УДК 539.4

ВЛИЯНИЕ РАЗВИТИЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ В КОМПОНЕНТАХ НА МАКРОСКОПИЧЕСКОЕ УПРОЧНЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ КОМПОЗИТОВ

Сараев Л.А., Сахабиев В.А. (Самара)

Abstract

Model of deformations of two components composite material with elastic - plastic inclusions and elastic matrix is constructed, according to which the plastic current begins not simultaneously in all points of inclusions, and in their separate areas. Effective parameters of the nonlinear constitutive relations of composite material at limit of elasticity are calculated and is shown, that at distribution of plastic current on whole volume of inclusions this law becomes the law linear kinematic of hardening.

В работе [1] построена модель деформирования двухкомпонентного композиционного материала с упругопластическими включениями и упругой матрицей, согласно которой пластическое течение начинается одновременно во всех точках включений. В публикуемой работе предлагается модель, учитывающая возникновение зон пластического течения в отдельных областях включений и их распространение на весь объем включений.

Пусть двухкомпонентный композиционный материал занимает объем V, ограниченный поверхностью S.

Первый компонент композита образует идеально упругую связующую матрицу V_1

$$\sigma_{ij} = 2\,\mu_1\,\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\,\lambda_1\,\varepsilon_{qq},$$

а второй компонент V_2 представляет собой отдельные упругопластические включения сферической формы

$$\sigma_{ij} = 2\,\mu_2\left(\varepsilon_{ij} - e_{ij}^{p}\right) + \delta_{ij}\,\lambda_2\,\varepsilon_{qq}.$$

Здесь $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ — компоненты тензоров локальных напряжений и полных деформаций, e_{ij}^{p} —компоненты тензора пластических деформаций, μ_s, λ_s — параметры Ламе изотропных компонентов, пластические деформации удовлетворяют условию несжимаемости: $e_{qq}^{p} = 0$.

Пластические свойства материала включений задаются поверхностью текучести Мизеса с соответствующим ассоциированным законом течения:

$$s_{ij}\,s_{ij} = k_2^2,\quad s_{ij} = k_2\,\frac{\dot{e}_{ij}^{p}}{\sqrt{\dot{e}_{kl}^{p}\,\dot{e}_{kl}^{p}}}. \qquad (1)$$

Здесь $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{qq}$, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{qq}$, k_2 — предел текучести включений, (точкой обозначены скорости пластических деформаций).

Геометрическая структура такого двухкомпонентного композиционного материала описывается случайной изотропной функцией координат $\kappa_2(r)$, равной единице в объеме V_2 и нулю вне этого объема. Кроме того геометрические особенности возникающих и развивающихся в объеме включений зон пластического течения V_p описывает дополнительная индикаторная функция $\kappa_p(r)$, равная единице в объеме V_p $\left(0 \le V_p \le V_2\right)$ и нулю вне этого объема.

С помощью этих функций локальный закон Гука для среды записывается в виде

$$\sigma_{ij}(r) = 2\mu_1\varepsilon_{ij}(r) + \delta_{ij}\lambda_1\varepsilon_{qq}(r) + \\ +\left(2[\mu]\varepsilon_{ij}(r) + \delta_{ij}[\lambda]\varepsilon_{qq}(r)\right)\kappa_2(r) - 2\mu_2 e_{ij}^p(r)\kappa_p(r). \tag{2}$$

Индикаторные функции, напряжения, полные и пластические деформации предполагаются статистически однородными и эргодическими случайными полями, поэтому их математические ожидания заменяются средними значениями по полному объему V, объемам компонентов V_s $(s=1, 2)$ и объему V_p [2]:

$$\langle f\rangle = \frac{1}{V}\int_V f(r)dr, \quad \langle f\rangle_{s,p} = \frac{1}{V_{s,p}}\int_{V_{s,p}} f(r)dr$$

где угловыми скобками обозначена операция осреднения.

Для определения макроскопического поведения рассматриваемого композиционного материала и вычисления его эффективных характеристик локальные уравнения (1), (2) необходимо осреднить по объемам V и V_p:

$$\langle s_{ij}s_{ij}\rangle_p = k_2^2, \quad 4\mu_2^3\left\langle\left(e_{ij} - e_{ij}^p\right)\left(e_{ij} - e_{ij}^p\right)\right\rangle_p = k_2^2.$$

$$\langle\sigma_{ij}\rangle = 2\mu_1\langle\varepsilon_{ij}\rangle + \delta_{ij}\lambda_1\langle\varepsilon_{qq}\rangle + c_2\left(2[\mu]\langle\varepsilon_{ij}\rangle_2 + \delta_{ij}[\lambda]\langle\varepsilon_{qq}\rangle_2\right) - 2\mu_2 c_p\langle e_{ij}^p\rangle_p \tag{3}$$

Соотношения (3) показывают, что для установления эффективного закона Гука необходимо выразить величины $\langle\varepsilon_{ij}\rangle_2$, $\langle\varepsilon_{ij}\rangle_p$, $\langle e_{ij}^p\rangle_p$ через макроскопические деформации $\langle\varepsilon_{ij}\rangle$ и остаточные деформации e_{ij}^*, которые измеряются в композиционном материале после снятия внешних нагрузок. Это достигается статистическим осреднением системы деформирования среды, состоящей из уравнений (2), уравнений равновесия

$$\sigma_{iq,q}(r) = 0 \tag{4}$$

и соотношений Коши

$$2\varepsilon_{ij}(r) = u_{i,j}(r) + u_{j,i}(r). \tag{5}$$

связывающих компоненты тензора деформаций с компонентами вектора перемещений $u_i(r)$. Граничными условиями для замкнутой системы (1), (4), (5) являются условия отсутствия флуктуаций величин на поверхности S объема V:

$$f(r)\big|_{r\in S} = \langle f\rangle. \tag{6}$$

Следуя работе [3], будем пренебрегать флуктуациями полных и пластических деформаций в объемах V_2 и V_p. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}(r) = 2\mu_1\varepsilon_{ij}(r) + \delta_{ij}\lambda_1\varepsilon_{qq}(r) + \\ +\left(2[\mu]\langle\varepsilon_{ij}\rangle_2 + \delta_{ij}[\lambda]\langle\varepsilon_{qq}\rangle_2\right)\kappa_2(r) - 2\mu_2\langle e^p_{ij}\rangle_p\kappa_p(r).\end{gathered} \tag{7}$$

Здесь $[f] = f_2 - f_1$.

С помощью тензора Грина

$$G_{ik}(r) = \frac{1}{8\pi\mu_1}\left(\delta_{ik}r_{,qq} - \frac{\lambda_1+\mu_1}{\lambda_1+8\mu_1}r_{,ik}\right),\ r = |r|,$$

система уравнений (7), (4), (5) с граничными условиями (6) может быть сведена к системе интегральных уравнений вида [1]

$$\varepsilon_{ij}'(r) = \int_V G_{ik,jl}(r-r_1)\tau_{kl}'(r_1)dr_1. \tag{8}$$

Здесь

$$\tau_{ij}(r) = -\left(2[\mu]\langle\varepsilon_{ij}\rangle_2 + \delta_{ij}[\lambda]\langle\varepsilon_{qq}\rangle_2\right)\kappa_2(r) + 2\mu_2\kappa_p(r)\langle e^p_{ij}\rangle_p,$$

(9)

штрихами обозначены флуктуации величин в объеме V.

Определим сначала эффективный закон Гука рассматриваемого композиционного материала и его остаточные макроскопические деформации. Подставляя уравнение (8) с выражением (9) для τ_{ij} в известное соотношение [1]

$$\langle\varepsilon_{ij}\rangle_s = \langle\varepsilon_{ij}\rangle + c_s^{-1}\langle\kappa_s'\,\varepsilon_{ij}'\rangle \tag{10}$$

и используя свойство изотропности функций $\kappa_2(r), \kappa_p(r)$, находим уравнения относительно величин $\langle\varepsilon_{ij}\rangle_2$, $\langle\varepsilon_{ij}\rangle_p$, решая которые получаем

$$\begin{gathered}\langle e_{ij}\rangle_2 = \frac{1}{1+\alpha_1 c_1(m-1)}\left(\langle e_{ij}\rangle + \frac{mc_1\alpha_1}{c_2}c_p\langle e^p_{ij}\rangle_p\right),\\ \langle\varepsilon_{qq}\rangle_2 = \frac{1}{1+\gamma_1 c_1(q-1)}\langle\varepsilon_{qq}\rangle,\\ \langle e_{ij}\rangle_p = \frac{1}{1+\alpha_1 c_1(m-1)}\left(\langle e_{ij}\rangle + m(1-c_p)\alpha_1\langle e^p_{ij}\rangle_p\right).\end{gathered} \tag{11}$$

Здесь

$$\alpha_1 = \frac{1}{15}\frac{4-5\nu_1}{1-\nu_1},\ \gamma_1 = \frac{1}{3}\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1},\ \nu_1 = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1+\mu_1)}, m = \frac{\mu_2}{\mu_1},\ q = \frac{K_2}{K_1},\ K_s = \lambda_s + \frac{2}{3}\mu_s .$$

Подставляя формулы (11) в соотношение (3) и выделяя девиаторную и объемную части, находим

$$\langle s_{ij}\rangle = 2\mu^*\left(\langle e_{ij}\rangle - e^*_{ij}\right)\ ,\ \langle\sigma_{qq}\rangle = 3K^*\langle\varepsilon_{qq}\rangle . \tag{12}$$

Здесь

$$\mu^* = \mu_1\left(1+\frac{c_2(m-1)}{1+\alpha_1 c_1(m-1)}\right),\ K^* = K_1\left(1+\frac{c_2(q-1)}{1+\gamma_1 c_1(q-1)}\right) \tag{13}$$

— эффективные модули сдвига и объемного растяжения (сжатия). Остаточные деформациии e^*_{ij} связаны с макроскопическими пластическими деформациями соотношением

$$\langle e^p_{ij}\rangle = \frac{1}{m}\left(1+(\alpha_1 c_1 + c_2)(m-1)\right)e^*_{ij} . \tag{14}$$

Для определения макроскопического поведения композиционного материала за пределом упругости необходимо осреднить соотношения (1) по объему зоны пластического течения V_p . Применение к первому из соотношений (3) допущения об отсутствии флуктуаций величин в объемах V_2 и V_p и правила механического смешивания дает

$$\left(\langle e_{ij}\rangle_p - \langle e^p_{ij}\rangle_p\right)\left(\langle e_{ij}\rangle_p - \langle e^p_{ij}\rangle_p\right) = \frac{k_2^2}{4\mu_{22}} . \tag{15}$$

Исключая из уравнения (15) с помощью формул (11)-(14) деформации $\langle e_{ij}\rangle_p, \langle e_{ij}\rangle, \langle e^p_{ij}\rangle$, находим закон нагружения рассматриваемой среды

$$\langle s_{ij}\rangle = k^*\frac{\langle e^{**}_{ij}\rangle}{\sqrt{\langle e^{**}_{ij}\rangle\langle e^{**}_{ij}\rangle}} + 2n^* e^*_{ij} . \tag{16}$$

Здесь

$$k^* = \frac{k_2}{m}\left(1+(\alpha_1 c_1 + c_2)(m-1)\right) ,$$

$$n^* = \mu^*\left(\frac{k^*}{k_2 c_p}\left(1+\alpha_1\left((m-1)c_1 - m(1-c_p)\right) - 1\right)\right)$$

- эффективный предел текучести и коэффициент упрочнения соответственно.

Уравнения (16) описывают нелинейное деформирование композиционного материала за пределом упругости.

Эффективный предел текучести k^* характеризует начальную поверхность текучести. Он является линейной функцией концентрации и при $c_2 = 1$ равен пределу текучести материала включений k_2. Коэффициент упрочнения n^* задает скорость перемещения и деформирования цилиндра Мизеса в шестимерном пространстве напряжений. При $c_p = c_2$ (что соответствует наличию пластического течения в каждой точке включений) формула для n^* совпадает с аналогичной формулой работы [1].

Библиографический список

1. Дудукаленко В.В., Мешков С.И., Сараев Л.А. К расчету эффективных характеристик пластичности неоднородных сред // ПМТФ.- 1979.- No 5.- С. 150-154.
2. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред.- М.: Наука, 1977.- 400 с.