УДК 539.3

АЛГОРИТМ РЕАЛИЗАЦИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ СРЕД МЕТОДОМ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СОСТАВЛЯЮЩИХ

Е.Ю. Макарова (Пермь)

Abstract

Using the boundary value micromechanical problem for heterogeneous solid new equations between deformation in stochastic composites and deformation in composites with periodical structure are achieved.

В работах [1,2] предложен новый метод решения стохастических краевых задач теории упругости микронеоднородных сред, основанный на использовании решения аналогичной краевой задачи для сред с регулярной структурой. Практическое применение этот метод получил при прогнозировании эффективных свойств композитов. В данной работе дается дальнейшее развитие метода периодических составляющих, позволяющее с единых позиций наряду с эффективными модулями упругости прогнозировать структурные поля деформирования в разупорядоченных композитах.

Рассмотрим стохастическую краевую задачу теории упругости микронеоднородных сред со статистически однородной структурой. Будем также предполагать, что микронеоднородная среда макроскопически однородна и квазиизотропна, геометрическая форма и свойства структурных компонентов детерминированы и заданы. Стохастическая краевая задача в отсутствии объемных сил состоит из замкнутой системы дифференциальных уравнений:

$$\nabla\cdot\sigma = 0, \quad \varepsilon = \operatorname{def} u, \quad \sigma = \theta\cdot\cdot\varepsilon\ , \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\frac{1}{d^1 V}\int\limits_V \varepsilon(r)\, d^1 V = \varepsilon^*\ , \tag{2}$$

которым, как известно [1], эквивалентны условия на поверхности S тела V:

$$u\Big|_S = \varepsilon^*\cdot x \tag{3}$$

при макроскопически однородном деформированном состоянии. В формулах (1), (2), (3) через σ, ε, u и θ обозначены структурные поля напряжений, деформаций, перемещений и модулей упругости соответственно, ε^* - заданное поле макроскопических деформаций.

Идея излагаемого ниже метода заключается в использовании в качестве основы решения аналогичной краевой задачи для среды с регулярной микроструктурой:

$$\nabla\cdot\sigma^{(p)} = 0, \quad \varepsilon^{(p)} = \operatorname{def} u^{(p)}\ , \quad \sigma^{(p)} = C^{(p)}\cdot\cdot\varepsilon^{(p)}\ ,$$

$$\frac{1}{d^I V}\int_{d^I V} \varepsilon^{(p)}(r)dV = \varepsilon^* , \tag{4}$$

где $u^{(p)}$, $\varepsilon^{(p)}$, $\sigma^{(p)}$ - детерминированные периодические функции структурных перемещений, деформаций и напряжений , $C^{(p)}$ -тензор структурных модулей упругости среды с регулярной структурой. Предположим, что решение краевой задачи (4) нам известно [3]:

$$\varepsilon^{(p)'}(r) = N^{(p)}(r)\cdot\cdot\varepsilon^*, \qquad \varepsilon^{(p)} = \varepsilon^* + \varepsilon^{(p)'},$$

$$C^{*(p)} = \left\langle C^{(p)}(r)\right\rangle + \left\langle C^{(p)}(r)\cdot\cdot N^{(p)}(r)\right\rangle \quad ,\sigma^{(p)} = C^{*(p)}\cdot\cdot\varepsilon^*,$$

где $C^{*(p)}$ - эффективные модули упругости среды с регулярной структурой, $N^{(p)}(r)$ - структурные функции [3], $\langle\cdots\rangle$ - оператор осреднения по представительному объему.

Ниже устанавливается важное свойство упругих микронеоднородных деформируемых сред. Если микронеоднородная среда макроскопически однородна и квазиизотропна, перемещения границы S тела V, имеющего конечные размеры, детерминированы, дисперсии физических свойств среды конечны, структурные деформации - микроскопически гладкие функции координат, то существует случайный функционал $\Phi^{(p)}(\theta)$, зависящий от граничных условий, такой, что пульсации структурных деформаций $\overset{o}{\varepsilon}(r)$ связаны со структурными деформациями в регулярной среде $\varepsilon^{(p)}$ соотношением:

$$\overset{o}{\varepsilon}(r) = \Phi^{(p)}(\theta)\cdot\cdot\varepsilon^{(p)}(r) . \tag{5}$$

Для доказательства соотношения (5) рассмотрим решение краевой задачи (6), которая приводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений
при нулевых граничных условиях:

$$\nabla\cdot(C^{(p)}\cdot\cdot\mathrm{def}\,\overset{o}{u}) = -\nabla\cdot\Pi, \qquad \overset{o}{u}\Big|_S = 0, \tag{6}$$

где
$$\Pi = \overset{o}{\theta}\cdot\cdot\mathrm{def}\,u^{(p)} + \overset{o}{\theta}\cdot\cdot\mathrm{def}\,\overset{o}{u} - \left\langle \overset{o}{\theta}\cdot\cdot\mathrm{def}\,\overset{o}{u}\right\rangle.$$

Уравнения (6) можно рассматривать как уравнения краевой задачи теории упругости микронеоднородных сред с регулярной структурой $C^{(p)}(r)$ и перемещениями $\overset{o}{u}(r)$, обусловленными действием фиктивных случайных объемных сил $\nabla\cdot\Pi$.

Вводя функцию Грина среды с регулярной структурой $G^{(p)}(r,r')$, система уравнений (6) преобразуется в систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\overset{o}{u}(r) = \int_V G^{(p)}(r,r')\cdot(\nabla'\cdot\Pi'(r'))dV' . \tag{7}$$

Для определения полей структурных деформаций необходимо знать градиент пульсаций структурных перемещений, поэтому дифференцируем (7):

$$\nabla \overset{o}{u}(r) = \int\limits_V \nabla G^{(p)}(r,r')\cdot(\nabla'\cdot\Pi'(r'))dV' . \qquad (8)$$

Уравнение (7) решаем методом последовательных приближений при ограничениях, сформулированных в виде макроскопической однородности и квазиизотропности микронеоднородной среды и микроскопической гладкости (в εl-окрестности микронеоднородной среды) структурных деформаций в регулярной структуре.

В первом приближении полагаем:

$$\nabla \overset{o}{u}{}^{(1)}(r) = \int\limits_V \nabla G^{(p)}\cdot\nabla'\cdot(\overset{o}{\theta}{}'\cdot\cdot\,\varepsilon^{(p)'})dV' . \qquad (9)$$

Для макроскопически однородной среды интегралы в (9) фактически распространяются на $\varepsilon^2 l$-окрестность микронеоднородной среды, где $\varepsilon^{(p)}$-постоянны, поэтому соотношения (9) принимают вид

$$\nabla \overset{o}{u}{}^{(1)}(r) = \nabla\rho^{(p)^{(1)}}\cdot\cdot\,\varepsilon^{(p)}, \qquad (10)$$

где $$\nabla\rho^{(p)^{(1)}} = \int\limits_V \nabla G^{(p)}(r,r')\cdot(\nabla'\cdot\overset{o}{\theta}{}')dV' ,$$

а $\rho^{(p)^{(1)}}(\overset{o}{\theta},r)$ - тензор-функционал третьего ранга относительно физических свойств среды.

Подставляя (9) в (8), с учетом (10) получаем второе приближение:

$$\nabla \overset{o}{u}{}^{(2)} = (\nabla\rho^{(p)^{(1)}} + \nabla\rho^{(p)^{(2)}})\cdot\cdot\,\varepsilon^{(p)} ,$$

$$\nabla\rho^{(p)^{(2)}} = \int\limits_V \nabla G^{(p)}\cdot(\nabla'\cdot(\overset{o}{\theta}{}'\cdot\cdot\nabla'\rho^{(p)^{(k-1)}})dV' .$$

Окончательно получаем:

$$\nabla\overset{o}{u}(r) = \nabla\rho^{(p)}\cdot\cdot\,\varepsilon^{(p)},$$

где $$\nabla\rho^{(p)} = \sum_{k=1}^{\infty}\nabla\rho^{(p)^{(k)}} \qquad (11)$$

Поскольку пульсации структурных деформаций определяются выражением

$$\overset{o}{\varepsilon}(r) = \operatorname{def}\overset{o}{u}(r),$$

то в силу (11) приходим к соотношению (5):

$$\overset{o}{\varepsilon} = \Phi^{(p)}\cdot\cdot\,\varepsilon^{(p)}, \qquad (12)$$

где функционал $\Phi^{(p)}(\overset{o}{\theta})$ определяется соотношением:

$$\Phi^{(p)}(\overset{o}{\theta}) = \operatorname{def}\rho^{(p)}(\overset{o}{\theta}). \qquad (13)$$

Полученные выше соотношения (12) и (13) позволяют получать более точные численные результаты по прогнозированию эффективных свойств и полей деформирования в разупорядоченных композитах по сравнению с подходом, основанным на среде сравнения с однородными свойствами .

Библиографический список

1. Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел. -М.: Наука, 1984. -116с.
2. Соколкин Ю.В., Вотинов А.М., Ташкинов А.А., Постных А.М., Чекалкин А.А. Технология и проектирование углерод-углеродных композитов и конструкций - М: Наука, Физматлит., 1996. -239 с.
3. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: МГУ, 1984. -336 с.