

УДК 539.3:4

ДЕГРАДАЦИЯ СТАТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ И ДОЛГОВЕЧНОСТЬ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНОГО МАТЕРИАЛА

В.И. Миронов, К.А. Тарташник (Екатеринбург)

Abstract

Fatigue damage accumulation is defined as degradation of material static properties with the growing number of loading cycles. The machine-specimen system behaviour is studied using the theory of catastrophes that allows to characterize the effect of stationary cycling mode on fracture due to fatigue.

Сочетание структурного и феноменологического подходов характерно для практического проектирования конструкций из структурно-неоднородных материалов. С целью выделения типов явлений, для которых важна структурная теория, исследуют дискретные одномерные модели материала, допускающие предельно простое математическое описание. Подобная модель использована ниже для обобщения критериев статической прочности на случай циклического нагружения и построения на этой основе континуальной модели накопления усталостных повреждений и разрушения.

Анализ повреждения и разрушения модельного образца

Формирование модели Фойгта-Мазинга для однонаправлено армированного композита на основе ряда упрощающих предположений относительно свойств его компонентов рассмотрено в работе [1]. Принятые в ней ограничения дополним свойствами волокон при циклировании. В результате полагаем: модули упругости E всех волокон одинаковы; предел прочности волокна ξ -случайная величина с равномерной плотностью распределения $R(S_1, S_2)$; плотность $R(N_A, N_B)$ случайной долговечности волокна η не зависит от уровня стационарного напряжения цикла $\sigma_a < S_1$; влияние матрицы пренебрежимо мало.

Мера статического W_0 или циклического W_u повреждения оценивается относительным числом разрушенных волокон

$$W_0 = \int_{-\infty}^{\sigma'} f(\xi) d\xi = (\sigma' - S_1)(S_2 - S_1)^{-1},$$

$$W_u = \int_{N_A}^{n_1} f(\eta) d\eta = (n_1 - N_A)(N_B - N_A)^{-1}. \quad (1)$$

Опуская доказательство статистической независимости случайных величин ξ и η , приведем выражение диаграммы деформирования циклически тренированного образца [2]:

$$\sigma = I_1 (1 - W_u) E \varepsilon + I_2 (1 - W_u) E \varepsilon (S_2 - E \varepsilon) (S_2 - S_1)^{-1}, \quad (2)$$

где индикаторы интервалов деформации

$$I_1 = \begin{cases} 1, & \varepsilon \in (0, \varepsilon_1), \\ 0, & \varepsilon \in (0, \varepsilon_1), \end{cases} \quad I_2 = \begin{cases} 1, & \varepsilon \in (\varepsilon, \varepsilon_2), \\ 0, & \varepsilon \in (\varepsilon, \varepsilon_2). \end{cases}$$

Формула (2) задает семейство квазистатических кривых $\sigma(\varepsilon)$, параметризованных мерой W_{Π} (рис.1).

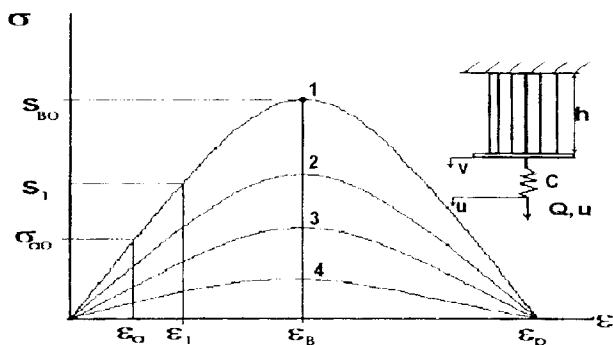


Рис.1. Циклические диаграммы модельного образца при нагружении $v_a = \text{const}$, кривая 1 - для нетренированного образца ($n=0$)

По мере усталостного разрушения волокон снижается модуль упругости (кривые 2 и 3, см.рис.1), уменьшается предел прочности

$$S_B(\sigma_a; n) = S_{B0}(1 - W_{\Pi}). \quad (3)$$

Диаграммы $\sigma(\varepsilon)$ тренированного композитного образца естественно назвать циклическими, а функцию $S_B(\sigma_a; n)$ - циклическим пределом прочности.

Поведение циклически тренированного композитного образца при деформировании в составе механической системы исследуется методом теории катастроф [3,4]. Рассмотрим два случая квазистатического нагружения: заданным перемещением u и заданной силой Q (см. рис.1).

В первом варианте нагружения перемещение u - параметр управления, перемещение v - параметр состояния системы машина-образец. Поведение системы описывает функция внутренней полной энергии $\Pi_1: V \times U \rightarrow R$, а именно:

$$\Pi_1 = C(u - v)^2 2^{-1} + \int_0^v \Phi(v) dv, \quad u \in U, \quad v \in V. \quad (4)$$

Здесь U и V - соответственно пространства управления и состояния, совпадающие в данном случае с множеством вещественных чисел R , $\Phi(v) = -F_0 \sigma$, $v = \varepsilon h$, F_0 - начальная площадь сечения элемента. Критические точки функции Π_1 определяются из уравнения

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial v} = C(u - v)^2 + \Phi(v) = 0,$$

множество решений которого - точки (u, v) образуют в пространстве $U \times V$ многообразие катастрофы M_u . Выделим те решения, которые обращают в нуль детерминант матрицы Гессе H функции Π_1 [3]

$$\det H(\Pi_1) = \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial v^2} = 0$$

и образуют множество вырожденных критических точек V_u .

Полученная в результате вычислений поверхность равновесных состояний отвечает катастрофе складки с одной вырожденной точкой (v_{z1}, u_{z1}) , ограничивающей область устойчивых положений системы [2]:

$$\begin{aligned} v_{z1} &= S_2 h(2E)^{-1} + Ch^2 (S_2 - S_1)(2F_0 E^2 (1 - W_u))^{-1}, \\ u_{z1} &= v_{z1} + F_0 E v_{z1} (1 - W_u)(S_2 h - E v_{z1}) [Ch^2 (S_2 - S_1)]^{-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Во втором варианте нагружения сила Q играет роль управляющего параметра, а перемещения u и v являются параметрами состояния. Поведение системы описывает функция полной энергии $\Pi_2 : D \times U' \rightarrow R$:

$$\Pi_2 = \Pi_1 - \int_0^u Q du, \quad u \in U', \quad v \in U', \quad Q \in D, \quad (6)$$

где D - пространство управления, U' - пространство состояний.

Действительные значения u и v доставляют системе машина-образец минимум потенциальной энергии и удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \Pi_2}{\partial u} = 0,$$

совокупность решений которой дает многообразие катастрофы M_q . Дополнив систему условием $\det H(\Pi_2) = 0$, найдем вырожденную критическую точку

$$\begin{aligned} v_{z2} &= S_2 h(2E)^{-1}, \\ u_{z2} &= v_{z2} + F_0 E v_{z2} (1 - W_u)(S_2 h - E v_{z2}) [Ch^2 (S_2 - S_1)]^{-1}, \\ Q_z &= C(u_{z2} - v_{z2}). \end{aligned} \quad (7)$$

Циклическая тренировка, в соответствии с первым из выражений (5) увеличивает значение критического перемещения v_{z1} . Пусть в исходном состоянии ($u=0$) при заданной жесткости C перемещение $v_{z1} < v_p = S_2 h E^{-1}$, что указывает на динамический (с катастрофой) характер разрушения. Из условия $v_{z1} < v_p$ найдем $W_u < 1$, а затем и число $n_p < N$, после которого деформирование композита будет равновесным. Циклирование с заданной амплитудой перемещения $u_a = \text{const}$ заканчивается равновесным, без статического долома, разделением образца на две части. Долговечность образца $N_u = N_B$ значительно отличается от средней по долговечности волокон $\bar{N} = (N_A + N_B) / 2$.

Во втором варианте циклического нагружения усталостное разрушение элемента произойдет в тот момент, когда критическое значение Q_z снизится до амплитудного значения $Q_a = \sigma_a F_0$. Статический долом образца неизбежен. Заметим, что причина разрушения композита при циклировании та же, что при квазистатическом нагружении - неустойчивость процесса деформирования. Из

выражения (3) найдем $W_{ц}$, при условии $S_B(\sigma_a; N) = \sigma_a$, а затем из выражения (1) - и число циклов до разрушения N_q , отличное от $N_{ц}$ и \bar{N} .

Таким образом, вид исходной диаграммы деформирования композита и условия равновесного деформирования зависят от свойств структурных составляющих, размеров испытуемого элемента и жесткости системы нагружения. Вырождение исходной диаграммы при циклировании приводит к усталостному разрушению композитного образца, характер которого определяется граничными условиями.

На примере композитного образца нетрудно заметить (3) прямую связь между циклическим пределом прочности $S_B(\sigma_a; n)$ и мерой $W_{ц}$ повреждения структуры композита. Функция $S_B(\sigma_a; n)$, отражающая кинетику накопления усталостных повреждений, трактуется как количественная мера циклического повреждения волокнистого материала.

Модель деградации статических свойств материала при циклировании

Учет прочностных свойств реальных волокон, роли связующего, способа армирования и других технологических факторов существенно меняет вид циклических диаграмм (2). Функция $S_B(\sigma_a; n)$ также видоизменяется, но по-прежнему отражает кинетику усталостных повреждений. Во всяком случае, до тех пор, пока основным механизмом повреждения остается разрушение волокон. Более надежную информацию о циклических свойствах промышленных композитов получают опытным путем.

Выше отмечалась существенная разница результатов расчета долговечности образца в зависимости от условий нагружения. Возникает задача расчета и сопоставления кривых Велера для разных граничных условий при минимальном объеме экспериментальных данных. Один из вариантов подобного расчета реализован при стационарном циклировании с заданной амплитудой перемещений $v_a = \text{const}$ (рис.2). Практически данный вид нагружения реализуется в эксперименте с управлением по деформациям от датчика обратной связи, установленного на рабочей части образца [2].

Проводимый расчет долговечности имеет лишь методическое значение, поскольку модель накопления усталостных повреждений не идентифицирована с конкретным материалом. По этой причине для аппроксимации циклических кривых $P_n(v)$ (см. рис.2) и кинетических кривых $P_B(v_a; n)$, $v_B(v_a; n)$ и $E(v_a; n)$, определяющих их вырождение, использованы простые (но нелинейные) аналитические зависимости, а именно:

$$\begin{aligned}
 P_n(v) &= a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3; & P_B(v_a; n) &= P_{B0} \left[1 - \left(\frac{n}{N} \right)^m \right]; \\
 v_B(v_a; n) &= v_{B0} - (v_{B0} - v_a) \left(\frac{n}{N} \right)^m; & E(v_a; n) &= E_0 \left[1 - \left(\frac{n}{N} \right)^m \right],
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

где $N = N(v_a)$ - осредненное значение числа циклов до разделения образца на две части при заданной $v_a = \text{const}$; коэффициенты a_1 , a_2 , a_3 циклических кривых

находятся из условий, аналогичных принятым в работе [5] для квазистатической кривой

$$P(v_p) = 0; \quad P'(v_B) = 0; \quad P'(0) = C_0 \left[1 - \left(\frac{n}{N} \right)^m \right].$$

Для определенности положено $v_p = 3v_B$, начальная жесткость образца $C_0 = E_0 F_0 L_0^{-1}$; F_0, L_0 - площадь сечения и длина образца; E_0 - модуль упругости нетренированного материала. Согласно заданным условиям получаем коэффициенты статической кривой $P_n(v)$, построенной после n циклов тренировки при $v_a = \text{const}$:

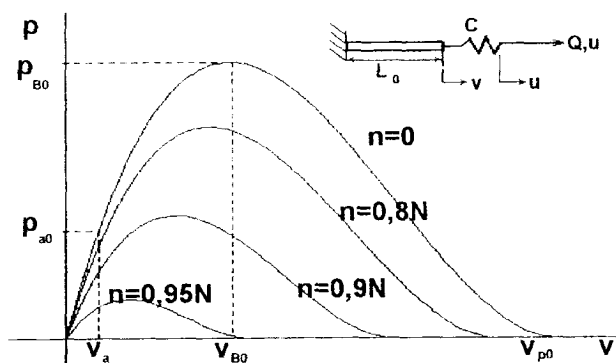


Рис. 2. Циклические диаграммы вырождения упругих, прочностных и деформационных свойств образца при циклировании

$$a_1 = C_0 \left[1 - \left(\frac{n}{N} \right)^m \right],$$

$$a_2 = - \frac{2C_0 \left[1 - \left(\frac{n}{N} \right)^m \right]}{3 \left[v_{B0} - (v_{B0} - v_a) \left(\frac{n}{N} \right)^m \right]}, \quad (9)$$

$$a_3 = \frac{C_0 \left[1 - \left(\frac{n}{N} \right)^m \right]}{9 \left[v_{B0} - (v_{B0} - v_a) \left(\frac{n}{N} \right)^m \right]^2}$$

Заметим, что для расчета требуется так называемая машинная диаграмма $P_n(v)$. Вопрос о пересчете ее в зависимости $\sigma(\epsilon)$ здесь не рассматривается. Согласно принятой модели вырождения статических свойств (8) следует $P_{BN} = 0$, что отвечает «чисто» усталостному, без статического долома, разрушению образца. Совокупность долговечностей $N = N(v_a)$ при различных значениях амплитуды v_a образует множество точек B_v диаграммы Велера. Для ее аппроксимации примем часто используемое выражение

$$N \cdot v_a^\gamma = A, \quad (10)$$

где γ и A - константы материала.

Циклирование с заданной амплитудой деформации $v_a = \text{const}$

Поведение тренированного образца из промышленного композита в составе механической системы вновь исследуется методом теории катастроф. Согласно изложенной выше методике по формулам (9) и (8) строится циклическая диаграмма $P_{n_1}(v)$ при фиксированном числе циклов n_1 . Затем в выражении (4) для полной энергии Π_1 полагаем $\Phi(v) = -P_{n_1}(v)$. Полученная в результате вычислений поверхность

M_u отвечает более сложной катастрофе сборки. Поверхности равновесных состояний M_u и M_q в случае $n = 0$ строились при следующих числовых значениях параметров системы:

$$L_0 = 2\text{мм}, \quad d_0 = 2\text{мм}, \quad C_0 = 15700 \frac{\text{Н}}{\text{мм}}, \quad E_0 = 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}, \quad C = 3140 \frac{\text{Н}}{\text{мм}}$$

Поверхность содержит катастрофу сборки с точкой возврата (начала сборки), координаты которой

$$v_K = 2v_{B0}, \quad C_K = \frac{C_0}{3}, \quad u_K = \frac{8v_{B0}}{3}$$

При $C < C_K$ имеет место катастрофический скачок с верхнего листа поверхности на нижний, если же $C > C_K$ - деформирование равновесное.

Циклическая тренировка меняет поверхности M_u и M_q . При квазистатическом деформировании тренированного образца заданным перемещением точка возврата смещается в область меньших жесткостей. Опасный (со скачком) при заданной жесткости путь нагружения после циклирования становится безопасным. Кроме того, снижаются критические параметры v_{z1} и u_{z1} , отвечающие катастрофическому скачку

$$v_{z1} = -\frac{a_2}{3a_3} - \sqrt{\left(\frac{a_2}{3a_3}\right)^2 - \frac{a_1 + C}{3a_3}}, \tag{11}$$

$$u_{z1} = \left(\frac{a_1}{C} + 1\right)v_{z1} + \frac{a_2}{C} \cdot v_{z1}^2 + \frac{a_3}{C} \cdot v_{z1}^3$$

С учетом (9) для v_{z1} имеем

$$v_{z1} = 2v_B - v_B \sqrt{4 - 3 \left(1 + C \left\{ C_0 \left[1 - \left(\frac{n}{N} \right)^m \right] \right\}^{-1} \right)}$$

При нагружении тренированного образца заданной силой

$$v_{z2} = v_B; \quad u_{z2} = \left(\frac{a_1}{C} + 1\right)v_{z2} + \frac{a_2}{C} \cdot v_{z2}^2 + \frac{a_3}{C} \cdot v_{z2}^3; \quad Q_z = C(u_{z2} - v_{z2}) \tag{12}$$

и разрушение всегда (независимо от C) динамическое при максимальном значении функции $P_n(v)$.

Заметим, что при $n = N$ точка возврата на поверхности смещается в область бесконечно больших податливостей ($1/C_K \rightarrow \infty$), поскольку

$$C_K|_{n=N} = C_0 \left[1 - \left(\frac{n}{N} \right)^m \right] / 3 = 0$$

Усталостное разрушение при циклировании с $v_a = \text{const}$ действительно равновесное, без долома. Число циклов до разрушения при $v_a = \text{const}$ определяется кривой Велера (10).

Циклирование с заданной амплитудой силы $Q_a = \text{const}$ или перемещения подвижного захвата машины $u_a = \text{const}$

Для построения кривых Велера V_q и V_u при стационарном циклировании с постоянными амплитудами Q_a или u_a требуется ввести то или иное правило суммирования повреждений. Такая необходимость продиктована тем, что при неизменных значениях параметров цикла Q_a или u_a амплитуда перемещений v_a возрастает вследствие деградации свойств материала образца.

В качестве кинетических кривых вырождения несущей или деформационной способности материала будем использовать зависимости (8). В случае силового подхода, например, два состояния материала, достигнутые при разной истории циклирования, эквивалентны, если одинакова остаточная несущая способность,

$$P_{B1}(v_{a1}; n_1) = P_{B2}(v_{a2}; n_2).$$

Согласно второму из соотношений (8), при $m = \text{const}$, из последнего равенства определяется эквивалентное число циклов

$$n_{\text{экв.}} = n_2 = n_1 \frac{N_2}{N_1}, \quad (13)$$

совпадающее с прогнозом по линейной гипотезе суммирования. N_1 и N_2 - точки кривой V_v , отвечающие амплитудам перемещений v_{a1} и v_{a2} , соответственно. Если же $m \neq \text{const}$ и меняется при переходе с одной амплитуды на другую, то

$$n_{\text{экв.}} = N_2 \left(\frac{n_1}{N_2} \right)^{\frac{m_1}{m_2}}. \quad (14)$$

Алгоритм расчета долговечности образца при нестационарном (по деформациям) нагружении основан на замене реального процесса кусочно-стационарным. В течение малого числа циклов Δn полагается $v_a = \text{const}$ и строится циклическая диаграмма $P_n(\Delta n, v)$. Затем из условия $Q_a = \text{const}$ или $u_a = \text{const}$ находится новое значение амплитуды v_a (разное для двух случаев циклирования), при котором проводится следующее догружение на Δn циклов. Интенсивность вырождения свойств материала на новой ступени циклирования определяется условием (13) при $m = \text{const}$ или (14) при переменном $m = m(v_a)$. В экспериментах наблюдалось изменение показателя m в пределах 2...6.

В частном случае, когда $m = \text{const}$, использование условия (13) приводит к следующим выражениям для коэффициентов циклической диаграммы на K -й ступени циклирования

$$\left. \begin{aligned} a_{1K} &= C_K, \\ a_{2K} &= -\frac{2a_{1K}}{3v_{BK}}, \\ a_{3K} &= \frac{a_{1K}}{9v_{BK}^2}, \end{aligned} \right\}$$

$$\text{где } C_K = C_0 \left[1 - \left(\sum_{i=1}^K \frac{\Delta n_i}{N_i} \right)^m \right]; \quad v_{BK} = v_{B0} - (v_{B0} - v_{aK}) \left(\sum_{i=1}^K \frac{\Delta n_i}{N_i} \right)^m$$

Максимум по циклической диаграмме для K -й ступени определяется выражением

$$P_{BK} = P_{B0} \left[1 - \left(\sum_{i=1}^K \frac{\Delta n_i}{N_i} \right)^m \right] \quad (15)$$

В расчетах сохранено условие $v_{PK} = 3v_{BK}$.

Меняя в первом из выражений (8) коэффициенты a_1, a_2 и a_3 на a_{1K}, a_{2K} и a_{3K} соответственно, получим искомое выражение для циклической диаграммы после K ступеней циклирования по Δn циклов. Остается провести статический расчет по приведенной выше методике и найти значения критических параметров $v_{z1K}, v_{z2K}, u_{z1K}$ и Q_{zK} . Если окажется, что какой-либо из указанных параметров при циклировании на следующей ступени Δn окажется больше его критического значения на предыдущей ступени, то расчет прекращается. Долговечность образца N_q (или N_u) определяется числом циклов при $(K-1)$ ступени догружения

$$N_q = \sum_{i=1}^{K-1} \Delta n_i.$$

Очевидно, что чем меньше Δn , тем точнее расчет, а в пределе, при $\Delta n=1$, осуществляется поцикловое суммирование повреждений.

Учитывая результаты (12) квазистатического нагружения заданной силой и выражение (15), заметим, что циклирование с заданной амплитудой $Q_a = \text{const}$ неизбежно заканчивается статическим доломом образца при выполнении условия

$$Q_{z2} = P_{BK} = Q_a,$$

имеющего смысл критерия усталостного разрушения.

В случае нагружения заданной амплитудой $u_a = \text{const}$ условие разрушения образца следующее:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } v_{aK} \geq v_{z(K-1)}, \quad P_{BK} > 0; \\ \text{б) } P_{BK} = 0, \quad v_{aK} < v_{z(K-1)} \end{array} \right\} \quad (16)$$

Случаи а) и б) в условии (16) отвечают усталостному разрушению образца со статическим доломом и "чисто" усталостному (равновесному) разделению его на две части, соответственно.

Числовой пример расчета долговечности образца

Данные числового примера с построением поверхностей катастроф при квазистатическом нагружении дополним следующими: $\gamma=2, A=320$, что при амплитуде $v_{aK}=0,2$ мм дает, согласно (10), долговечность $N=8 \cdot 10^3$. В примере рассматривались амплитуды $v_a \leq 0,2$ мм, что отвечает области многоциклового усталости.

Результаты числового примера с построением кривых B_v, B_q, B_u приведены на рис.3. Снижение модуля упругости при циклировании, заложенное в модели

вырождения свойств (8), приводит к значительному (в примере - порядка 50%) расхождению кривых Велера. Если показатель $m = \text{const}$ в формулах (8) не зависит от параметров цикла, то суммирование повреждений линейное и долговечность образца также не зависит от числового значения m .

При линейной зависимости

$$m = b - 100v_a / 3,$$

кривая Велера занимает промежуточное между кривыми B_q и B_v положение. В примере с модельным образцом, где интенсивность накопления повреждений не зависела от уровня амплитудного нагружения цикла, предсказывалась зависимость долговечности от вида граничных условий. В рассматриваемом примере, где это ограничение снято, использована модель вырождения свойств (8), также наблюдается существенное влияние способа стационарного циклирования на долговечность образца.

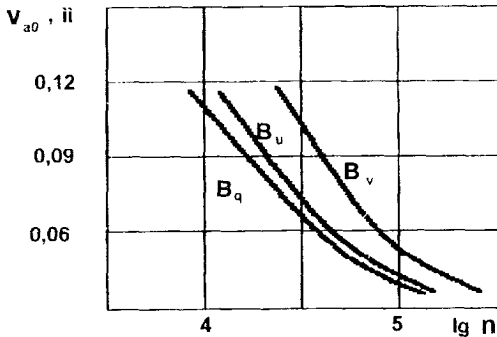


Рис.3. Кривые усталости при различных граничных условиях стационарного циклирования

Авторы выражают признательность профессору Стружанову В.В. за ряд ценных замечаний, сделанных при обсуждении работы.

Библиографический список

1. Мельников С.В. Об устойчивости процесса деформирование-разрушение // Моделирование процессов деформирования и разрушения твердых тел. Свердловск : УНЦ АН СССР.- 1987. -С. 23-31.
2. Стружанов В.В., Миронов В.И. Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций. Екатеринбург: УрО РАН, 1995.- 190 с.
3. Постон Т., Стюарт Н. Теория катастроф и ее приложения. - М.: Мир. -1980. -608с.
4. Стружанов В.В. Об одном подходе к изучению механизма зарождения трещин // ПМТФ. 1986.- №6.- С. 118-123.
5. Стружанов В.В. О разрушении некоторых стержневых систем // Расчет и оптимизация изделий машиностроения. Свердловск: УНЦ АН СССР. - 1987.- С. 36-45.