

СРАВНЕНИЕ ДВУХ МОДЕЛЕЙ УПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ, ОБОБЩАЮЩИХ МОДЕЛЬ МАЗИНГА НА СЛУЧАЙ СЛОЖНОГО НАГРУЖЕНИЯ

Келлер И.Э., Кузнецова В.Г., Новокшанов Р.С. (Пермь)

Abstract

Two extensions of Masing's elastoplastic model on complex loading were considered - Mroz's kinematic and Gohfeld&Sadakov's structural models. A comparison method of both models was found and their nonequivalence was shown. However, calculation results of metal responses under two-branched strsin paths were found to be close to each other. Both models describe delay effects of scalar and vector responses well in quality and satisfactorily in quantity. Notices on physical sense of both models was given.

1. Введение. Определяющие соотношения, предназначенные для расчетов процессов сложного нагружения упругопластических тел, должны правильно описывать эффекты запаздывания скалярных и векторных свойств материала. Эти эффекты можно обнаружить при деформировании тонкостенных трубчатых образцов по двузвенным траекториям в пространстве деформаций¹, изображенным на рис.1.а. На рис.1.б представлены соответствующие этим двузвенным траекториям кривые деформирования: локальное падение интенсивности напряжений за точкой, соответствующей излому, и последующее возвращение к одноосной кривой деформирования составляет суть эффекта запаздывания скалярных свойств². Запаздывание векторных свойств состоит в постепенном сближении направлений векторов напряжений и скоростей деформаций до их совпадения после накопления определенной величины деформации после излома, что показано на рис.1.в.

Целью настоящей работы является сравнение двух моделей, качественно описывающих данные эффекты и являющихся обобщениями одномерной структурной модели Мазинга [3,4] на случай сложного нагружения - модели З.Мруза [5] и модели Д.А.Гохфельда и О.С.Садакова [6]. Вопрос, на который авторы настоящей работы хотели ответить, состоял в следующем: "Эквивалентны ли эти модели?" Данный вопрос возникает в связи с тем, что указанные модели сформулированы с помощью разных подходов, первая является кинематической, а вторая - структурной (по терминологии, принятой автором обзора [7]). Кроме того, обсуждается вопрос о пригодности моделей для количественного описания эффектов запаздывания и делается попытка сравнения моделей с позиций физики поликристалла.

2. Модель Мазинга. Г.Мазинг в 1923 году [3,4] предложил структурную модель упругопластичности, описывающую деформационное упрочнение и эффект Баушингера. Изложим гипотезы этой модели. Представим образец материала для испытаний на растяжение-сжатие и предположим, что любая

¹ Соотношения данной работы формулируются в терминах векторных пространств деформаций и напряжений, введенных А.А.Ильюшиным в работе [1]; вопрос о связи гидростатического давления и объемной деформации не затрагивается.

² Частным случаем эффекта при изломе на 180° является эффект Баушингера.

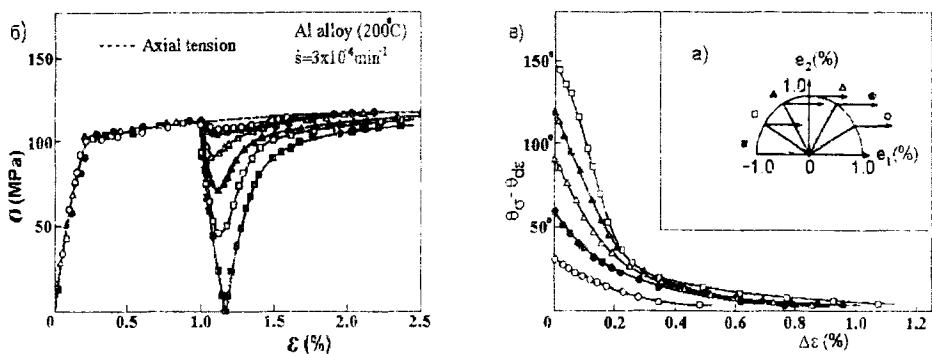


Рис.1. Эффект запаздывания скалярных и векторных свойств материала (данные работы [2]) а) двузвенные траектории деформирования, б) зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций, в) зависимость угла между векторами напряжений и приращения деформаций от длины дуги после излома.

плоскость, содержащая ось растяжения образца, остается плоской при его деформировании. Тогда для учета реально существующей микрон неоднородности упругопластических свойств материала образца последний можно представить состоящим из большого количества стержней, параллельных оси растяжения, имеющих различающиеся пластические свойства и деформирующихся так, что грани образца, перпендикулярные его оси, остаются плоскими и перпендикулярными оси. Упругие свойства стержней будем считать одинаковыми, пластические свойства - идеальными, а предел текучести - одинаковым для растяжения и сжатия и различающимся от стержня к стержню. Для удовлетворения условия совместности поперечных деформаций необходимо принять материал стержней несжимаемым, тогда изображенная на рис.2,а расчетная схема будет реализуема¹. Далее стержни с одинаковым пределом текучести будем называть элементами (конструкцией образца).

Найдем функцию плотности относительного количества элементов в зависимости от их предела текучести $f(\sigma_0)$, считая ее нормированной $\int_0^{\infty} f(\sigma_0) d\sigma_0 = 1$. Учитывая несжимаемость материала, величины напряжений и деформаций для одноосного нагружения далее будут считаться либо компонентами соответствующих тензоров, либо интенсивностями последних, в зависимости от контекста; различие будет только в знаке. Пусть образец получает удлинение ϵ , при этом элементы, имеющие предел текучести больше $\sigma = 2\mu\epsilon$ (μ - постоянная Ламе), будут находиться в упругом состоянии и обладать напряжением σ , а элементы, имеющие предел текучести меньше σ , будут находиться в пластическом состоянии с напряжениями, равными своим пределам текучести. Напряжение образца тогда находится из условия равновесия конструкции (рис.2,а)

¹ Для выполнения условия отсутствия внешних моментов стержни с одинаковым пределом текучести должны быть расположены симметрично относительно оси приложения силы; для отсутствия взаимодействия элементов конструкция образца предполагает, что захваты обеспечивают горизонтальное перемещение стержней.

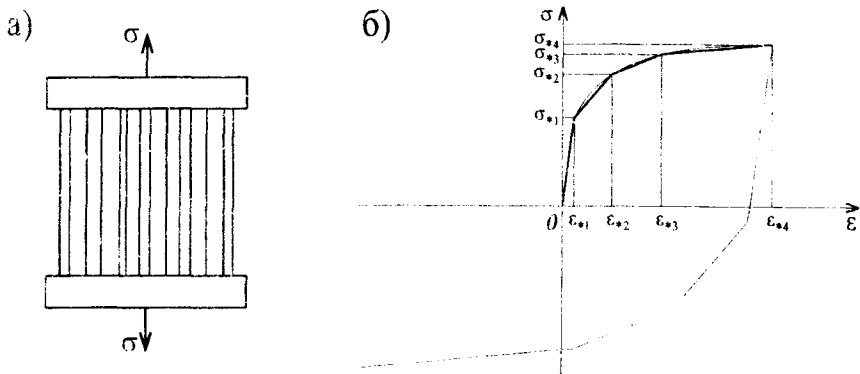


Рис.2. Описание эффекта Баушингера моделью Мазинга; а) расчетная схема моднли; б) исходная кривая, ее аппроксимация и кривая обратного нагружения.

$$\bar{\sigma}(\epsilon) = \int_0^{\sigma} \sigma_0 f(\sigma_0) d\sigma_0 + \sigma \int_{\sigma}^{\infty} f(\sigma_0) d\sigma_0, \quad \sigma = 2\mu\epsilon. \quad (1)$$

Кривая $\bar{\sigma}(\epsilon)$ есть кривая растяжения реального образца. Считая ее известной из эксперимента, из (1) может быть найдена плотность распределения

$$f(\sigma_0) = -\frac{1}{4\mu^2} \left. \frac{d^2 \bar{\sigma}(\epsilon)}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon = \frac{\sigma_0}{2\mu}} \quad (2)$$

В случае неотрицательности функции $f(\sigma_0) \quad \forall \sigma_0$ уравнение (1) способно описывать только монотонно-возрастающие и выпуклые вверх кривые упрочнения; в случае, когда эта функция может отрицательные значения, уравнение (1) может описывать более широкий класс кривых упрочнения, но физическое объяснение присутствия элементов с отрицательными “весами” авторам не представляется ясным. По этой причине далее будут рассматриваться монотонно-возрастающие и выпуклые вверх кривые, соответствующие кривым упрочнения достаточно большого класса реальных металлов, и не будут рассматриваться кривые с площадкой текучести, зубом текучести и любыми ниспадающими участками.

Рассмотрим модель с дискретным спектром пределов текучести элементов $\sigma_{0_1}, \dots, \sigma_{0_n}$, где n - количество элементов, $\sigma_{0_1} < \sigma_{0_2} < \dots < \sigma_{0_n}$. Для нахождения набора пределов текучести элементов и значений их частоты (“весов”) f_i полученную из эксперимента гладкую кривую упрочнения $\bar{\sigma}(\epsilon)$ аппроксимируем n -звенной ломаной $\hat{\sigma}(\epsilon)$ (рис.2.б). Узлы ломаной обозначим (ϵ_i, σ_i) , $i = 0 \dots n$. узел $i = 1$ возьмем в точке кривой, соответствующей пределу пропорциональности, а остальные $i = 2 \dots n$ можно найти из условия $\int_0^{\sigma} (\bar{\sigma}(\epsilon) - \hat{\sigma}(\epsilon))^2 d\epsilon \rightarrow \min$. С другой стороны, в момент, когда l из n элементов дискретной модели Мазинга находятся в состоянии текучести, а остальные - в упругости, т. е. $\sigma_0 \leq \sigma < \sigma_{0_{l+1}}$, соотношение (1) принимает вид

$$\bar{\sigma}(\epsilon) = \sum_{k=1}^l f_k \sigma_{0_k} + \sigma \sum_{k=l+1}^n f_k, \quad \sigma = 2\mu\epsilon \quad (3)$$

и представляет собой уравнение прямой. Моменту начала текучести i -го элемента соответствует i -й узел ломаной $\hat{\sigma}(\epsilon)$ и $\sigma_0 = 2\mu\epsilon_*$, $i = 1..n$. Тогда, рассматривая моменты $\epsilon = \epsilon_*$, $i = 2..n$, из соотношения (3) получаем

$$f_1 = \frac{\sigma_{*1} - \sigma_{02}}{\sigma_{01} - \sigma_{02}},$$

$$f_{i-1} = \frac{\sigma_{*i} - \sigma_{0i} (1 - \sum_{k=1}^{i-2} f_k) - \sum_{k=1}^{i-2} f_k \sigma_{0k}}{\sigma_{0i-1} - \sigma_{0i}}, \quad i = 3..n, \quad (4)$$

$$f_n = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} f_k.$$

Дискретная формулировка полностью определена.

Вследствие описанной процедуры идентификации параметров модель при монотонном растяжении даст кривую упрочнения $\hat{\sigma}(\epsilon)$. Если далее осуществить разгрузку образца, то она начнется во всех элементах *одновременно*, следуя такому же упругому закону, как и в начале активного нагружения. В момент, когда напряжение в элементе $i = 1$ достигнет предела текучести $-\sigma_{01}$ (для чего может понадобиться активное нагружение образца в обратном направлении), напряжение образца достигнет предела пропорциональности в обратном направлении. Поскольку после начала разгрузки напряжение в элементе $i = 1$ меняется от σ_{01} до $-\sigma_{01}$, то линейно-упругий участок кривой обратного нагружения *вдвое* длиннее первоначального (рис.2,б). Можно показать, что отмеченное удвоение длины будет присутствовать и у всех остальных участков кривой обратного нагружения по отношению к первоначальной и для всей кривой обратного нагружения $\hat{\sigma}_-(\epsilon_-)$ справедлив т. н. принцип Мазинга [5,6]

$$\hat{\sigma}_-(\epsilon_-) = 2\hat{\sigma}\left(\frac{1}{2}\epsilon\right). \quad (5)$$

На рис.2,б видно, что модель качественно описывает эффект Баушингера, заключающийся в снижении условного предела текучести образца при изменении направления деформирования на противоположное и в уменьшении кривизны кривой обратного нагружения. Реакция реальных металлов, количественно близкая к описываемой соотношением (5), наблюдается при деформациях до 1% [3,4,8]. В условиях циклического нагружения, не обязательно с фиксированной амплитудой, модель описывает реакцию циклически-стабилизированного материала [6,8].

Следует отметить, что разгрузить все элементы пластически деформированного образца невозможно, так как после разгрузки образца будет обеспечено нулевое *среднее* напряжение при имеющихся в элементах конструкции образца остаточных напряжениях. Совокупность параллельно соединенных элементов образца поэтому обладает определенной памятью об истории нагружения, носителями которой служат напряжения в элементах.

3. Модель Мруза. В 1967 году З.Мруз [5] предложил обобщение модели Мазинга на пространственный случай. Опишем сначала кинематическую схему модели. Аппроксимируем кривую упрочнения при одноосном нагружении способом, описанным выше. Каждый из n сегментов ломаной характеризуется постоянным модулем упрочнения K_i , $i = 1..n$ ($K_1 = 2\mu$). Поскольку дальнейшее исследование будет ограничено плоскими траекториями деформирования, рассмотрим двумерную формулировку. В плоскости напряжений данная

аппроксимация представляется n концентрическими окружностями¹ с центром в нуле и радиусами соответственно σ_i , $i = 1..n$. Первую окружность, ограничивающую область упругости, будем называть "поверхностью текучести", а остальные, разделяющие области постоянного модуля упрочнения, - "поверхностями нагружения". Конфигурация совокупности поверхностей в процессе нагружения меняется. Поверхности перемещаются без изменения их формы, размера, не поворачиваясь и не пересекаясь. Обозначая $\vec{\sigma}$ - напряженное состояние¹, а $\vec{\alpha}_i$ - положение центра i -й поверхности, $i = 1..n-1$, запишем уравнения поверхностей в виде

$$f(\vec{\sigma} - \vec{\alpha}_i) = \sigma_i, \quad i = 1..n. \quad (6)$$

Любая поверхность начинает двигаться, когда точка напряженного состояния достигает ее. Мгновенное движение осуществляется вдоль отрезка, соединяющего точку напряженного состояния с точкой на следующей по вложению поверхности, имеющей такую же нормаль (сопряженной точкой)

$$d\vec{\alpha}_i = d\mu((\vec{\alpha}_{i+1} - \vec{\alpha}_i) + (\vec{\alpha}_i - \vec{\sigma}) - (\vec{\alpha}_i - \vec{\sigma}) \frac{\sigma_{i+1}}{\sigma_i}), \quad i = 1..l, \quad (7)$$

где l - количество активных (условие (6)) поверхностей, а $d\mu$ - скалярный множитель, который выбирается из условия, чтобы мгновенное движение точки напряженного состояния относительно активной поверхности происходило в касательной плоскости к поверхности в этой точке:

$$(d\vec{\alpha}_i - d\vec{\sigma}) \cdot \vec{n} = 0, \quad i = 1..l, \quad (8)$$

где \vec{n} - единичная нормаль к поверхности текучести в точке напряженного состояния. ":" обозначает двойное скалярное произведение. Из уравнений (7),(8) видно, что все активные поверхности движутся в данный момент как единое целое и касаются друг друга в точке нагружения; кроме того, кинематическая схема (7),(8) и выпуклость и подобие поверхностей (6) гарантируют, что любая i -я поверхность всегда останется внутри $(i+1)$ -й.

Приращение полных деформаций согласно модели представляется как

$$d\vec{\epsilon} = d\vec{\epsilon}^e + d\vec{\epsilon}^p, \quad (9)$$

где упругая часть находится из соотношения

$$d\vec{\epsilon}^e = \frac{1}{2\mu}(d\vec{\sigma} - d\vec{\alpha}_1), \quad (10)$$

а пластическая - согласно закону

$$d\vec{\epsilon}^p = \frac{1}{K_i} \vec{n} d\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (11)$$

Легко показать, что принятая кинематическая схема (6)-(8) и соотношения (9)-(11) в случае пропорционального нагружения в прямом направлении, разгрузки и нагружения в обратном направлении будут описывать реакцию материала, полностью идентичную рассчитанной по модели Мазинга (см. рис. 2,б). В случае сложного нагружения модель Мруза описывает упоминавшиеся во введении эффекты запаздывания.

4. Структурная плоская модель. Сформулируем другое обобщение модели Мазинга. Представим образец материала кубической формы, подвергаемый деформированию растяжением-сжатием независимо вдоль двух пар параллельных граней куба. Предположим, что сечения образца вдоль третьей пары плоскостей

¹ Согласно формулировке [5] поверхности должны быть выпуклыми и подобными.

¹ Уравнения двумерных моделей в работе формулируются в терминах векторов пространства Ильюшина.

куба в процессе деформирования остаются плоскими. Тогда для учета неоднородности упругопластических свойств материала образца можно представить последний состоящим из пластин, параллельных третьей паре граней куба, с одинаковыми упругими, но различающимися пластическими свойствами. Пачка пластин должна деформироваться так, чтобы грани образца, перпендикулярные осям растяжения-сжатия, оставались плоскими и перпендикулярными им. Как и для модели Мазинга, деформации пластин в поперечном направлении (нормальном свободной грани) будут совместными, если предположить несжимаемость материала пластин, а относительно последовательности их расположения остается справедливое замечание в сноске на стр.30. Группы пластин с одинаковыми пластическими свойствами будем называть элементами, а их число полагать конечным - n . Из кинематических гипотез модели следует

$$d\bar{\epsilon}_i = d\bar{\epsilon}, \quad i = 1..n, \quad (12)$$

где $\bar{\epsilon}_i$ - полные деформации i -го элемента, а $\bar{\epsilon}$ - образца. Приращение полных деформаций каждого элемента представляется суммой

$$d\bar{\epsilon}_i = d\bar{\epsilon}_i^e + d\bar{\epsilon}_i^p, \quad i = 1..n, \quad (13)$$

где $d\bar{\epsilon}_i^e$ - упругая, а $d\bar{\epsilon}_i^p$ - пластическая ее части. Упругие деформации связываются с напряжениями элементов $\bar{\sigma}_i$ как

$$d\bar{\epsilon}_i^e = \frac{1}{2\mu} d\bar{\sigma}_i, \quad i = 1..n. \quad (14)$$

Пластические свойства элементов будем полагать идеальными и характеризующимися "поверхностями текучести" в виде окружностей в плоскостях напряжений соответствующих элементов с центрами в нуле

$$f(\bar{\sigma}_i) = \sigma_{0_i}, \quad i = 1..n \quad (15)$$

со стохастически распределенной величиной радиуса σ_{0_i} , $i = 1..n$. Если напряжение в l -м элементе удовлетворяет условию его текучести, то второе слагаемое в (13) не нулевое и находится из ассоциированного с критерием текучести закона

$$d\bar{\epsilon}_i^p = d\lambda_l \bar{\sigma}_i, \quad f(\bar{\sigma}_i) = \sigma_{0_i}, \quad (16)$$

где $d\lambda_l$ - скалярный множитель. Напряжение образца $\bar{\sigma}$ находится как среднее напряжений в элементах

$$\bar{\sigma} = \sum_{k=1}^n f_k \bar{\sigma}_k. \quad (17)$$

Идентифицировав параметры элементов σ_{0_i} и f_i , $i = 1..n$ из эксперимента на одноосное растяжение методом, описанным в п.2, получим, что при одномерном знакопеременном нагружении данная модель будет полностью идентична модели Мазинга. Изложенная модель может трактоваться как склерономный вариант модели, предложенной авторами работы [6].

5. Качественное сравнение моделей. Несмотря на идентичность в одномерном случае, модели не эквивалентны. Покажем это для $n=2$. Для возможности сравнения моделей пп. 3 и 4 для последней рассмотрим пространство среднего напряжения $\bar{\sigma}$ и введем в нем поверхности, соответствующие началу текучести первого и второго элементов; поскольку начальные упругопластические свойства согласно данной модели не зависят от направления деформирования, искомыми "поверхностями" будут окружности с центром в нуле ($\bar{\sigma} = \vec{0}$) и радиусами $r_1 = f_1 \sigma_{0_1} + (1 - f_1) \sigma_{0_2} = \sigma_{0_1} = \sigma_{0_1}$ и $r_2 = f_1 \sigma_{0_1} + (1 - f_1) \sigma_{0_2} = \sigma_{0_2}$. Таким

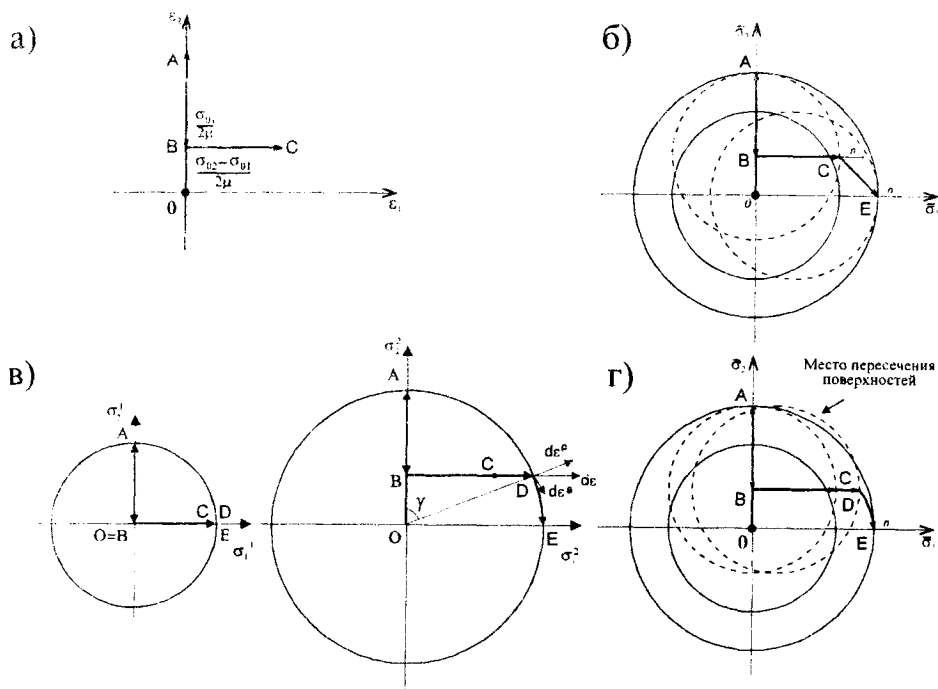


Рис.3. Образ процесса деформирования, заданного траекторией (а) в пространстве напряжений б) модели Мруза; в) пространствах напряжений элементов структурной модели; г) пространстве среднего напряжения структурной модели.

образом, исходная конфигурация поверхностей структурной модели в пространстве среднего напряжения полностью совпадает с исходной конфигурацией поверхностей модели Мруза. На рис.3.б будут показаны последовательные положения поверхностей модели Мруза, на рис.3.в - поверхности текучести элементов структурной модели, а на рис.3.г - конфигурация введенных поверхностей в пространстве среднего напряжения.

Пусть в процессе нагружения вдоль траектории деформирования ОА (см. рис.3.а) напряжение в образцах обеих моделей достигло значения $\{0, \sigma_2\}$ (точка А на рис.3.б-г). Мысленно разгружая образец структурной модели вдоль лучей из точки А, можно прийти к выводу, что поверхность текучести на схеме рис.3.г должна в данный момент касаться внешней поверхности в точке А, как показано на рисунке. Разгрузим образцы вдоль отрезка АВ траектории деформирования на величину $-\frac{\sigma_{01}}{2\mu}$ и обозначим результирующее напряжение точкой В на рисунках.

Далее рассмотрим процесс деформирования вдоль луча ВС (см. рис.3.а). В момент, когда напряжение в элементе $i=1$ образца структурной модели достигает значения $\{\sigma_{01}, 0\}$ (точка на рисунках), поверхности текучести (см. рис.3.б,г) начинают перемещаться. Факт перемещения поверхности текучести в пространстве среднего напряжения (см. рис.3.г), как и ранее, можно установить мысленной разгрузкой вдоль лучей, выходящих из точки нагружения на

поверхности текучести первого элемента. Поверхность на схеме Мруза согласно закону (7) будет двигаться вдоль отрезка СЕ, пока не достигнет внешней поверхности в точке Е (сопряженной С). Неизменность направления трансляции связана с неизменностью приращения пластических деформаций и следует из (7),(8) и (11). Поверхность на схеме структурной модели будет двигаться вдоль отрезка СД, параллельного лучу ВС, пока напряжение в элементе $i=2$ не достигнет поверхности текучести (точка D). Покажем это. Среднее напряжение в точке С есть $\{\sigma_0, (1-f_1)(\sigma_2 - \sigma_0)\}$, а среднее напряжение в момент достижения напряжением в элементе $i=2$ поверхности текучести есть $\{\sigma_0, f_1 + \sigma_2 \cos \gamma (1-f_1), (1-f_1)(\sigma_2 - \sigma_0)\}$. Неизменность второй компоненты среднего напряжения в точках С и D и доказывает горизонтальность отрезка CD на рис.3.г. Точка D на схеме (см. рис.3.г) расположена внутри большой поверхности, поскольку по определению эту поверхность образуют точки $\{\bar{\sigma}_1 = f_1 \sigma_0 + (1-f_1)\sigma_2\}$, а среднее напряжение $\bar{\sigma} = f_1 \bar{\sigma}_1 + (1-f_1)\bar{\sigma}_2$ может достичь такой величины только при условии параллельности $\bar{\sigma}_1$ и $\bar{\sigma}_2$, которой в данный момент (точка D, см. рис.3.в) нет. В процессе последующего деформирования, пластического для первого элемента и упругопластического для второго, напряженное состояние первого элемента не изменяется, а точка напряженного состояния второго элемента согласно уравнениям (12)-(14), (16) будет двигаться по поверхности текучести этого элемента до точки Е. Очевидно, что в момент достижения точки Е поверхность текучести на схеме (см. рис.3.г) коснется большой поверхности. Можно показать, что путь DE на этой схеме представляет собой дугу окружности. После того, как напряженное состояние в каждом образце достигнет сопряженной точки Е на схемах, конфигурации поверхностей далее не изменяются и полностью идентичны. Таким образом, трансляция поверхности текучести в обеих схемах осуществляется в данном примере до достижения сопряженной точки, но траектории трансляции (и напряжений) различаются. Учитывая то, что структурная модель упругопластичности построена с помощью гипотезы Фойгта (12), можно предположить, что модель Мруза соответствует структурной модели, построенной с помощью более сложной гипотезы связи "структурных" и макроскопических переменных. С помощью гипотезы Рейсса (напряжения в элементах равны напряжению образца) не удастся описать даже эффект Баушингера в одномерном варианте. Поэтому, по всей вероятности, гипотеза той структурной модели, которая приводит к реакции материала по Мрузу, должна быть близка к какой-либо из гипотез самосогласованных моделей, вообще говоря, точнее описывающих поведение реального металла [9]. Заметим также, что поверхности структурной модели в процессе нагружения образца пересекаются, что имеет место в рассмотренном примере в течение нагружения вдоль участка CD. Можно показать, однако, что это не приводит к какому-либо противоречию.

6. Количественное сравнение моделей. С помощью формулировок обеих моделей пп.3-4 было рассмотрено поведение материала при деформировании по двузвенным траекториям, изображенным на рис.4.а. В качестве исходных данных была взята кривая одноосного нагружения алюминиевого сплава (см. рис.1.б), которая была аппроксимирована ломаной с 25 узлами. Нагружение велось шагами по 0.001% деформации, излом задавался, как и в эксперименте ([2], рис.1.в), при 1% деформации. Оказалось, что реакция материала на двузвенное нагружение, предсказанная обеими моделями, почти совпадает (см. рис.4.б,в), хорошо качественно и удовлетворительно количественно согласуется с экспериментом (см. рис.1.б,в). Однако, необходимо отметить, что локальное падение интенсивности напряжений после излома на угол $0-120^\circ$, предсказанное обеими теориями.

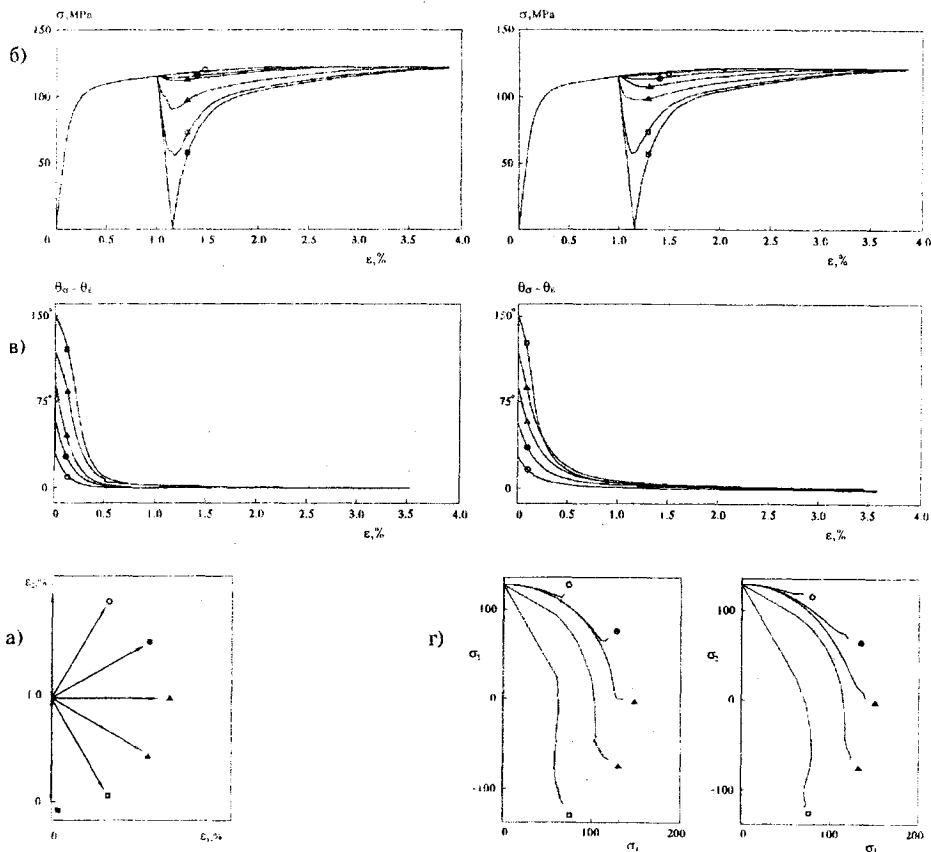


Рис.4. Сопоставление расчета по двум моделям с экспериментом (слева - расчет по модели Мруза, справа - по структурной модели); а) траектории деформирования; б) эффект запаздывания скалярных свойств; в) эффект запаздывания векторных свойств; г) траектории напряжений.

оказывается меньше, чем в эксперименте. Траектории напряжений, рассчитанные согласно обеим моделям (см. рис.4,г), также оказались близкими. Следует отметить, однако, что характер стремления точек, изображающих напряженное состояние, к предельной поверхности в пространстве напряжений образца различается; к эксперименту [10] ближе оказывается расчет по структурной модели. Плавный изгиб в конце траектории напряжений, получаемый согласно структурной модели, объясняется имеющим место в этой модели законом трансляции поверхностей (п.5). Согласно теории Мруза траектория напряжений подходит к предельной поверхности практически перпендикулярно, что не согласуется с данными экспериментов ([10], стр.114).

С точки зрения простоты реализации для экспериментов с контролем полных деформаций структурная модель более предпочтительна. Авторы нашли, что модель Мруза достаточно сложно использовать, если внешнее воздействие задано в виде траектории деформации. Кроме того, если не предусмотреть

специальных мер, модель очень подвержена неустойчивостям численной схемы. Авторы пытались переформулировать модель Мруза в терминах пространства деформаций, однако попытка не увенчалась успехом: обнаружилось, что поверхности в пространстве деформаций, соответствующие поверхностям в пространстве напряжений (6), могут пересекаться, что усложняет формулировку.

7. **Заключение.** В результате настоящей работы был найден способ теоретического сравнения двух обобщений модели Мазинга на сложное нагружение: модели З.Мруза (кинематической) и модели Д.А.Гохфельда и О.С.Садакова (структурной) и показано, что последние не эквивалентны. Модель З.Мруза, вероятно, близка к модели поликристалла с самосогласованной схемой связи микро- и макропеременных, структурная модель использует гипотезу Фойгта. Более точная формулировка "структурной" гипотезы модели Мруза осталась нами найденной. Качественное и количественное сравнение результатов расчета реакции материала на деформирование по двузвенным траекториям показало, что предсказания обеих моделей довольно близки друг другу и достаточно хорошо согласуются с экспериментом. Недостатком обеих моделей является меньшее локальное падение интенсивности напряжений после излома по сравнению с экспериментом. Структурная модель качественно описывает характер стремления траекторий напряжений к предельной поверхности в пространстве напряжений, модель Мруза данный эффект не описывает. Сравнение простоты численной реализации показало, что для траекторий полных деформаций удобнее использовать структурную модель.

Следует отметить, что в рассмотренных моделях естественно решается вопрос о векторном базисе пространства напряжений, по которому раскладывается значение функции приращения деформаций. Такой базис в традиционных соотношениях Прандтля-Рейсса [7] составляет единственный элемент - вектор напряжений, а в соотношениях моделей Прагера или Циглера [7] таких элементов два (добавляется вектор ориентированных микронапряжений). Неполнота базиса, конечно, накладывает определенные ограничения на возможную ориентацию вектора приращения деформаций в процессе нагружения. В рамках структурной же модели таким базисом является набор напряжений в элементах $\bar{\sigma}_i, i = 1..n$; как только траектория деформирования становится неоднородной, неоднородным становится и набор напряжений в элементах. Размерность пространства, нагянутого на векторы напряжений в элементах, всегда равна размерности траектории деформирования. материал согласно модели "подстраивает свой базис", всегда увеличивая его (вплоть до пятимерного), под конкретный процесс деформирования. Таким же свойством обладает и модель Мруза, в которой роль базисных элементов играют векторы $\alpha_i, i = 1..n$. Поэтому обе модели накладывают меньше ограничений на поведение материала, чем традиционные.

Несмотря на простоту идентификации обеих моделей, она вызывает определенные сомнения, поскольку модели, предназначенные для сложного нагружения, используют данные для одноосного нагружения материала. Для особенностей реакции реальных материалов на непропорциональное нагружение эти модели должны быть усовершенствованы на основе анализа физических процессов в металле. В данный момент авторам не представляется ясным, в какой мере на свойства металла при сложном нагружении влияют свойства отдельных элементов (по сути зерен поликристалла и их конгломератов), процессы в них (в том числе упрочнение), насколько существенно гипотеза связи микро- и макросвойств. Глубокое исследование данных вопросов, по видимому, должно привести к созданию более корректной модели упругопластичности, пригодной для решения современных задач.

Авторы признательны профессору П.В.Трусову за дискуссию по данной проблеме и полезные замечания, сделанные им в процессе работы.

Библиографический список

1. Ильюшин А.А. О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред// ПИММ. -1954. - Т.18. - С.641-666.
2. Ohashi Y., Ohno N. Inelastic stress-responses of an aluminium alloy in non-proportional deformations at elevated temperature// J.Mech.Phys.Solids. - 1982. - V.30. No5. - P.287-304.
3. Masing G. Wiss. Ver. a. d. Siemens-Konzern. - 1923. - V.3. - P.231; Ibid. - V.5. - P.135.
4. Masing G., Mauksch W. Wiss. Ver. a. d. Siemens-Konzern. - 1926. - V.5. - P.142.
5. Mroz Z. On the description of anisotropic workhardening// J.Mech.Phys.Solids. - 1967. - V.15. No3. - P.163-175.
6. Гохфельд Д.А., Садаков О.С. Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторных нагружениях. - М.: Машиностроение, 1984. - 256с.
7. Васин Р.А. Определяющие соотношения теории пластичности// Итоги науки и техники ВИНТИ. Сер. Механика деформируемого твердого тела. - 1990. - Т.21. - С.3-75.
8. Москвитин В.В. Пластичность при переменных нагружениях. - М.: Изд-во МГУ. - 1965. - 263с.
9. Havlicek F., Tokuda M., Kratochvil J. Unified constitutive equations in polycrystal finite element model. Res. Rep. Fac. Eng. Mie. Univ. - 1990. - V.15. - P.23-44.
10. Лэмба Г.С., Сайдботтом О.М. Пластичность при циклическом деформировании по непропорциональным траекториям. Ч.I. Эксперименты с циклическим упрочнением, приспособляемостью и последующим деформационным упрочнением// Теор. осн. инж. расч. - 1978. - Т.100. №1. - С.108-117.