

МОДЕЛИРОВАНИЕ КАСКАДНЫХ ПРОЦЕССОВ В КОНВЕКТИВНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ЧИСЛА ПРАНДТЛЯ

Ложкин С.А., Фрик П.Г. (Пермь)

Abstract

A shell model of fully developed turbulent convection is considered. In contrast to traditional shell models this model includes the nonlocal interactions that become of vital importance in the case of extreme value of Prandtl number. We consider cascade processes in convective turbulence under very low and very large Prandtl number. New kinds of spectral intervals are described.

Каскадные модели появились как попытка описать процессы спектрального переноса в развитой турбулентности с помощью небольшого числа переменных U_n , каждая из которых является коллективной характеристикой амплитуд пульсаций поля скорости в целой октаве волновых чисел $2^n < |k| < 2^{n+1}$. Уравнения для U_n должны воспроизводить "базовые" свойства уравнений Навье-Стокса, а именно, иметь по меньшей мере те же интегралы движения и тот же вид нелинейности. Каскадные модели использовались рядом авторов начиная с 70-х годов [1,2,5,7,9,13], но особенно активно их стали исследовать в 90-х [14,18,19,21] после того, как было показано, что они воспроизводят поведение структурных функций высших порядков в реальной турбулентности [23]. Наиболее активно исследуется модель, называемая GOY (Gledzer-Ohkitani-Yamada), которая записывается для комплексных переменных U_n в виде

$$d_t U_n = ik_n (a U_{n+1}^* U_{n+2}^* + b U_{n-1}^* U_{n+1}^* + c U_{n-1}^* U_{n-2}^*) - Re^{-1} k_n^2 U_n + f_n, \quad (1)$$

где Re - число Рейнольдса, $k_n = k_0 2^n$ - волновое число, а коэффициенты a, b, c выбираются так, чтобы обеспечить сохранение энергии $E = \sum_n |U_n|^2$ в пределе $Re \rightarrow \infty, f_n \rightarrow 0$ (например, $a = 1, b = -1/4, c = -1/8$).

Следует указать два основных качественных отличия каскадных моделей от уравнений Навье-Стокса. Во-первых, это полная потеря информации о пространственном распределении исследуемых случайных полей. Во-вторых, уравнения типа (1) описывают только локальные (в k -пространстве) взаимодействия. Первый недостаток является следствием низкой размерности динамической системы, второго можно избежать и оставаясь в рамках каскадных моделей. Впервые модель с нелокальными взаимодействиями была построена в работе [7] для двумерной турбулентности. Модель для конвективной турбулентности описана в [8]. Модификация этой модели используется в данной работе для рассмотрения конвективной турбулентности при экстремальных значениях числа Прандтля, когда учет нелокальных взаимодействий становится принципиальным.

Турбулентная конвекция. Рассматриваются течения, описываемые в рамках приближения Буссинеска для термогравитационной конвекции несжимаемой жидкости. Уравнения движения запишем в безразмерной форме

$$\partial_t \bar{u} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = -\nabla P + Gr^{-1/2} \Delta \bar{u} + \bar{e} T, \quad (2)$$

$$\partial_t T + \bar{u} \cdot \nabla T = \sigma^{-1} Gr^{-1/2} \Delta T, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0, \quad (4)$$

где \bar{u} - скорость, P - давление, T - температура, \bar{e} - единичный вектор вдоль вертикальной оси, $Gr = g\beta L^3 T^* v^{-2}$ - число Грасгофа, $\sigma = \nu/\chi$ - число Прандтля, ν - кинематическая вязкость, χ - температуропроводность. В качестве единицы длины выбран макромасштаб L , единицы температуры - характерная для этого масштаба разность температуры T^* , единицы скорости $V = (g\beta L T^*)^{1/2}$ и единицы времени $t = L/V$. При выбранной единице скорости число Грасгофа просто связано с числом Рейнольдса $Gr = V^2 L^2 \nu^{-2} = Re^2$.

В случае, когда единственной причиной движения являются неоднородности температуры, а малые значения вязкости и температуропроводности позволяют развиваться инерционному интервалу, простые соображения размерности согласно теории Колмогорова позволяют предсказать спектральные законы для пульсаций скорости и температуры. Спектральный поток кинетической энергии, который в случае колмогоровской турбулентности пронизывает все масштабы и равен скорости диссипации энергии ε , в конвективной турбулентности перестает быть константой, так как силы плавучести привносят энергию в каждый масштаб. Зато сохраняющейся величиной становится поток энергии пульсаций температуры ε_T , который на масштабе l есть $\delta T_l^2 / t_l$ (характерное время переноса $t_l = l/\delta V_l$). Постоянство ε_T дает для характерных пульсаций скорости δV_l и пульсаций температуры δT_l на расстоянии l ($L \gg l \gg l_v, l_\chi$)

$$\delta T_l^2 \delta V_l \sim l. \quad (5)$$

Динамика конвективного интервала определяется помасштабным балансом нелинейного члена и члена, описывающего архимедовы силы в уравнении для скорости, что позволяет написать соотношение

$$\delta V_l^2 / l \sim \delta T_l. \quad (6)$$

Комбинируя (6) и (5), легко получить для инерционного интервала оценки

$$\delta V_l \sim l^{3/5}, \quad \delta T_l \sim l^{1/5}, \quad (7)$$

соответствующие спектральным законам

$$E_v(k) \sim k^{-11/5}, \quad (8)$$

$$E_T(k) \sim k^{-7/5}. \quad (9)$$

Эти законы, впервые полученные Обуховым [6] и Болджиано [5] для стратифицированной среды, многократно воспроизводились и обсуждались на различном уровне строгости [3,4,16,22]. Отметим, что исключение из определяющих параметров спектрального потока энергии ε делает результаты (8)-(9) не зависящими от размерности пространства. В обычной же гидродинамической турбулентности переход от трехмерного пространства к двумерному связан с появлением дополнительного интеграла движения (энстрофии) и приводит к качественному изменению характера каскадных процессов.

Появления инерционного интервала с законами (8-9) можно ожидать, когда масштабы вязкой диссипации и тепловой диффузии имеют один порядок малости,

т.е. число Прандтля $\sigma \sim 1$. Однако и в пределе бесконечно малых ν и χ интервал (8-9) не растет неограниченно. Поступление кинетической энергии за счет архимедовых сил падает по мере уменьшения масштаба как $l^{4/3}$ и на масштабе $l_B = (g\beta)^{-3/2} \varepsilon^{5/4} \varepsilon_T^{-3/4}$ (масштабе Болджиано) возникает ситуация, когда обычный каскадный перенос становится эффективнее термогравитационной конвекции и в трехмерном течении устанавливается колмогоровский спектр. Цель данной работы состоит в рассмотрении специфики каскадных процессов вблизи масштаба Болджиано в двумерной турбулентности, а также каскадных процессов при очень низких и очень высоких значениях числа Прандтля.

Каскадная модель. Для двумерной турбулентной конвекции каскадная модель была построена в работе [8] и имела вид

$$d_t U_n = \sum_{m,l} T_{n,m,l} U_m U_l - Re^{-1} k_n^2 U_n + F_n \Theta_n, \tag{10}$$

$$d_t \Theta_n = \sum_{m,l} H_{n,m,l} U_m \Theta_l - k_n^2 (\sigma Re)^{-1} \Theta_n, \tag{11}$$

где $F_n = F_0 2^n$, $T_{n,m,l} = 2^N T_{0,m-n,l-n}$, $H_{n,m,l} = 2^N H_{0,m-n,l-n}$, а значения элементов для центральных частей матриц $T_{0,m,l}$ и $H_{0,m,l}$ приведены в таблицах. Структура матриц следует из разбиения пространства волновых векторов на октавы и из требования сохранения кинетической энергии $E_v = \sum_n |U_n|^2$, энтропии $\Omega = \sum_n |2^n U_n|^2$ и энергии пульсаций температуры $E_T = \sum_n |2^n \Theta_n|^2$.

$T_{0,m,l}$

$l \setminus m$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
4								0.155
3							0.242	
2						0.431		
1	-0.0088	-0.0257	-0.0796	-0.269				
0								
-1	0.0032	0.0096	0.0269					
-2								

$H_{0,m,l}$

$l \setminus m$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
4								-0.0537
3							-0.0941	-1.493
2						-0.125	-0.720	-0.153
1	-0.0058	-0.0145	-0.0374	-0.0996	-0.221	-0.365	-0.145	
0								
-1	0.0018	0.00468	0.0125	0.0277	0.0457	0.0181		
-2				0.00196	0.0113	0.00239		
-3				0.000184	0.00291	0.00030		
-4				0.000013	0.00073	0.00004		

В данной работе используется модифицированная модель вида (10-11). Во-первых, рассматриваются комплексные переменные, использование которых существенно снижает время интегрирования, необходимое для получения устойчивых статистических характеристик [17]. Во-вторых, в матрице $H_{n,m,l}$

рассматриваются только члены, описывающие генерацию неоднородностей температуры крупномасштабным полем скорости (строки $l = \pm 1$, $m < 0$), и диагонали $m=n$ и $l=m$, которые очевидно доминируют над соответствующими боковыми столбцами. Тогда, с учетом связей между элементами матрицы, следующих из законов сохранения, можно записать

$$d_t U_n = i2^n \sum_{j=1}^J T_{0,-j,-1} \left\{ \frac{3 \cdot 2^j}{4 - 2^{-2j}} U_{n+j}^* U_{n+j+1}^* - U_{n-j}^* U_{n+1}^* + \frac{2^{2j} - 1}{2^{2j+3} - 2} U_{n-j-1}^* U_{n-1}^* \right\} - k_n^2 Re^{-1} U_n + F_n \Theta_n, \quad (12)$$

$$d_t \Theta_n = i2^n \sum_{j=1}^J \left\{ H_{0,-j,-1} (U_{n-j}^* \Theta_{n-1}^* - 8U_{n-j+1}^* \Theta_{n+1}^*) + H_{0,0,-j} (U_n^* \Theta_{n-j}^* - 2^{3j} U_{n+j}^* \Theta_{n+1}^*) \right\} - k_n^2 (\sigma Re)^{-1} \Theta_n, \quad (13)$$

Параметр J фиксирует наиболее далекие взаимодействия (при $J = 1$ система возвращается к стандартному виду каскадных уравнений, описывающих только локальные взаимодействия).

Умеренные числа Прандтля ($\sigma \sim 1$). Спектральные законы вида (8-9) получались в моделях как двух-, так и трехмерной конвективной турбулентности при решении каскадных уравнений для относительно небольшого диапазона масштабов (порядка десяти) [8,9,3]. Рассмотрим эволюцию спектров двумерной турбулентной конвекции при очень больших числах Грассгофа, когда большой интервал значений волновых чисел позволяет проследить за формированием спектров по обе стороны от масштаба Болджиано. Система уравнений (12-13) для случая, когда число Прандтля равно единице, а число Грассгофа $Gr = 10^{24}$ (что соответствует $Re = 10^{12}$), интегрировалась методом Рунге-Кутты четвертого порядка с постоянным шагом по времени для $0 \leq n \leq 30$. Равномерный нагрев на макромасштабе моделировался путем поддержания стационарного значения модуля переменной $|\Theta_0| = 1$.

В отличие от трехмерного случая, в двумерной гидродинамической турбулентности существование инерционного интервала с прямым каскадом энергии невозможно. Это обстоятельство препятствует установлению стационарного распределения энергии по спектру. Процесс передачи энергии к мелкомасштабному движению блокируется на масштабе l_n , вправо от которого формируется инерционный интервал переноса энтропии. Влево от l_n развивается интервал обратного переноса энергии к крупным масштабам со спектральным законом $-5/3$, причем граница этого интервала продвигается влево по мере накопления системой энергии.

Стационарной ситуации удастся добиться путем введения дополнительной диссипации кинетической энергии на больших масштабах (в уравнение для U_n дописывается член вида $-\gamma U_n$, так называемое линейное трение, обычно используемое и при прямых численных экспериментах с двумерной турбулентностью). На рис.1 показаны осредненные по времени значения энергии пульсаций скорости и температуры в отдельных октавах $E_{v,n}$ и $E_{T,n}$. Проведены линии, соответствующие степенным законам для спектров $E_v(k)$ и $E_T(k)$. При рассмотрении рисунков следует помнить, что показатель степени для величины

$E_n(k_n)$ на единицу меньше, чем для самого спектра $E(k)$, что связано с принятым делением оси волновых векторов на октавы. Границы различных интервалов более четко выражены в спектре пульсаций скорости. В спектре пульсаций температуры переходы размыты и степенные участки не столь ярко выражены.

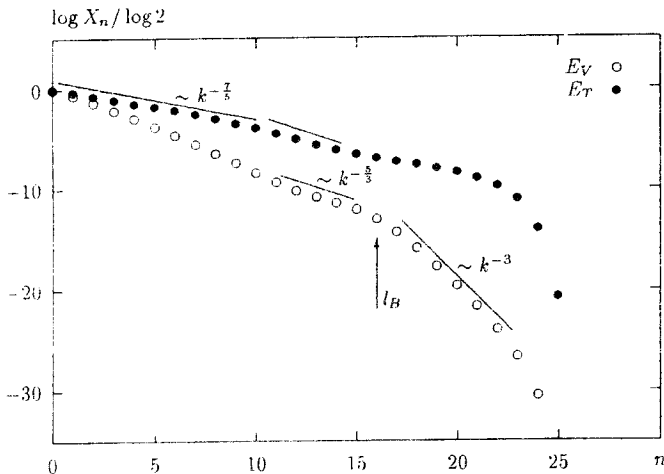


Рис. 1

Любопытно отметить, что описанный численный эксперимент есть первая удачная попытка получения стационарного интервала обратного каскада энергии в каскадных моделях двумерной турбулентности. Инверсный каскад с законом, близким к $-5/3$, регистрировался в каскадных моделях двумерной гидродинамической турбулентности в узком интервале волновых чисел [7], но все попытки получения стационарного интервала с постоянным потоком энергии не дали положительного результата - после накопления некоторой энергии в крупных масштабах (малые l) устанавливался режим равномерного распределения энергии между переменными U_n с соответствующим спектром $E_r(k) \sim k^{-1}$ [10,17]. Рассмотренная нами ситуация отличается способом подвода энергии, а именно, отсутствием какой-либо искусственной силы, возбуждающей турбулентность на промежуточных масштабах.

Малые числа Прандтля ($\sigma \ll 1$) приводят к возникновению инерционно-диффузионного интервала в спектре пульсаций температуры. Он возникает в масштабах, на которых сохраняется обычный инерционный интервал в поле скорости, но существенна тепловая диффузия. Из сопоставления соответствующих членов уравнения (4) $\delta V_i \delta T_0 L^{-1} \sim \delta T l^{-2}$ и колмогоровской оценки для пульсаций скорости в инерционном интервале получается [12]

$$E_T(k) \sim k^{-17/3}. \tag{14}$$

В этом случае результат зависит, естественно, от динамики инерционного интервала и в случае рассмотрения двумерной турбулентности, в которой реализуется инерционный интервал переноса энтропии со спектральным законом $E(k) \sim k^{-3}$, мы приходим к закону [8]

$$E_T(k) \sim k^{-7}. \tag{15}$$

При столь быстром затухании энергии пульсаций трудно рассчитывать на формирование протяженного интервала. Это подтверждают и результаты

численного счета для случая $\sigma = 10^{-8}$, приведенные на рис.2, где не удается выделить интервала с постоянным степенным законом.

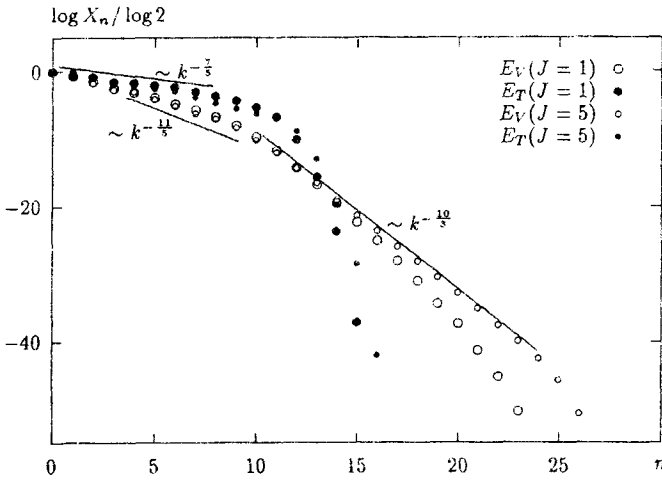


Рис. 2

На рисунке даны результаты счета с различными значениями параметра J . В конвективном интервале отличие невелико, так как здесь доминируют локальные взаимодействия полей скорости и температуры. Различия хорошо видны в мелкомасштабной части спектра, где формируется инерционный интервал переноса энтропии. Известно, что каскадные модели испытывают проблемы с описанием каскада энтропии, выражающиеся в том, что поток энтропии в них слаб в сравнении с пульсациями энтропии в отдельном масштабе и падает с ростом n , а спектры энергии не следуют единому степенному закону [10,17]. Увеличение J усиливает поток энтропии и приводит к появлению протяженного интервала, в котором спектр кинетической энергии следует степенному закону с наклоном $E(k) \sim k^{-10/3}$. Интересно отметить, что именно такой наклон спектра был получен при исследовании двумерной турбулентности с помощью иерархической модели, в которой число переменных растет как 2^{2n} по мере роста волнового числа $k_n = 2^n$, что позволяет в отличие от каскадных моделей учитывать и пространственную неоднородность турбулентного течения [11].

Большие числа Прандтля ($\sigma \gg 1$) способствуют формированию вязко-конвективного интервала, в котором соответствующие масштабы поля скорости подавлены вязкостью, но остается спектральный поток пульсаций температуры, поддерживаемый лишь крупномасштабным полем скорости. Поскольку диффузия тепла происходит на существенно меньших масштабах, поток энергии пульсаций температуры остается постоянным, но в оценке (5) характерное время переноса определяется крупномасштабными пульсациями скорости и может считаться для этого интервала постоянным. Это дает оценку $\delta T_1^2 \sim const$, что равносильно спектральному закону, впервые полученному Бэтчелором [12],

$$E_T(k) \sim k^{-1}. \quad (16)$$

Между конвективным (обуховским) и вязко-конвективными интервалами можно ожидать появления промежуточного интервала, в котором вязкий член становится весомее нелинейного, но остается существенной сила плавучести. Тогда баланс архимедовых и вязких сил приводит к соотношению

$$g\beta\delta T_l \sim \delta V_l l^{-2}, \quad (17)$$

которое вместе с (5) однозначно определяет спектральные законы

$$E_v(k) \sim k^{-13/3}, \quad E_T(k) \sim k^{-13/3}. \quad (18)$$

Очевидно, что такой интервал может установиться лишь в узком диапазоне волновых чисел, так как быстрое ослабление пульсаций скорости стимулирует развитие вязко-конвективного интервала (16). Однако баланс (17) может соблюдаться и в вязко-конвективном интервале (когда доминирует перемешивание крупномасштабным голем скорости). Тогда спектр пульсаций температуры будет следовать закону l^{-1} (15), а соотношение (17) приводит к спектру

$$E_v(k) \sim k^{-5}. \quad (20)$$

Результаты вычислений для случая $\sigma = 10^6, Re = 10$ представлены на рис.3 и показывают, что интервал, в котором устанавливаются законы (16-19), может быть достаточно протяженным. Можно видеть, что увеличение J приводит к растяжению интервала (16), но практически не влияет на распределение энергии пульсаций скорости.

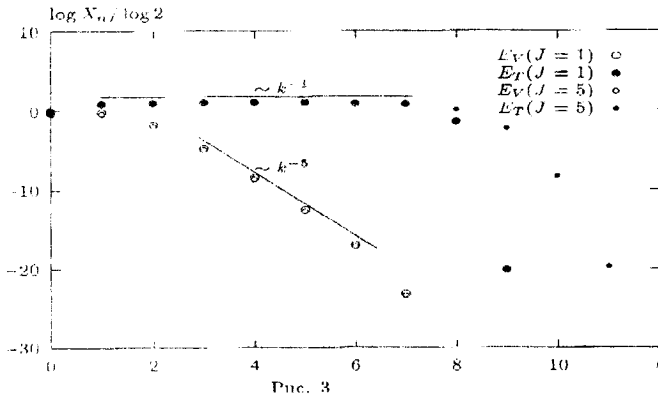


Рис. 3

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 94-01-00951-а).

Библиографический список

1. Гледзер Е.Б. Система гидродинамического типа, допускающая два квадратичных интеграла движения // ДАН СССР. 1973. Т. 209. № 5.
2. Зимин В.Д. Иерархическая модель турбулентности // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1981. Т.17, № 12. С.1265-1273.
3. Зимин В.Д., Фрик П.Г. Турбулентная конвекция. М.: Наука, 1988. 175с.
4. Моинин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1967. Ч. 2. 720с.
5. Деснянский В.Н., Новиков Е.А. Моделирование каскадных процессов в турбулентных течениях // Прикл. математика и механика. 1974. Т. 38. № 3. С. 507-513.
6. Обухов А.М. // ДАН СССР. 1959. Т. 125, № 4, С. 1246.
7. Фрик П.Г. Иерархическая модель двумерной турбулентности // Магнитная гидродинамика. 1983 Т. 19, № 1. С. 60-66.
8. Фрик П.Г. Моделирование каскадных процессов в двумерной турбулентной конвекции // Прикл. мех. и тех. физ. 1986. Т. 27, № 2. С. 71-79.

9. Шайдунова Т.Е. Иерархическая модель турбулентной конвекции. Препринт. Свердловск: ИМСС, 1986. 32с.
10. Aurell E., Bofetta G., Crisanti A., Frick P., Paladin G., Vulpiani A. Statistical mechanics of shell models for 2D-turbulence // *Phys. Rev. E*. 1994. Vol. 50. P. 4705-4715.
11. Aurell E., Frick P., Shaidurov V. Hierarchical tree-model of 2D-turbulence // *Physica D*. 1994. Vol. 72. P. 95-109.
12. Batchelor G.K., Howells I.D., Townsend A.A. // *J. Fluid Mech.* 1959. Vol. 5, N 1. P. 134.
13. Bell T.L., Nelkin M. Time-dependent scaling relations and cascade model of turbulence // *J. Fluid Mech.* 1978. Vol. 88, N 2. P. 369-393.
14. Biferale L., Lambert R., Lima R. & Paladin G. Transition to chaos in a shell model of turbulence // *Physica D*. 1995. Vol. 80, P. 105.
15. Bolgiano R. // *J. Geophys. Res.* 1959. Vol. 46, P. 2226.
16. Brandenburg A. Energy spectra in a model for convective turbulence // *Phys. Rev. Lett.* 1992. Vol. 69, N 4. P. 605-608.
17. Frick P. & Aurell E. On the spectral laws in shell-models of 2D-turbulence // *Europhys. Lett.* 1993. Vol. 24, N 9. P. 725-730.
18. Frick P., Dubrulle B., Babiano A. Scale invariance in a class of shell-models // *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 51, N 6, P. 5582-5593.
19. Jensen M.H., Paladin G. & Vulpiani A. A shell model for turbulent advection of passive scalar fields // *Phys. Rev. A*. 1991. Vol. 43, P. 798.
20. Kraichnan R.H. Inertial ranges in two-dimensional turbulence // *Phys. of Fluids*. 1967. Vol. 10. N 7. P. 1417.
21. Pisarenko D., Biferale L., Courvoisier D., Frisch U. & Vergassola M. Further results on multifractality in shell models // *Phys. Fluids A*. 1993. Vol. 5, N 10. P. 2533-2538.
22. Yakhot V. // *Phys. Rev. Lett.* 1992. Vol. 69. P. 769.
23. Yamada M. & Ohkitani K. The constant of motion and inertial subrange spectrum in fully-developed model turbulence // *Phys. Lett.* 1988. Vol. A134. P. 165-169.