УДК 539.3

ЭЛЕМЕНТЫ СТРУКТУРНОЙ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Победря Б.Е. (Москва)

Abstract

Some principles of the description of multilevel continuum are considered for analysing microstructure.

Непосредственный континуальный подход в механике сплошной среды ограничен наличием микроструктуры (субструктуры) каждого реального материала, которая проявляется в качественном изменении физических свойств на некотором уровне. Поэтому при феноменологическом описании материала часто вводятся многоуровневые континуумы.

С другой стороны, необходимость описания дефектов структуры (дислокации, вакансии, внедрения и т. п.) привела к так называемой континуальной теории дислокации, основы которой изложены в блестящей работе Кренера [I]. В этой теории внутренние напряжения, возникающие в телах при неоднородном и необратимом деформировании, могут быть описаны в рамках классической теории упругости путем расширения геометрического аппарата, традиционно используемого в механике деформируемого твердого тела (МДТТ).

Наконец, макроскопическая среда первого уровня является, вообще говоря, неоднородной и при ее использовании важную роль могут играть методы осреднения МДТТ [3]. Ниже мы коснемся элементов описания континуума с учетом микроструктуры, причем для простоты рассмотрим случай малых деформаций, евклидовой геометрии.

1. Двухуровневое описание континуума

Пусть каждая точка $(x_1,x_2,x_3)\in V$ макроконтинуума (первого уровня) сама представляет собой микроконтинуум (второй уровень) с объемом $V^{(x)}$, точки которого описываются координатами $(\xi_1,\xi_2,\xi_2)\in V^{(x)}$. Тогда каждой точке (ξ_1,ξ_2,ξ_2) микроконтинуума, принадлежащего точке (x_1,x_2,x_3), припишем плотность $\rho^{(x)}(x,\xi)$. Радиус-вектор этой точки обозначим через $\vec r^{(x)}(x,\xi)$. Центр масс микрообъема $V^{(x)}$ можно описать радиусом-вектором $\vec r(x)$

$$\rho(x)\vec r(x)=\frac{1}{V^{(x)}}\int\limits_{V^{(x)}}\rho^{(x)}(x,\xi)\vec r^{(x)}(x,\xi)dV_\xi\,, \tag{1.1}$$

где $\rho(x)$ - макроплотность вещества:

$$\rho(x)=\frac{1}{V^{(x)}}\int\limits_{V^{(x)}}\rho^{(x)}(x,\xi)dV_\xi\,. \tag{1.2}$$

Введем радиус-вектор $\vec r'(x,\xi)$ по формуле

$$\vec{r}'(x,\xi)=\vec{r}^{(x)}(x,\xi)-\vec{r}(x). \tag{1.3}$$

Тогда для векторов скорости

$$\vec{v}^{(x)}(x,\xi)\equiv\frac{d\vec{r}^{(x)}}{dt},\quad \vec{v}(x)\equiv\frac{d\vec{r}}{dt},\quad \vec{v}'(x,\xi)\equiv\frac{d\vec{r}'}{dt} \tag{1.4}$$

имеем в соответствии с (1.1) - (1.3):

$$\rho(x)\vec{v}(x)=\frac{1}{V^{(x)}}\int\limits_{V^{(x)}}\rho^{(x)}(x,\xi)\vec{v}^{(x)}(x,\xi)dV_\xi, \tag{1.5}$$

$$\vec{v}^{(x)}=\vec{v}+\vec{v}' \tag{1.6}$$

Введем также в каждой точке микроконтинуума скорость диффузионного потока $\vec{j}^{(x)}(x,\xi)$,

$$\vec{j}^{(x)}(x,\xi)=\rho^{(x)}(x,\xi)\left[\vec{v}^{(x)}(x,\xi)-\vec{v}(x)\right]=\rho^{(x)}\vec{v}' \tag{1.7}$$

и массовую концентрацию вещества $c^{(x)}(x,\xi)$

$$c^{(x)}(x,\xi)=\rho^{(x)}(x,\xi)/\rho(x). \tag{1.8}$$

Из (1.5) - (1.8) видно, что

$$\frac{1}{V^{(x)}}\int\limits_{V^{(x)}}\vec{j}^{(x)}(x,\xi)dV_\xi=0,\quad \frac{1}{V^{(x)}}\int\limits_{V^{(x)}}c^{(x)}(x,\xi)dV_\xi=1. \tag{1.9}$$

Сформулируем теперь три основных постулата механики сплошной среды: о сохранении масс

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V\left[\int\limits_{V^{(x)}}\rho^{(x)}(x,\xi)dV_\xi\right]dV=0; \tag{1.10}$$

об изменении количества движения

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V\left[\int\limits_{V^{(x)}}\rho^{(x)}\vec{v}^{(x)}dV_\xi\right]dV=\int\limits_V\left[\int\limits_{V^{(x)}}\rho^{(x)}\vec{F}^{(x)}dV_\xi\right]dV+ \\ +\int\limits_\Sigma\left[\int\limits_{V^{(x)}}\vec{S}dV_\xi\right]d\Sigma \tag{1.11}$$

и об изменении момента количества движения

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V\left[\vec{r}^{(x)}\times\rho^{(x)}\vec{v}^{(x)}dV_\xi\right]dV=\int\limits_V\left[\int\limits_{V^{(x)}}\vec{r}^{(x)}\times\rho^{(x)}\vec{F}^{(x)}dV_\xi\right]dV+ \\ +\int\limits_\Sigma\left[\int\limits_{V^{(x)}}\vec{r}+\vec{S}^{(x)}dV_\xi\right]d\Sigma. \tag{1.12}$$

Здесь введены плотность массовых сил $F^{(x)}(x,\xi)$ и плотность поверхностных сил $\vec{S}^{(x)}(x,\xi)$, распределенных по поверхности $\Sigma^{(x)}$, ограничивающей микрообъем $V^{(x)}$, в каждой точке x поверхности Σ, ограничивающей макрообъем V.

Следствием постулата (1.10) является уравнение неразрывности, которое при эйлеровом описании движения имеет вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\vec{v})=0. \tag{1.13}$$

Если же в каждом микрообъеме протекает N химических реакций со скоростью $J_\beta(\beta = 1,2,\dots,N)$, то имеем

$$\frac{\partial\rho^{(x)}(x,\xi)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\rho^{(x)}v_i^{(x)}(x,\xi)\right]=\sum_{\beta=1}^{N}v_\beta(x,\xi)J_\beta(x,\xi), \tag{1.14}$$

где v_β - некоторые стехиометрические коэффициенты [3]. При осреднении левой и правой частей (1.14) по микрообъему получим уравнение неразрывности (1.13), ибо

$$\frac{1}{V^{(x)}}\int_{V^{(x)}}\sum_{\beta=1}^{N}v_\beta(x,\xi)J_\beta(x,\xi)\alpha V_\xi=0. \tag{1.15}$$

Для получения следствий из постулата (1.11) воспользуемся определением (1.5), а также

$$\frac{1}{V^{(x)}}\int_{V^{(x)}}\rho_(^{(x)}\vec{F}^{(x)}\alpha V_\xi=\rho\vec{F}(x), \tag{1.16}$$

$$\frac{1}{V^{(x)}}\int_{V^{(x)}}\vec{S}_(^{(x)}\alpha V_\xi=\vec{S}^{(n)}(x). \tag{1.17}$$

Тогда получим уравнения движения сплошной среды

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=\rho\vec{F}+\frac{\partial\vec{S}_i}{\partial x_i}, \tag{1.18}$$

где учтено, что

$$\vec{S}^{(n)}=\vec{S}_i n_i,\qquad \vec{S}_i=\sigma_{ij}\vec{e}_j, \tag{1.19}$$

причем $\vec{n}=n_i\vec{e}_i$ - единичный вектор нормали в точке (x_1,x_2,x_3) поверхности Σ, а $\vec{e}_i$ - ортонормированный репер [4], $\underset{\sim}{\sigma}=\sigma_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j$ - тензор напряжений.

Выразим теперь в (1.12) радиус-вектор $\vec{r}^{(x)}$ через сумму $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ согласно (1.3) и введем обозначения:

$$\frac{1}{V^{(x)}}\int_{V^{(x)}}\vec{r}'\cdot\rho_(^{(x)}\vec{F}^{(x)}\alpha V_\xi=J(x)\vec{M}(x), \tag{1.20}$$

$$\frac{1}{V^{(x)}}\int_{V^{(x)}}\vec{r}'\cdot\rho_(^{(x)}\vec{F}^{(x)}\alpha V_\xi=J(x)\vec{M}(x), \tag{1.21}$$

$$\frac{1}{V^{(x)}}\int_{V^{(x)}}\vec{r}'\cdot\vec{S}_(^{(x)}\alpha V_\xi=\vec{Q}(x), \tag{1.22}$$

где величина $J(x)$ характеризует момент инерции микрообъема и вообще говоря является тензором, т.е. вместо $J(x)\vec{\omega}(x)$ следовало бы писать

$$\underset{\sim}{J}\cdot\vec{\omega}=J_{ij}\omega_j\vec{e}_i. \tag{1.23}$$

Однако, следуя общепринятым обозначениям [5], мы примем форму записи (1.20). Здесь $\vec{\omega}$ - так называемый спин-вектор [5]

$$\vec{\omega}=\frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \tag{1.24}$$

$\vec{M}(x)$ - массовый распределенный момент, а $\vec{Q}^{(n)}$ - поверхностный распределенный момент, который может быть записан по аналогии с (1.19) в виде

$$\vec{Q}^{(x)} = Q_i n_i, \qquad Q_i = \mu_{ij}\vec{e}_i, \tag{1.25}$$

где $\underset{\sim}{\mu} = \mu_{ij}\vec{e}\otimes\vec{e}_j$ - тензор моментных напряжений. Из постулата (1.12) с учетом уравнений движения (1.18) получим:

$$J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = J\vec{M} + \vec{e}_i \times \vec{S}_i + \frac{d\vec{Q}_i}{dx_i}. \tag{1.26}$$

2. Кинетика двухуровневого континуума

Можно ввести сразу кинематическое описание, соответствующее принятому допущению о малости деформаций. Однако иногда при таком описании вектор перемещения теряет свой физический смысл [6].

Поэтому рассмотрим два состояния: отсчетную конфигурацию с радиусом вектором $\vec{r}_\circ^{(x)}(x,\xi)$ и актуальную - с радиусом-вектором $\vec{r}^{(x)}(x,\xi)$. Будем считать (x^1,x^2,x^3) - лагранжевыми координатами макрообъема, а (ξ^1,ξ^2,ξ^3) - лагранжевыми координатами микрообъема.

Тогда вектор перемещения может быть определен следующим образом:

$$\vec{u}(x,\xi) = \vec{r}^{(x)}(x,\xi) - \vec{r}_\circ^{(x)}(x,\xi). \tag{2.1}$$

Расстояние между двумя бесконечно близкими точками отсчетной конфигурации определяется с помощью величины

$$\begin{gathered} dS_\circ^2 = d\vec{r}_\circ^{(x)}\cdot d\vec{r}_\circ^{(x)} = \frac{\partial\vec{r}_\circ^{(x)}}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial\vec{r}_\circ^{(x)}}{\partial x^j}dx^i dx^j + \\ + \frac{\partial\vec{r}_\circ^{(x)}}{\partial\xi^i}\cdot\frac{\partial\vec{r}_\circ^{(x)}}{\partial\xi^j}d\xi^i d\xi^j + 2\frac{\partial\vec{r}_\circ^{(x)}}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial\vec{r}_\circ^{(x)}}{\partial\xi^j}dx^i d\xi^j, \end{gathered} \tag{2.2}$$

а расстояние между этими же частицами в актуальной конфигурации - с помощью величины

$$\begin{gathered} dS^2 = d\vec{r}^{(x)}\cdot d\vec{r}^{(x)} = \frac{\partial\vec{r}^{(x)}}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial\vec{r}^{(x)}}{\partial x^j}dx^i dx^j + \\ + \frac{\partial\vec{r}^{(x)}}{\partial\xi^i}\cdot\frac{\partial\vec{r}^{(x)}}{\partial\xi^j}d\xi^i d\xi^j + 2\frac{\partial\vec{r}^{(x)}}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial\vec{r}^{(x)}}{\partial\xi^j}dx^i d\xi^j. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Меры деформации естественно определить полуразностью выражений (2.3) и (2.2)

$$\frac{dS^2 - dS_\circ^2}{2} = \varepsilon_{ij}dx^i dx^j + \varepsilon'_{ij}d\xi^i d\xi^j + \Theta_{ij}dx^i d\xi^j. \tag{2.4}$$

Из сравнения (2.2) - (2.4) имеем, учитывая (2.1):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x^j} + \frac{\partial\vec{u}}{\partial x^i}\cdot\vec{e}_j + \frac{\partial\vec{u}}{\partial x^j}\cdot\vec{e}_i\right), \tag{2.5}$$

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial\xi^i}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial\xi^j} + \frac{\partial\vec{u}}{\partial\xi^i}\cdot\vec{e}_j + \frac{\partial\vec{u}}{\partial\xi^j}\cdot\vec{e}_i\right), \tag{2.6}$$

$$\Theta_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial\xi^j} + \frac{\partial\vec{u}}{\partial x^i}\cdot\vec{e}_j + \frac{\partial\vec{u}}{\partial\xi^j}\cdot\vec{e}_i\right). \tag{2.7}$$

Тогда в случае малых деформаций имеем:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad \varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i}\right),$$
$$\Theta_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \tag{2.8}$$

Поэтому за кинематические характеристики можно принять величины ε_{ij}, ε'_{ij} и спин-вектор $\vec{\omega}$ с компонентами

$$\omega_k = \epsilon_{ijk}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{2.9}$$

В качестве другого возможного набора кинематических характеристик можно принять тензоры дисторсии $\underset{\sim}{\beta}$ и $\underset{\sim}{\beta}'$:

$$\beta_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \beta'_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}. \tag{2.10}$$

Однако в силу того, что элементарная работа внутренних сил из соображений размерности может быть записана в виде

$$\delta A = \sigma_{ij}\delta\beta_{ij} + \mu_{ij}\delta æ_{ij}, \tag{2.11}$$

где $æ_{ij}$ - так называемый тензор изгиба-кручения [7]

$$æ_{ij} = \omega_{i,j}, \tag{2.12}$$

наибольшее распространение получил так называемый континуум Коссера [5], для которого принимается, что микроконтинуум не может деформироваться: $\varepsilon'_{ij} \equiv 0$.

Для такого континуума система шести уравнений (1.18) и (1.26) замыкается определяющими соотношениями типа

$$\sigma_{ij} = F_{ij}\left(\underset{\sim}{\beta}, \underset{\sim}{æ}\right), \quad \mu_{ij} = G_{ij}\left(\underset{\sim}{\beta}, \underset{\sim}{æ}\right), \tag{2.13}$$

где F_{ij} и G_{ij} - некоторые операторы представленных аргументов. В частности для упругой среды (2.13) имеет вид:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\beta_{kl} + A_{ijkl}æ_{kl},$$
$$\mu_{ij} = B_{ijkl}\beta_{kl} + Д_{ijkl}æ_{kl}. \tag{2.14}$$

3. Основные соотношения континуальной теории дислокаций

Если тело, в котором отсутствуют какие-либо напряжения (состояние А), подвергнуть внешнему воздействию (напряжению, нагреву, радиоактивному облучению и т. п.), а затем убрать эти воздействия, тело может не вернуться в исходное состояние. В нем могут остаться собственные напряжения (состояние Б), освободиться от которых, оставаясь в трехмерном пространстве, нельзя.

Однако мы можем мысленно разрезать тело на бесконечно малые объемные элементы (микрообъемы) и каждый такой элемент разгрузить. В результате тело нарушит свою связность (состояние В) [1].

Все три состояния (А, Б, В) отнесем к одной системе координат (x_1, x_2, x_3). Разность координат одной и той же материальной частицы состояний Б и А назовем полным вектором перемещений $\vec{u}^{\circ}$. Разность координат состояний В и Б -

вектором упругих перемещений $\vec{u}$ и, наконец, состояний B и A - вектором пластических перемещений $\vec{u}^p$.

Разность двух векторов перемещений в двух бесконечно близких точках каждого состояния обозначим соответственно через $\delta\vec{u}^\circ, \delta\vec{u}, \delta\vec{u}^p$.

Введем тензоры дисторсии $\underset{\sim}{\beta}^\circ, \underset{\sim}{\beta}, \underset{\sim}{\beta}^p$ по формулам

$$\delta u_i^\circ = \beta_{ij}^\circ dx_j, \quad \delta u_i = \beta_{ij} dx_j, \quad \delta u_i^p = \beta_{ij} dx_j. \tag{3.1}$$

Очевидно, что δu_i° представляет собой полный дифференциал

$$\beta_{ij}^\circ = \frac{\partial u_i^\circ}{\partial x_j}. \tag{3.2}$$

Каждый тензор дисторсии может быть разбит на симметричную и антисимметричную части. Например,

$$\beta_{ij} = \varepsilon_{ij} + \epsilon_{ijk}\,\omega_k, \tag{3.3}$$

где

$$\varepsilon_{ij} = \beta_{(ij)} \equiv \frac{1}{2}\left(\beta_{ij} + \beta_{ji}\right). \tag{3.4}$$

Очевидно, что пластические деформации $\underset{\sim}{\varepsilon}^p$ не удовлетворяют условиям совместности. Тензор несовместности определяется соотношением [1]

$$\underset{\sim}{\eta} = -Ink\,\underset{\sim}{\varepsilon} = -\nabla \times \underset{\sim}{\varepsilon}^p \times \nabla = \nabla \times \underset{\sim}{\varepsilon} \times \nabla \tag{3.5}$$

или в компонентах:

$$\eta_{ij} = -\epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}\varepsilon_{kn,lm}^p = \epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}\varepsilon_{kn,lm}. \tag{3.6}$$

Тензор плотности дислокаций $\underset{\sim}{\alpha}$ легко определить, зная пластическую деформацию:

$$\underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{\beta}^p \times \nabla = -\underset{\sim}{\beta} \times \nabla, \tag{3.7}$$

откуда вытекает

$$\underset{\sim}{\alpha} \cdot \nabla = 0. \tag{3.8}$$

В компонентной записи соотношения (3.7) и (3.8) имеют соответственно вид:

$$\alpha_{im} = -\epsilon_{mkj}\beta_{ij,k}^p = \epsilon_{mkj}\beta_{ij,k}, \tag{3.9}$$

$$\alpha_{im,m} = 0. \tag{3.10}$$

Тензор изгиба-кручения (2.12) в безиндексной форме вводится следующим образом:

$$\underset{\sim}{\ae} = \vec{\omega} \otimes \nabla. \tag{3.11}$$

В случае односвязного тела с дефектами при обходе по замкнутому контуру Z

$$\vec{\Omega} = \oint_Z \underset{\sim}{\ae} \cdot d\vec{r}', \tag{3.12}$$

$$\vec{b} = \oint_Z (\underset{\sim}{\varepsilon} - \vec{r}' \times \underset{\sim}{\ae}) \cdot d\vec{r}', \tag{3.13}$$

мы получаем так называемый общий вектор поворота дислокаций $\vec{\Omega}$ и общий вектор Бюргерса $\vec{b}$ [7].

Считая тензор изгиба-кручения $\underset{\sim}{\ae}$ независимым от спин-вектора $\vec{\omega}$, т.е. невыполнимыми соотношения (2.12) и (3.11), можно ввести тензор плотности дислокаций $\underset{\sim}{\theta}$:

$$\underset{\sim}{\theta} = -\underset{\sim}{\alpha} \times \nabla . \tag{3.14}$$

Очевидно

$$\underset{\sim}{\theta} \cdot \nabla = 0 . \tag{3.15}$$

Вводя плотность внедрения дисклинаций γ по формуле

$$tr\, \underset{\sim}{\ae} = \gamma \qquad (\ae_{ii} = \gamma), \tag{3.16}$$

получим связь между заданными распределениями дефектов $\underset{\sim}{\alpha}$, $\underset{\sim}{\theta}$, γ:

$$\underset{\sim}{\alpha} = -\underset{\sim}{\varepsilon} \times \nabla - \gamma \underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{\ae}^T , \tag{3.17}$$

где $\underset{\sim}{I}$ - единичный тензор. В компонентах выражение (3.17) имеет вид

$$\alpha_{im} = \epsilon_{mkj}\, \varepsilon_{ij,k} - \gamma \delta_{im} + \ae_{mi} \tag{3.18}$$

Таким образом, при наличии дефектов и при заданных плотностях их распределения $\underset{\sim}{\alpha}$, $\underset{\sim}{\theta}$, γ, задача определения статических внутренних напряжений заключается в решении девяти уравнений

$$\underset{\sim}{\eta} \equiv \nabla \times \underset{\sim}{\varepsilon} \times \nabla = -\nabla \times \underset{\sim}{\alpha} - \nabla \times (\gamma \underset{\sim}{I}) + \underset{\sim}{\theta} \tag{3.19}$$

и девяти уравнений

$$\nabla \times \underset{\sim}{\ae} \times \nabla = -\nabla \times \underset{\sim}{\theta} \tag{3.20}$$

относительно девяти компонент тензора напряжений $\underset{\sim}{\sigma}$ и девяти компонент тензора моментных напряжений $\underset{\sim}{\mu}$. При этом заданы определяющие соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= Q_{ijkl}\sigma_{kl} + P_{ijkl}\mu_{kl} , \\ \ae_{ij} &= R_{ijkl}\sigma_{kl} + S_{ijkl}\mu_{kl} , \end{aligned} \tag{3.21}$$

и, кроме того, на границе тела Σ заданы граничные условия

$$\sigma_{ij} n_j \Big|_{\Sigma} = S_i^0 , \qquad \mu_{ij} n_j \Big|_{\Sigma} = Q_i^0 \tag{3.22}$$

и условия равновесия среды

$$\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_j \right) \Bigg|_{\Sigma} = 0 . \tag{3.23}$$

$$\left(\frac{\partial \mu_{ij}}{\partial x_j} + \epsilon_{jkl}\, \sigma_{kl} + J M_j \right) \Bigg|_{\Sigma} = 0 . \tag{3.24}$$

Если среда рассматривается неоднородной, то применяя метод осреднения, описанный, например, в [3], можно исходную задачу свести к рекуррентной последовательности решения двух специальных задач: для однородной среды с эффективными характеристиками и неоднородной на "ячейке периодичности" для определения этих эффективных характеристик.

Библиографический список

1. Kröner E. Kontinuums theorie der Versetrungen und Eigenspannungen. Erg. and Math. 1958. 5 1 - 179.
2. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика.- М.: Мир, 1964.- 456с.
3. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов.- М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.- 336с.
4. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу.- М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.- 264с.
5. Nowacki W. Teoria niesymetrycznej.- Warszawa, PWN, 1981.- 380s.
6. Победря Б.Е. О взаимосвязи геометрической и физической нелинейности в теории упругости и о смысле перемещений// Изв. АН Арм.ССР. Механика.- 1987.- Т.XL, №4.- С. 15-26.
7. Де Вит Р. континуальная теория дислокаций.- М.: Мир, 1977.- 208с.