравнений. Предложенный на основе специфики этих функций способ обработки экспериментальных данных включает определение диапазона адекватного описания и алгоритмы вычислений свободных параметров без конкретизации аппроксимирующей функции. Ее конкретизация может быть использована в дальнейшем как для уточнения аппроксимации, так и для упрощения математических задач. Разработаны два дополняющих друг друга варианта реализации способа, основанные на разных свойствах функций. Вариант 1 [5] на основе специфики геометрического образа дает области допустимой вариации свободных параметров, определяемые точностью исходных экспериментальных данных. Вариант 2, излагаемый ниже, включающий статистический анализ, дает значения параметров и оценки точности в соответствии с выбранным критерием адекватности.

Класс скалярных функций для определяющих соотношений

Неизотермические без массовых сил течения однородной изотропной несжимаемой среды с вязкими и пластическими свойствами описываются [1 - 3] замкнутой системой уравнений

$$\rho\dot{\bar{v}} = -\nabla p + \nabla\cdot\tilde{S}, \qquad \dot{T} = \nabla\cdot\big(f(T)\nabla T\big) + k\sigma_J v_J, \quad \nabla\cdot\bar{v} = 0.$$

$$\tilde{S} = \sigma_J / v_J\,\tilde{V}, \quad \tilde{V} = \mathrm{def}\,\bar{v}, \quad \sigma_J = \Phi\big(v_J, T\big), \qquad f > 0, \quad \Phi > 0,$$

где $\tilde{S}$ и $\tilde{V}$ - девиаторы напряжений и скоростей деформаций, p - давление, $\sigma_J \equiv \sigma_u / \sqrt{3}$, $v_J \equiv v_u\sqrt{3}/2$; σ_u, v_u - интенсивности напряжений и скоростей деформаций. Уравнение притока тепла преобразовано за счет выбора T и f в уравнение с приведенным коэффициентом теплопроводности $f(T)$.

Класс $\{\Phi\}$ функций Φ_i, обеспечивающих расширение возможностей упрощений системы и ее квазистатического и бездиссипативного приближений [4], приведен в таблице 1.

Таблица 1

Φ_i	f	Φ_i
$\Phi_0 = \Psi(T)v_J^n$	$f = f(T)$	
$\Phi_1 = T^\gamma\Psi\big(v_J T^{-\beta}\big)$	$f = T^\alpha$	$\Phi_1 = v_J^n\Psi\big(Tv_J^m\big)$
$\Phi_2 = e^{\gamma T}\Psi\big(v_J e^{-\beta T}\big)$	$f = e^{\alpha T}$	$\Phi_2 = v_J^n\Psi\big(T + m\ln v_J\big)$
$\Phi_3 = T^\gamma\Psi\big(v_J - \beta\ln T\big)$	$f = T^\alpha$	$\Phi_3 = e^{nv_J}\Psi\big(Te^{nv_J}\big)$
$\Phi_4 = e^{\gamma T}\Psi\big(v_J - \beta T\big)$	$f = e^{\alpha T}$	$\Phi_4 = e^{nv_J}\Psi\big(T + mv_J\big)$
$\Phi_5 = \gamma\ln T + \Psi\big(v_J T^{-\beta}\big)$	$f = T^\alpha$	$\Phi_5 = n\ln v_J + \Psi\big(Tv_J^m\big)$
$\Phi_6 = \gamma T + \Psi\big(v_J e^{-\beta T}\big)$	$f = e^{\alpha T}$	$\Phi_6 = n\ln v_J + \Psi\big(T + m\ln v_J\big)$
$\Phi_7 = \gamma\ln T + \Psi\big(v_J - \beta\ln T\big)$	$f = \mathrm{const}$	$\Phi_7 = nv_J + \Psi\big(Te^{nv_J}\big)$
$\Phi_8 = \gamma T + \Psi\big(v_J - \beta T\big)$	$f = \mathrm{const}$	$\Phi_8 = nv_J + \Psi\big(T + mv_J\big)$

В таблице 1 функции f и Φ эквивалентны функциям f' и Φ' $f' = f\big(bT + b_0\big)$, $\Phi' = a^{-1}\Phi\big(a_1 v_J + a_0, bT + b_0\big) + a_{00}$, где b_0, b, a_k - произвольные константы, k зависит от выбранного приближения системы и геометрии течения. Функция $\Psi(z)$ - произвольная функция одного аргумента; α, β, γ (или α, m, n) - экспериментально определяемые константы, независимые или линейно связанные в зависимости от приближения системы.

Геометрические свойства

В евклидовом пространстве T, v_J, σ_J с репером e_i, $e_i\cdot e_j = \delta_{ij}$ каждая из функций $\Phi_k \in \{\Phi\}$ задает двухпараметрическое семейство поверхностей π_k с общими свойствами.

У т в е р ж д е н и е 1. Каждая из поверхностей π_k может быть непрерывным деформированием без искажения координатной сети на ней преобразована в любую другую поверхность π_i.

В качестве доказательства приводим (таблица 2) явный вид взаимно однозначных преобразований $\vartheta = \vartheta(T)$, $w = w(v_J)$, $s = s(\sigma_J)$, переводящих все поверхности π_k в поверхность π,

$$\pi: \quad s = \gamma\vartheta + \varphi(w - \beta\vartheta) \quad , \qquad s = nw + \varphi(\vartheta + mw). \tag{1}$$

Таблица 2

Φ_i	w	ϑ	s	$\varphi(z)$
Φ_0	$\ln v_J$	T	$\ln\sigma_J$	$\ln\Psi(z)$
Φ_1	$\ln v_J$	$\ln T$	$\ln\sigma_J$	$\ln\Psi(\exp z)$
Φ_2	$\ln v_J$	T	$\ln\sigma_J$	$\ln\Psi(\exp z)$
Φ_3	v_J	$\ln T$	$\ln\sigma_J$	$\ln\Psi(z)$
Φ_4	v_J	T	$\ln\sigma_J$	$\ln\Psi(z)$
Φ_5	$\ln v_J$	$\ln T$	σ_J	$\Psi(\exp z)$
Φ_6	$\ln v_J$	T	σ_J	$\Psi(\exp z)$
Φ_7	v_J	$\ln T$	σ_J	$\Psi(z)$
Φ_8	v_J	T	σ_J	$\Psi(z)$

У т в е р ж д е н и е 2. Группой автоморфизмов множества исследуемых поверхностей $s = s(w, \vartheta)$ является группа аффинных преобразований пространства ϑ , W , S .

Поверхность π - цилиндрическая поверхность, образованная параллельным переносом произвольной кривой в направлении

$$\bar{R} = \bar{e}_1 + \beta\,\bar{e}_2 + \gamma\,\bar{e}_3 \quad , \bar{R}\cdot\bar{e}_1 \neq 0 \ ; \qquad \bar{R} = m\,\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + n\,\bar{e}_3 \ , \tag{2}$$
$$\bar{R}\cdot\bar{e}_2 \neq 0 \ ; \ m\beta = -1, \quad n\beta = \gamma \ .$$

З а м е ч а н и е. В пространстве T , v_J , σ_J поверхность $\sigma_J = \Phi(v_J, T)$, за исключением частных случаев, как Φ_8 , не есть цилиндрическая.

Зависимость (1) $s = s(w, \vartheta, \beta, \gamma)$ - общее решение уравнения

$$s_{,\vartheta} + \beta_{,w} = \gamma \ . \tag{3}$$

Свойства π_k обусловили возможность анализа соответствия данным опыта одновременно всех функций $\Phi_k \in \{\Phi\}$ и получения алгоритмов вычисления параметров γ, β ; m , n независимо от $\Psi(Z)$.

Свойства опытных данных

Исходная информация об анализируемой реальной зависимости $\sigma_J = \Phi(v_J, T)$ может быть задана в виде а) эмпирической функции, в) серии кривых $\sigma_J = \sigma_J(v_J)$,

$T = \text{const}$ или $\sigma_J = \sigma_J(T)$, $v_J = \text{const}$, c) серии кривых с полосой разброса, d) множеством точек, e) множеством точек с допусками. Пусть, например,

$$\left\{v_J^i, T^j; \sigma_J^{ij}\right\} \quad \text{или} \quad \left\{\sigma_J^i, T^j; v_J^{ij}\right\} \qquad i = \overline{1,n} \quad ; \ j = \overline{1,m} \tag{4}$$

результаты измерений σ_J^{ij} (или v_J^{ij}) при независимо варьируемых v_J^i, T^j; $v_J^{i-1} < v_J^i < v_J^{i+1}$, $T^{j-1} < T^j < T^{j+1}$ (аналогично при σ_J^i, T^j), прошедшие предварительную статистическую обработку: исключение систематической ошибки, проверку на приемлемость по критерию оценки резко отличающихся значений, проверку однородности выборок, оценку точности индивидуальных показателей.

Опубликованные данные показывают, что для многих материалов $\sigma_J^{i-1j} < \sigma_J^{ij}$, $\sigma_J^{ij-1} > \sigma_J^{ij}$

$$\left(\sigma_J^{i+1j} - \sigma_J^{ij}\right)\left(v_J^i - v_J^{i-1}\right) \le \left(\sigma_J^{ij} - \sigma_J^{i-1j}\right)\left(v_J^{i+1} - v_J^i\right). \tag{5}$$

Изучение возможности адекватного представления данных опыта функциями $\Phi_k \in \{\Phi\}$ базируется на свойствах (1) - (3), (5). В [5] эта задача решается геометрически сведением к поиску параметрического вектора (2). При решении задачи с применением статистических методов [6] будут также использоваться свойства (1) - (3), (5) и специфика данных инженерного эксперимента.

В статистической практике исследование зависимостей по результатам наблюдений сводится к поиску наилучшей, в смысле выбранного критерия, аппроксимирующей функции из заранее выбранного исследователем класса (линейные, полиномы, и т.п.) обычно за счет подбора по данным опыта значений параметров. При этом возникают вопросы: 1) влияние точности измерений, 2) степень точности восстановления зависимости по данным ограниченного числа наблюдений, 3) математическая структура модели, 4) выбор критерия качества аппроксимации и в соответствии с ним наилучшая ее реализация, 5) алгоритм обработки данных, 6) оценки точности. Для проверки различных гипотез о структуре модели разработаны статистические критерии, основанные на поиске компромисса между сложностью модели и точностью; на поиске модели, наиболее устойчивой к варьированию состава выборочных данных; на сравнении критериев адекватности и исследовании статистических свойств оценок. Для определения же структуры модели теоретическая основа, дающая строгие стандартные методы, отсутствует.

Для выяснения возможности и точности описания данных (4) функциями Φ_i, выбирая для поиска наилучшей аппроксимации класс $\{\Phi\}$ (1), используя его свойства (2), (3), (5), можно сохранить произвол в $\varphi(z)$.

По данным (4) и таблице 2 введем для каждой точки v_J^i, T^j величины

$$x_1^{ij} = \left(s^{i+1j} - s^{ij}\right)\left(w^{i+1} - w^i\right)^{-1} \ ; \qquad x_2^{ij} = \left(s^{ij} - s^{i-1j}\right)\left(w^i - w^{i-1}\right)^{-1},$$

$$y_1^{ij} = \left(s^{ij+1} - s^{ij}\right)\left(\vartheta^{j+1} - \vartheta^j\right)^{-1} \ ; \ y_2^{ij} = \left(s^{ij} - s^{ij-1}\right)\left(\vartheta^j - \vartheta^{j-1}\right)^{-1}, \tag{6}$$

$$x^{ij} \in \left[x_1^{ij}, x_2^{ij}\right], \qquad y^{ij} \in \left[y_1^{ij}, y_2^{ij}\right].$$

для оценки на плоскости xoy анализируемой зависимости $y = \gamma - \beta x$. Перенумеруем точки $x^{ij} = \frac{1}{2}\left(x_1^{ij} + x_2^{ij}\right)$, $y^{ij} = \frac{1}{2}\left(y_1^{ij} + y_2^{ij}\right)$ для определенности в порядке возрастания x^{ij}, включая точки совпадения, и рассмотрим совокупность $\{x_k ; y_k\}$, $k = \overline{1,N}$; $N = mn$ где, возможно, l_i $i = \overline{1,k}$ - количество точек y_{ij} при i-м фиксированном значении аргумента x_i^0 (или в i-м интервале группирования по x со средней точкой x_i^0).

Для оценки степени тесноты связи по выборочному значению коэффициента корреляции r, $|r| \le 1$, значение которого $|r| = 1$ соответствует наличию анализируемой функциональной связи, имеем

$$\hat{r} = \frac{1}{S_x S_y}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k y_k - \bar{x}\bar{y}\right), \quad \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k, \quad \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k, \tag{7}$$

$$S_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(x_k - \bar{x}\right)^2, \quad S_y^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(y_k - \bar{y}\right)^2.$$

Отсутствие корреляционной связи в (6) можно проверить по критерию

$$|\hat{r}|\sqrt{N-2}\left(1-\hat{r}^2\right)^{-1/2} < t_{0,05}(N-2), \tag{8}$$

где $t_{0,05}(N-2)$ - 5% -я точка распределения Стьюдента с $N-2$ степенями свободы. При выполнении (8) связь отсутствует.

Доверительный интервал, в котором с доверительной вероятностью $P = 1-\alpha$ находится истинное значение r, вычисляется по доверительному интервалу $[Z_1, Z_2]$ величины MZ в виде

$$Z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\hat{r}}{1-\hat{r}} = \operatorname{arcth}\hat{r}; \quad Z_{12} = \operatorname{arcth}\hat{r} \mp u_{\alpha/2}(N-3)^{-1/2} - \frac{1}{2}\hat{r}(N-1)^{-1},$$

где $u_{\alpha/2}$ - $100\frac{\alpha}{2}\%$ - я точка стандартного (0,1) нормального распределения

$$\operatorname{th}Z_1 < r < \operatorname{th}Z_2.$$

Свойства зависимости (1) позволяют воспользоваться критерием W^2.

$$W^2 = \frac{(N-k)\left(\hat{\rho}^2 - \hat{r}^2\right)}{(k-2)\left(1-\hat{\rho}^2\right)}, \quad \hat{\rho}^2 = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} l_i\left(\bar{y}_i - \bar{y}\right)^2}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l_i}\left(y_{ij} - \bar{y}\right)^2}, \quad \bar{y}_i = \frac{1}{l_i}\sum_{j=1}^{l_i} y_{ij}.$$

По заданному достаточно малому значению α находится $100\alpha\%$ - я точка v_α^2 распределения $F(k-2, N-k)$. При $W^2 < v_\alpha^2$ представление (1) в рассматриваемом диапазоне w , ϑ не противоречит экспериментальным данным, при $W^2 > v_\alpha^2$ представление (1) неприемлемо.

Значения параметров

Наилучшая аппроксимация в двухпараметрическом семействе $s = s(w, \vartheta; \beta, \gamma)$ найдется как решение оптимизационной задачи

$$\hat{s} = \arg\min \Delta_N(s), \qquad s \in \{s\}, \tag{9}$$

где $\Delta_N(s)$ - критерий адекватности, функционал, характеризующий качество аппроксимации функцией s из класса $\{s\}$. Свойства (1), (3) - (6) позволяют свести решение экстремальной задачи к определению по (6) наилучших значений параметров β , γ . Выбирая за критерий адекватности МНК-функционал, дающий, как известно, состоятельные, несмещенные, эффективные оценки, получим для β , γ систему двух линейных алгебраических уравнений.

Условие минимизации $\Delta_N(\beta,\gamma) \to \min\limits_{\beta,\gamma}$:

$$\Delta_N(\beta,\gamma) = \frac{1}{N-2}\sum_{k=1}^{N} h_1^{-2}(x_k)(y_k - \gamma + \beta x_k)^2, \tag{10}$$

дает оценки $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ параметров β , γ как решение системы

$$a_{l0}(x_1,\dots,x_N)\beta + a_{l1}(x_1,\dots,x_N)\gamma + b_l(x_1,\dots,x_N;y_1,\dots,y_N) = 0, \tag{11}$$

$$a_{l0} = \sum_{k=1}^{N} h_1^{-2}(x_k)x_k^{l+1},\ a_{l1} = -\sum_{k=1}^{N} h_1^{-2}(x_k)x_k^{l},\ b_l = \sum_{k=1}^{N} h_1^{-2}(x_k)x_k^{l}y_k\ ;\ l = 0,1,$$

$$\hat{\beta} = (a_{01}b_1 - b_0a_{11})\Delta^{-1};\ \hat{\gamma} = (a_{10}b_0 - a_{00}b_1)\Delta^{-1},\ \Delta = a_{00}a_{11} - a_{10}a_{01}.$$

Условие $\Delta_N(m,n) \to \min\limits_{m,n}$:

$$\Delta_N(m,n) = \frac{1}{N-2}\sum_{k=1}^{N} h_2^{-2}(y_k)(x_k - n - my_k)^2 \tag{12}$$

приводит к оценкам

$$\hat{m} = (a_{11}b_0 - a_{01}b_1)\Delta^{-1}, \qquad \hat{n} = (a_{10}b_0 - a_{00}b_1)\Delta^{-1}, \tag{13}$$

где a_{l0} , a_{l1} , b_l , Δ вычисляются по (11) при формальной замене $x \leftrightarrow y$; $h_1(x)$, $h_2(y)$ - функции, задающие зависимости условной дисперсии результирующего показателя от аргумента.

При нормальной минимизации $\Delta_N(\beta,\gamma)\to\min\limits_{\beta,\gamma}$ параметры $\hat\beta$, $\hat\gamma$ имеют вид

$$\hat\gamma=\hat\gamma^0+\hat\beta\bar x\ ,\qquad \hat\gamma^0=\frac{i}{d1}\sum_{k=1}^{N}h_{1k}^{-2}y_k\ ,\qquad \hat\beta=-\frac{2\hat r}{S_0+\sqrt{S_0+4\hat r^2}}\ , \tag{14}$$

$$S_0=\left(S_x^2-S_y^2\right)/S_xS_y\ ,$$

где коэффициент корреляции и выборочные дисперсии S_x, S_y вычисляются по (7), если $h_i=\mathrm{const}$; в общем случае по формулам

$$\hat r=\frac{1}{S}\left[\left(\frac{1}{d_1}\sum_{k=1}^{N}h_{1k}^{-2}x_ky_k-\bar x^{(1)}\bar y^{(1)}\right)\left(\frac{1}{d_2}\sum_{k=1}^{N}h_{2k}^{-2}x_ky_k-\bar x^{(2)}\bar y^{(20}\right)\right]^{1/2},$$

$$S\equiv S_x^{(1)}S_x^{(2)}S_y^{(1)}S_y^{(2)}\ ,\qquad h_{1k}^{-2}\equiv h_1^{-2}(x_k)\ ,\ h_{2k}^{-2}\equiv h_2^{-2}(y_k),$$

$$x^{(i)}=\frac{1}{d_i}\sum_{k=1}^{N}h_{ik}^{-2}x_k\ ,\quad \bar y^{(i)}=\frac{1}{d_i}\sum_{k=1}^{N}h_{ik}^{-2}y_k\ ,\ d_i=\sum_{k=1}^{n}h_{ik}^{-2}\ ;\ i=1,2\ ,$$

$$S_x^{(i)^2}=\frac{1}{d_i}\sum_{k=1}^{N}h_{ik}^{-2}\left(x_k-\bar x^{(i)}\right)^2\ ,\quad S_y^{(i)^2}=\frac{1}{d_i}\sum_{k=1}^{N}h_{ik}^{-2}\left(y_k-\bar y^{(i)}\right)^2 .$$

Степень точности удовлетворения условий $m\beta=-1$ и $n\beta=\gamma$ определяется значениями $\hat\beta$, $\hat\gamma$; $\hat m$, $\hat n$, вычисленными по (11), (13), (14), и степень близости к нулю острого угла δ, отсчитываемого от $y=\hat\gamma-\hat\beta x$, к $x=\hat n+\hat m y$; в положительном направлении $\delta>0$

$$\mathrm{tg}\delta\approx\left(1-\hat r\right)^2S_xS_y\ /\ \hat r\left(S_x^2+S_y^2\right)$$

дадут дополнительную информацию о соответствии (1) и (4).

Оценки точности

Анализ точности восстановления истинных зависимостей аппроксимаций по выборочным данным состоит в определении предельных величин погрешностей, за которые с заданной доверительной вероятностью не выходит ошибка при замене истинного значения его статической оценкой. Их получение опирается на результаты статистического исследования выборочного распределения относительно истинных значений оцениваемых величин; для отношения отклонения выборочного значения от истинного к характеристикам дисперсии принимается распределение Стьюдента. В применении к нашему случаю для оценки точности соответствия (1) и (4) существенны доверительные интервалы, в которых при заданных N, P с вероятностью, не меньшей, чем P, будут находиться значения изучаемых характеристик и доверительная область для истинной зависимости.

Доверительные интервалы для параметров $\left[\hat\beta_1,\hat\beta_2\right]$, $\left[\hat\gamma_1,\hat\gamma_2\right]$:

$$\hat\beta_{1,2}=\hat\beta\mp\delta_{P,N}(\beta)\ ,\qquad \hat\gamma_{1,2}^0=\hat\gamma^0\mp\delta_{P,N}\left(\gamma^0\right);\qquad \left|\beta-\hat\beta\right|\le\delta_{P,N}(\beta)\ ;$$

$$\left|\gamma^0-\hat{\gamma}^0\right| \le \delta_{P,N}\left(\gamma^0\right),$$

$$\delta_{P,N}(\beta)=t_{\frac{1-P}{2}}(N-2)S\left[\sum_{i=1}^{k} l_i h_{li}^{-2}\left(x_i^0-\bar{x}\right)^2\right]^{-1/2},$$

$$\delta_{P,N}\left(\gamma^0\right)=t_{\frac{1-P}{2}}(N-2)S\left[\sum_{i=1}^{k} l_i h_{li}^{-2}\right]^{-1/2}, \quad S^2=\frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l_i} h_{li}^{-2}\left(y_{ij}-\hat{\gamma}+\hat{\beta}x_i^0\right)^2$$

Доверительный интервал $\left[\hat{y}_1^0,\hat{y}_2^0\right]$ для условного среднего при фиксированном значении аргумента

$$\hat{y}_{1,2}^0=\hat{y}(x)\mp\delta_{P,N}\left(y_{cp}(x)\right); \quad \left|y_{cp}(x)-\hat{y}(x)<\delta_{P,N}\left(y_{cp}(x)\right)\right|,$$

$$\delta_{P,N}\left(y_{cp}(x)\right)=t_{\frac{1-p}{2}}(N-2)\frac{S}{d_1}\left[1+\frac{(x-\bar{x})^2}{S_x^2}\right]^{1/2}, \quad \hat{y}=\hat{\gamma}-\hat{\beta}x.$$

Доверительный интервал $\left[\hat{y}_1,\hat{y}_2\right]$ для индивидуальных значений при фиксированном значении аргумента

$$\hat{y}_{1,2}(x)=\hat{y}(x)\mp\delta_{P,N}(y(x)); \quad \left|y(x)-\hat{y}(x)\right|<\delta_{P,N}(y(x)),$$

$$\delta_{P,N}(y(x))=t_{\frac{1-p}{2}}(N-2)S\left[h_l^2+\frac{1}{d_1}+\frac{(x-\bar{x})^2}{d_1 S_x^2}\right]^{1/2}$$

Доверительная область $x_1\le x\le x_2$, $y_1(x)\le y\le y_2(x)$ для истинной зависимости, в которой она находится с доверительной вероятностью P , строится после вычисления величины λ и определению по ней и заданной P затабулированной величины $u(P;\lambda)$ в виде [7]

$$Y_{1,2}(x)=\hat{y}(x)\mp u_{N-2}(P;\lambda)\frac{s}{\sqrt{d_1}}\left[1+\frac{(x-\bar{x})^2}{S_x^2}\right]^{1/2},$$

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1-\left(1+\frac{(X_1-\bar{x})(X_2-\bar{x})}{S_x^2}\right)\left(1+\frac{(X_1-\bar{x})^2}{S_x^2}\right)^{-1/2}\left(1+\frac{(X_2-\bar{x})^2}{S_x^2}\right)^{-1/2}\right]^{1/2}$$

Примеры расчета

Изложенным способом проведена обработка экспериментальных данных [8] для ряда металлов и сплавов в температурно-скоростном диапазоне горячей обработки давлением. Примеры результатов расчета по данным $\left\{v_j^i, T^j; \sigma_j^{ij}\right\}$, $N=20$ для T^j: 900, 1000, 1100, 1200^0C ; $v_j: 10^{-1}\div 10^2\ 1/c$ приведены в таблице 3. Расчеты показывают, что для вероятности ошибки $1-P=0{,}01$ и степени свободы $N-2=18$ (табличные значения $r^*=0{,}561$, $t^*=1{,}734$) сдвиговое сопротивление стали 4Х13 в данном температурно-скоростном диапазоне может быть представлено любой из функций Φ_i, $i = \overline{1,4}$, а стали 12ХН3А - не любой. Сдвиговое сопротивление сплава ХН75МБТЮ может быть представлено любой из функций Φ_i, $i = \overline{1,4}$.

Таблица 3

Марка сплава	Параметры и критерии	Значение параметров и критериев			
		Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4
Сталь 4Х13 $\varepsilon = 20\%$	$\hat{\beta}$ $\hat{\gamma}$ $\hat{r}$ $\hat{t}$	37,92 -0,15 0,88 -10,1	7,56 0,22 0,63 -3,51	0,02 0,00 0,81 -7,69	14,02 -0,61 0,73 -5,78
Сталь 12ХН3А $\varepsilon = 40\%$	$\hat{\beta}$ $\hat{\gamma}$ $\hat{r}$ $\hat{t}$	2,34 -6,88 0,14 -0,68	0,00 0,14 0,13 -0,66	0,00 0,14 0,07 -0,35	0,23 -0,56 0,06 -0,33
Сплав ХН75МБТ Ю $\varepsilon = 40\%$	$\hat{\beta}$ $\hat{\gamma}$ $\hat{r}$ $\hat{t}$	38,13 -0,64 0,92 -12,53	7,98 0,25 0,63 -4,43	0,02 0,00 0,86 -9,10	23,96 -0,51 0,76 -6,41

Библиографический список

1. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды.- М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. - 300 с.
2. Ильюшин А.А. Пластичность. - М.: Изд-во АН СССР, 1963. - 271 с.
3. Ильюшин А.А. Некоторые вопросы теории пластического течения. // Изв. АН СССР, ОТН. - 1958. № 2. - С. 64 -86.
4. Леонова Э.А. Инвариантные свойства уравнений термовязкопластичности с неполной информацией о свойствах среды. // Упругость и неупругость. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1993. С. 55 - 87.
5. Леонова Э.А., Кадимов М.Д. Об аналитическом представлении свойств материала для задач термовязкопластичности. // Упругость и неупругость. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. - С. 171-178.
6. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. - М.: Финансы и статистика. 1985. - 487 с.
7. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. - М.: Наука, 1983. - 416 с.
8. Третьяков А.В., Зюзин В.И. Механические свойства металлов и сплавов при обработке давлением. - М.: Металлургия, 1973. - 224 с.