УДК 539.3

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА МИКРОМЕХАНИКИ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОМПОЗИТОВ С АНИЗОТРОПНЫМИ СЛОЯМИ

Кравченко О. Л., Вильдеман В. Э.(Пермь)

Abstract

This study deals with the boundary-value micromechanical problem for nonelastic deformation of laminates with orthotropic layers set randomly. The constitutive equations for nonelastic behavior of the layers are presented. The laminate constitutive equations can be calculated from the solution of the boundary-value micromechanical problem. This solution is reduced to the nonlinear system of algebraic equations for oscillations of layer's values.

Элементы конструкций в ряде случаев при эксплуатации проявляют нелинейный характер деформирования. В связи с этим является актуальным анализ неупругого поведения слоистых композитов, которые являются распространенным конструкционным материалом. Подобный анализ возможен на основе решения стохастической краевой задачи микромеханики композитов. Постановка задачи в стохастической форме обусловлена множественными отклонениями реальных материалов от идеальной структуры, вызванными в первую очередь различными технологическими факторами.

Рассмотрим краевую задачу для элементарного макрообьема композиционного материала со случайным расположением плоских анизотропных слоев, ортогональных оси X_3. При этом разнородные слои могут быть разориентированы на некоторый угол. Будем считать,что на всех поверхностях раздела элементов структуры осуществляется идеальный контакт, т.е. выполняются условия $[[U_i]]=0$ и $[[\sigma_{i3}]]=0$, где $[[a]]$означает величину скачка функции a при переходе из одного слоя в другой. U - вектор структурных перемещений.

Уравнения равновесия содержат лишь по одному слагаемому,в котором дифференцирование проводится по переменной X_3:

$$\sigma_{i3,3}=0. \tag{1}$$

Из уравнения следует, что

$$\sigma_{i3}=<\sigma_{i3}>. \tag{2}$$

Угловые скобки означают операцию статистического осреднения, которая в рассматриваемом случае эквивалентна осреднению по объему.

Геометрические соотношения, устанавливающие связь структурных деформаций и перемещений имеют вид :

$$\varepsilon_{ij}=<\varepsilon_{ij}>+1/2(U'_{i,3}\delta_{j3}+U'_{j,3}\delta_{i3}), \tag{3}$$

где штрих означает пульсацию случайной величины (в данном случае перемещения), т.е. ее отклонения от математического ожидания

Определяющие соотношения нелинейной среды [2]

$$\sigma_{ij} = C^p_{ijmn}\varepsilon_{mn}, \tag{4}$$

$$C^p_{ijmn} = C_{ijpq}(I_{pqmn} - \omega_{pqmn}(I^{(h)}_\varepsilon)), \tag{5}$$

где C^p_{ijmn} -тензор модулей неупругого деформирования, I_{mnpq} - единичный тензор четвертого ранга,определяемый с помощью символов Кронекера:

$$I_{mnpq} = 1/2(\delta_{np}\delta_{nq} + \delta_{mq}\delta_{np}); \tag{6}$$

C_{ijpq} - тензор упругих модулей, ω_{pqmn} - тензор материальных функций. Число независимых компонент и структура тензора ω_{pqmn} зависит от анизотропии материала. $I^{(h)}_\varepsilon$ - инварианты тензора деформаций ($h = \overline{1,n}$; n -число инвариантов).Уравнения (1), (3), (4) образуют замкнутую систему уравнений.

Граничные условия

$$< \varepsilon_{ij} > x_j \Big|_\gamma = U^0_i, \tag{7}$$

если на границе задан вектор перемещений, или

$$< \sigma_{ij} > n_j \Big|_\gamma = S^0_i, \tag{8}$$

если задан вектор поверхностных сил S^0, эквивалентны заданию макродеформаций или макронапряжений соответственно.

Соотношения (4) для ортотропных слоев композиционного материала при совпадении осей упругой симметрии с осями координат можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= C_{1111}(1-\lambda_1)\varepsilon_{11} + C_{1122}(1-\lambda_4)\varepsilon_{22} + C_{1133}(1-\lambda_6)\varepsilon_{33},\\
\sigma_{22} &= C_{1122}(1-\lambda_4)\varepsilon_{11} + C_{2222}(1-\lambda_2)\varepsilon_{22} + C_{2233}(1-\lambda_5)\varepsilon_{33},\\
\sigma_{33} &= C_{1133}(1-\lambda_6)\varepsilon_{11} + C_{2233}(1-\lambda_5)\varepsilon_{22} + C_{3333}(1-\lambda_3)\varepsilon_{33},\\
\sigma_{12} &= 2C_{1212}(1-\lambda_7)\varepsilon_{12},\\
\sigma_{13} &= 2C_{1313}(1-\lambda_8)\varepsilon_{13},\\
\sigma_{23} &= 2C_{2323}(1-\lambda_9)\varepsilon_{23}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Очевидно,что независимые материальные функции неупругого поведения λ_α ($\alpha = 1,\dots,9$) однозначно связаны с компонентами тензора ω для рассматриваемого материала.

Для ортотропного тела аргументами материальных функций λ_α ($\alpha = 1,\dots,9$) являются шесть инвариантов тензора деформаций [1]:

$$I_\varepsilon^{(1)} = \varepsilon_{11}, \quad I_\varepsilon^{(2)} = \varepsilon_{22}, \quad I_\varepsilon^{(3)} = \varepsilon_{33}, \quad I_\varepsilon^{(4)} = \varepsilon_{12}, \quad I_\varepsilon^{(5)} = \varepsilon_{13}, \quad I_\varepsilon^{(6)} = \varepsilon_{23}. \qquad (10)$$

Аналогично вводятся и инварианты тензора напряжений :

$$I_\sigma^{(1)} = \sigma_{11}, \quad I_\sigma^{(2)} = \sigma_{22}, \quad I_\sigma^{(3)} = \sigma_{33}, \quad I_\sigma^{(4)} = \sigma_{12}, \quad I_\sigma^{(5)} = \sigma_{13}, \quad I_\sigma^{23} = \sigma_{23}. \qquad (11)$$

Следует отметить,что инварианты тензоров деформаций и напряжений совпадают с компонентами этих тензоров только в специально выбранной системе координат,оси которой совпадают с главными осями ортотролии.

Экспериментальное определение функций от шести аргументов представляется малореальным. Поэтому следует каким-то образом (на основе теоретического прогноза или установочных экспериментов) упростить определяющие соотношения.В основу упрощения может быть положена гипотеза о линейной связи инвариантов $I_\sigma^{(\psi)}$и $I_\varepsilon^{(\psi)}$($\psi=1,..,3$), т.е. $\lambda_\alpha = 0$ при $\lambda=1,...,6$. В рамках простейшей теории кроме последней гипотезы могут быть приняты также следующие зависимости :

$$I_\sigma^{(\xi)} = I_\sigma^{(\xi)}(I_\varepsilon^{(\xi)}), \ \xi = 4,...,6. \qquad (12)$$

Как видно из соотношений (8) с учетом (9) для определения этих зависимостей, т.е. построения материальных функций λ_α, необходимо осуществить в экспериментах сдвиги по трем взаимно ортогональным плоскостям , параллельным главным осям ортотропии.

Используя уравнения (2), (5) и условие равенства нулю математического ожидания пульсации случайной величины,после преобразования получим следующие уравнения :

$$F_1^{(i)} = (<\sigma_{33}> - C_{1133}^{P(i)} <\varepsilon_{11}> - C_{2233}^{P(i)} <\varepsilon_{22}> - C_{3333}^{P(i)} <\varepsilon_{33}>)(C_{3333}^{P(i)})^{-1} - U_{3,3}^{\prime(i)} = 0,$$

$$F_2^{(i)} = (<\sigma_{23}> - 2C_{2323}^{P(i)} <\varepsilon_{23}>)(C_{2323}^{P(i)})^{-1} - U_{2,3}^{\prime(i)} = 0, \qquad (13)$$

$$F_3^{(i)} = (<\sigma_{13}> - 2C_{1313}^{(i)} <\varepsilon_{13}>)(C_{1313}^{P(i)})^{-1} - U_{1,3}^{\prime(i)} = 0 ,$$

где i - номер компонента,

$$<\sigma_{33}> = <(c_{1133}^{P} <\varepsilon_{11}> + C_{2233}^{P} <\varepsilon_{22}> + C_{3333}^{P} <\varepsilon_{33}>)(C_{3333}^{P})^{-1}> <(C_{3333}^{P})^{-1}>^{-1},$$

$$<\sigma_{23}> = 2<(C_{2323}^{P})^{-1}>^{-1} <\varepsilon_{23}>, \qquad (14)$$

$$<\sigma_{13}> = 2<(C_{1313}^{P})^{-1}>^{-1} <\varepsilon_{13}> .$$

При решении задачи в напряжениях определяющие соотношения можно записать в виде

$$\varepsilon_{ij} = J_{ijmn}^{P} \sigma_{mn}, \qquad (15)$$

где J^p_{ijmn} -компоненты тензора податливостей неупругого деформирования, зависящие от значений независимых инвариантов тензора напряжений. Представив компоненты тензора напряжений как сумму осредненной и пульсационной составляющих

$$\sigma_{\alpha\beta} =<\sigma_{\alpha\beta}> +\sigma'_{\alpha\beta}, \quad (\alpha,\beta = 1,2) \tag{16}$$

и используя уравнения (2) , (5), условие равенства нулю математического ожидания пульсации случайной величины, после преобразований получим следующие уравнения:

$$F_1^{(i)} = [A_1^{(i)}(<\varepsilon_{11}> -\phi_1^{(i)}) + A_2^{(i)}(<\varepsilon_{22}> -\phi_2^{(i)})](D^{(i)})^{-1} - \sigma_{11}^{\prime(i)} = 0, \tag{17}$$

$$F_2^{(i)} = [A_2^{(i)}(<\varepsilon_{11}> -\phi_1^{(i)}) + A_3^{(i)}(<\varepsilon_{22}> -\phi_2^{(i)})](D^{(i)})^{-1} - \sigma_{22}^{\prime(i)} = 0, \tag{18}$$

$$F_3^{(i)} = A_4^{(i)}(<\varepsilon_{12}> -\phi_3^{(i)})(D^{(i)})^{-1} - \sigma_{12}^{\prime(i)} = 0, \tag{19}$$

где

$$A_1 = J^p_{2222}J^p_{1212}, \quad A_2 = -J^p_{1122}J^p_{1212}, \quad A_3 = J^p_{1111}J^p_{1212},$$

$$A_4 = J^p_{1111}J^p_{2222} - (J^p_{1122})^2, \quad D = J^p_{1111}J^p_{2222}J^p_{1212} - (J^p_{1122})^2 J^p_{1212}.$$

Значения входящих в уравнения (17)-(19) $<\varepsilon_{11}>$,$<\varepsilon_{22}>$ и $<\varepsilon_{12}>$ определяются по соотношениям :

$$\langle\varepsilon_{11}> = (Q_1P_1 + Q_2P_2)d^{-1}, \qquad <\varepsilon_{22}> = (Q_1P_2 + Q_2P_2)d^{-1}, \qquad <\varepsilon_{12}> = Q_3P_6d^{-1},$$

где

$$Q_1 =<(\phi_1A_1 + \phi_2A_2)D^{-1}>, \qquad P_1 =<A_3D^{-1}><A_4D^{-1}>,$$

$$Q_2 =<(\phi_1A_2 + \phi_2A_3)D^{-1}>, \qquad P_2 =<A_2D^{-1}><A_4D^{-1}>,$$

$$Q_3 =<\phi_3A_4D^{-1}>, \qquad P_3 =<A_1D^{-1}><A_4D^{-1}>,$$

$$P_4 =<A_1D^{-1}><A_3D^{-1}> - <A_2D^{-1}>, \qquad d =<A_1D^{-1}>P_1 - <A_2D^{-1}>P_2.$$

При несовпадении осей упругой симметрии разнородных слоев компоненты тензоров C^p и J^p должны быть преобразованы по известным формулам перехода к общей системе координат.

Таким образом,как при заданных макродеформациях $<\varepsilon_{ij}>$,так и при заданных макронапряжениях $<\sigma_{ij}>$, рассматриваемая стохастическая задача сводится к системе N=3n (n-число компонентов композита) нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных пульсаций структурных величин. Решение задачи позволяет строить эффективные материальные функции слоистых композиционных материалов. В частных случаях из полученной системы уравнений (2),(3)-(5) следуют формулы для эффективных упругих модулей [1] и разрешающая система уравнений стохастической краевой задачи для слоистых композитов с изотропными слоями [3] .

Литература

1. Победря Б.Я. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984.- 336 с.
2. Соколкин Ю.В.,Ташкинов А.А. Механика деформирования и разрушения структурно неоднородных тел. М.: Наука, 1984.- 115 с.
3. Ташкинов А.А., Вильдеман В.Э. Упругопластическое деформирование и структурное разрушение слоистых металлокомпозитов //Деформирование и разрушение структурно-неоднородных материалов и конструкций.- Свердловск: УрО АН СССР.-С. 23-46.