

УДК 539.1

М.А. Кулеш, В.П. Матвеев, И.Н. Шардаков

Институт механики сплошных сред УрО РАН (Пермь)

ВОЛНЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ КОССЕРА

Abstract

Numerical analyses of the wave propagation in Cosserat continuum and comparison with wave propagation in classical continuum have been made. Revealed differences in wave processes in Cosserat continuum and classical continuum could be used in dynamical experiments for moment properties in elastic materials disclosure.

Анализ публикаций по моментной теории упругости свидетельствует, что с момента опубликования работы Коссера [1] интерес к этой теории возрастает с периодичностью в 30 лет. В настоящее время наблюдается очередной пик интереса к этой теме. С одной стороны, этот интерес обусловлен бурным развитием нанотехнологий и потребностью в моделях, описывающих поведение сред с микроструктурой. С другой стороны, в связи с дальнейшим развитием методов сейсмических исследований появляется потребность в физических моделях, более точно описывающих реальные геологические среды.

Например, при развитии представлений микрополярного континуума, учитывающих одновременно и трансляционные смещения, и кинематически независимые микроповороты отдельных блоков, оказалось возможным в рамках одной модели описать процессы распространения тектонических уединенных волн, излучающих сейсмические упругие предвестники [2]. Полученный результат имеет принципиальное значение, так как может быть использован для построения модели очага тектонических землетрясений в рамках микрополярного континуума.

В сейсмических и геофизических исследованиях в настоящее время применяются (хотя и не очень широко) механические [3] или лазерные [4] сенсоры, позволяющие непосредственно измерять скорости поворотов упругой или сейсмической волны в трех перпендикулярных направлениях. Это говорит о принципиальной возможности измерений, показывающих характер связи векторов перемещения и поворота.

В подобных экспериментах зачастую предполагается, что компоненты поворотов связаны с перемещениями соотношением, которое соответствует либо классической теории упругости, либо несимметричной теории со стесненным вращением, например псевдосреде Коссера (см., например, [5]):

$$\theta = 0,5 \operatorname{rot} \mathbf{u}.$$

В полной линейной теории среды Коссера [1, 6] векторы поворота θ и перемещения \mathbf{u} являются кинематически независимыми. С одной стороны, это приводит к увеличению количества необходимых материальных параметров. С другой стороны, полная теория является физически более правдоподобной, чем, например, псевдосреда Коссера [6].

Известны и другие частные случаи модели среды Коссера, например редуцированная среда Коссера, для которой три из восьми констант полной среды равны нулю и, как следствие, отсутствует тензор моментных напряжений. Впервые эта модель была предложена в [7] для описания сыпучих материалов. Она была исследована в изотропном случае в [8], где рассматривалось распространение волн в

неограниченной трехмерной редуцированной среде Коссера и было показано, что эта модель обладает рядом интересных свойств. Например, для волн сдвига-вращения имеется запрещенная зона частот, где вся энергия уходит на поворотные движения, она не распространяется в среде, а локализуется вблизи источника.

Распространение волн в полной линейной среде Коссера также связано с рядом эффектов. Во-первых, показан факт дисперсии упругих поверхностных волн Рэлея [9, 10], в то время как в классической теории упругости волны Рэлея распространяются без дисперсии. Во-вторых, выполнен подробный анализ компонент перемещений и поворотов [11], а также параметрический анализ поляризационных и дисперсионных характеристик волны Рэлея [12]. В-третьих, для модели среды Коссера наблюдается еще один эффект, связанный с распространением поверхностной поперечной волны с горизонтальной поляризацией. Геометрически такая волна сравнима с волной Лява, однако в классической теории упругости само существование волны Лява как поверхностной волны связано с наличием слоя на полупространстве, и при стремлении толщины слоя к нулю волна Лява переходит в объемную. В [13] показано, что для среды Коссера поверхностная горизонтально поляризованная волна существует и без плоского слоя. Наконец, в [14] получено еще одно решение, не имеющее аналогов в классической теории упругости. Это решение описывает распространяющуюся в тонком слое волну с одной поперечной компонентой вектора перемещения и двумя компонентами вектора поворота. Данная волна имеет еще большее количество мод, чем волна Лэмба, все моды обладают дисперсией, перемещения во всех модах зависят от координаты, перпендикулярной к поверхности слоя.

Однако следует отметить, что в подавляющем большинстве эти работы имеют сугубо теоретический характер. Одной из главных причин, ограничивающих практические приложения несимметричной теории упругости, является отсутствие надежных методов определения материальных констант.

Другим важным обстоятельством является недостаточное количество экспериментов, свидетельствующих о моментных эффектах при упругом деформировании материалов. Важным условием преодоления этих проблем является анализ решений задач несимметричной теории упругости. Целью анализа является определение таких значений параметров (характерные геометрические размеры, их соотношение и т.п.), при которых отклик моментных свойств материала на какую-либо макровеличину (экспериментально измеряемую) максимален. Таким образом, результаты анализа позволят определить наиболее информативные принципиальные схемы возможных экспериментов. Именно проведение подобного анализа и явилось целью данной работы, оно выполнено на основе ранее полученных аналитических решений, описывающих распространение объемных волн, а также плоских поверхностных волн Рэлея и Лэмба в среде Коссера [11, 12, 13, 14].

В следующей части работы приводятся основные уравнения среды Коссера и общее уравнение плоских волн. Далее рассматривается построение частных волновых решений для различных типов волн. Параметрический анализ полученных решений приведен в последней части работы.

1. Постановка задачи

Рассматривается пространство, заполненное упругой изотропной средой, описываемой моделью континуума Коссера [6]. Используется декартова система координат. В направлении оси X распространяется плоская волна. Основные соотношения имеют следующий вид:

уравнения движения:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{X} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{E} + \nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \mathbf{Y} = j \ddot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (1.1)$$

геометрические соотношения:

$$\boldsymbol{\gamma} = \nabla \mathbf{u} - \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\theta}, \quad \boldsymbol{\chi} = \nabla \boldsymbol{\theta}, \quad (1.2)$$

физические уравнения:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\gamma}^{(S)} + 2\alpha \boldsymbol{\gamma}^{(A)} + \lambda I_1(\boldsymbol{\gamma}) \mathbf{e}, \quad \boldsymbol{\mu} = 2\gamma \boldsymbol{\chi}^{(S)} + 2\varepsilon \boldsymbol{\chi}^{(A)} + \beta I_1(\boldsymbol{\chi}) \mathbf{e}. \quad (1.3)$$

В (1.1)–(1.3) \mathbf{X} – вектор удельной плотности объемных сил; \mathbf{Y} – вектор удельной плотности объемных моментов; $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\chi}$ – тензоры деформаций и изгиба-кручения; $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\mu}$ – тензоры напряжений и моментных напряжений; μ и λ – постоянные Ламе; α , β , γ , ε – физические постоянные материала в рамках упругой среды Коссера; ρ – плотность; j – плотность момента инерции (мера инерции среды при вращении); \mathbf{E} – тензор Леви-Чивиты третьего ранга; $\boldsymbol{\gamma}^{(S)}$, $\boldsymbol{\chi}^{(S)}$ – симметричные части тензоров $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\chi}$; $\boldsymbol{\gamma}^{(A)}$, $\boldsymbol{\chi}^{(A)}$ – антисимметричные части тензоров $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\chi}$; $\nabla(\cdot)$ – набла-оператор; $I_1(\cdot)$ – первый инвариант любого тензора; \mathbf{e} – единичный тензор [15]. Тензоры $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ в данной модели являются несимметричными.

С учетом (1.1)–(1.3) уравнения движения для вектора перемещения \mathbf{u} и вектора поворота $\boldsymbol{\theta}$ будут иметь вид

$$\begin{aligned} (2\mu + \lambda) \text{grad div } \mathbf{u} - (\mu + \alpha) \text{rot rot } \mathbf{u} + 2\alpha \text{rot } \boldsymbol{\theta} + \mathbf{X} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ (\beta + 2\gamma) \text{grad div } \boldsymbol{\theta} - (\gamma + \varepsilon) \text{rot rot } \boldsymbol{\theta} + 2\alpha \text{rot } \mathbf{u} - 4\alpha \boldsymbol{\theta} + \mathbf{Y} &= j \ddot{\boldsymbol{\theta}}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

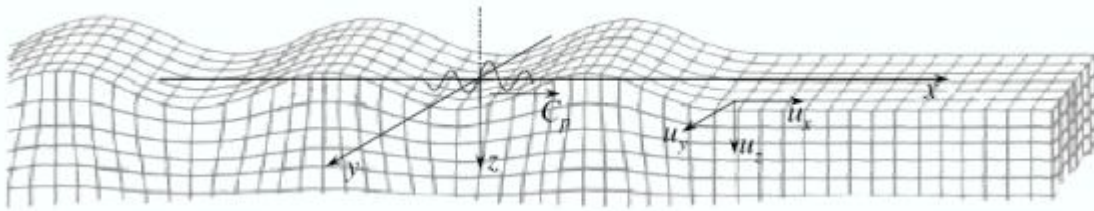


Рис. 1. Плоская волна в упругом полупространстве

В качестве частного случая рассмотрим плоскую волну в упругом полупространстве. В отличие от известных работ [9, 10], в которых авторы рассматривают только монохроматические волны, следуя методике, описанной, например, в [16], представим общее решение этой системы в виде Фурье-интегралов относительно всех компонент вектора перемещения $u_n(x, z, t)$ и вектора поворота $\theta_n(x, z, t)$. Подобное представление характерно тем, что волна, которая распространяется в направлении оси x с фазовой скоростью C_p , не зависит от поперечной координаты y , хотя и имеет поперечную компоненту колебаний u_y (рис. 1):

$$\begin{aligned} u_n(x, z, t, k(\omega)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} U_n(z) e^{i(k(\omega)x + \omega t)} \hat{S}_0(\omega) d\omega, \\ \theta_n(x, z, t, k(\omega)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} W_n(z) e^{i(k(\omega)x + \omega t)} \hat{S}_0(\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $n = \{x, y, z\}$ – координатный индекс, i – мнимая единица, $k(\omega)$ – волновое число как функция круговой частоты ω , t – время, $U_n(z)$ и $W_n(z)$ – амплитудные функции. Физический смысл имеют здесь только вещественные части компонент векторов перемещения и поворота. Полагаем, что массовые плотности объемных сил и моментов равны нулю.

Неизвестная функция волнового числа $k(\omega)$ будет определяться далее из соответствующего алгебраического дисперсионного уравнения, которое получается для каждого типа волны при учете геометрии задачи и однородных граничных условий. Функция $\hat{S}_0(\omega)$ задает комплексный спектр Фурье сигнала-источника, который определяет форму волнового пакета по временной координате.

Немонохроматическое представление в виде ограниченного во временном и Фурье-пространствах волнового пакета произвольной формы выбрано с целью демонстрации дисперсионных свойств волн и сопоставления решений с возможными экспериментальными результатами, представленными в виде сейсмограмм.

Оправданным в данном случае является выполнение непрерывного Фурье-преобразования уравнений движения (1.4) и представления (1.5). Это дает следующую систему относительно Фурье-образов искомых компонент вектора перемещения и поворота (учитываем, что массовых сил и моментов нет):

$$\begin{aligned} (2\mu + \lambda)\text{grad div } \mathbf{u} - (\mu + \alpha)\text{rot rot } \mathbf{u} + 2\alpha \text{rot } \boldsymbol{\theta} + \rho\omega^2 \mathbf{u} &= 0, \\ (\beta + 2\gamma)\text{grad div } \boldsymbol{\theta} - (\gamma + \varepsilon)\text{rot rot } \boldsymbol{\theta} + 2\alpha \text{rot } \mathbf{u} - (4\alpha - j\omega^2)\boldsymbol{\theta} &= 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где векторы \mathbf{u} , $\boldsymbol{\theta}$ с учетом Фурье-преобразования (1.5) имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \{U_x(z), U_y(z), U_z(z)\}^T e^{ikx} S_0(t), \\ \boldsymbol{\theta} &= \{W_x(z), W_y(z), W_z(z)\}^T e^{ikx} S_0(t). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Подставляя (1.7) в (1.6), получим две несвязанные системы линейных дифференциальных уравнений относительно амплитудных функций $U_x(z)$, $U_z(z)$, $W_y(z)$:

$$\begin{aligned} (\mu + \alpha)U_x''(z) + (\rho\omega^2 - k^2(\lambda + 2\mu))U_x(z) + ik(\lambda + \mu - \alpha)U_z'(z) - 2\alpha W_y'(z) &= 0, \\ (\lambda + 2\mu)U_z''(z) + (\rho\omega^2 - k^2(\mu + \alpha))U_z(z) + ik(\lambda + \mu - \alpha)U_x'(z) - 2ik\alpha W_y(z) &= 0, \\ (\gamma + \varepsilon)W_y''(z) + (j\omega^2 - k^2(\gamma + \varepsilon) - 4\alpha)W_x(z) + 2\alpha U_z'(z) - 2ik\alpha U_z(z) &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

и относительно $U_y(z)$, $W_x(z)$, $W_z(z)$:

$$\begin{aligned} (\gamma + \varepsilon)W_x''(z) + (j\omega^2 - k^2(\beta + 2\gamma) - 4\alpha)W_x(z) + ik(\beta + \gamma - \varepsilon)W_z'(z) - 2\alpha U_y'(z) &= 0, \\ (\beta + 2\gamma)W_z''(z) + (j\omega^2 - k^2(\gamma + \varepsilon))W_z(z) + ik(\beta + \gamma - \varepsilon)W_x'(z) - 2ik\alpha U_y(z) &= 0, \\ (\mu + \alpha)U_y''(z) + (\rho\omega^2 - k^2(\mu + \alpha))U_y(z) + 2\alpha W_x'(z) - 2ik\alpha W_z(z) &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Системы (1.8) и (1.9) допускают три различных типа решений. Конкретизируя виды граничных условий, можно получить решение для затухающей с глубиной волны Рэлея в полупространстве, решение для незатухающей с глубиной волны Лэмба в пластине, а также решение для плоских волн с не зависящей от глубины (постоянной по глубине) амплитудой. Первые два типа относятся к классу плоских поверхностных волн, в то время как третий тип соответствует плоским объемным волнам. Ниже приведен подробный анализ этих волновых типов, начиная с объемных волн.

2. Построение частных волновых решений

2.1. Решение для объемных продольных волн

Решение получается при выполнении условий: $U_x(z)=U_x$, $U_y(z)=0$, $U_z(z)=0$, $W_x(z)=W_x$, $W_y(z)=0$, $W_z(z)=0$. После подстановки данных условий в уравнения (1.8) и (1.9) получаем два независимых дисперсионных уравнения, одно из которых соответствует продольной волне перемещений

$$k_1(\omega) = \frac{\omega}{C_1}, \quad C_1^2 = \frac{C_1^2}{L^2 \omega_0^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho X_0^2 \omega_0^2},$$

а второе – продольной волне поворотов

$$k_2(\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2}{C_5^2} - k_0^2}, \quad C_5^2 = \frac{\beta + 2\gamma}{jL^2 \omega_0^2}, \quad k_0 = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta + 2\gamma}}, \quad (2.1)$$

где L – некоторый характерный размер, ω_0 – некоторая характерная частота, а C_1 – скорость распространения продольной волны в упругой среде.

2.2. Решения для объемных поперечных волн

Решение получается из следующих условий: $U_x(z)=0$, $U_y(z)=U_y$, $U_z(z)=U_z$, $W_x(z)=0$, $W_y(z)=W_y$, $W_z(z)=W_z$. После подстановки в уравнения (1.8) и (1.9) получим две независимые системы относительно волнового числа и частоты для горизонтально и вертикально поляризованных поперечных волн.

В силу изотропии среды данные уравнения инвариантны относительно поворота системы координат на 90° , поэтому обе системы дают одно и то же дисперсионное уравнение

$$k^4 + \left(4A^2 - \frac{C_3^2 + C_4^2}{C_3^2 C_4^2} \omega^2 \right) k^2 + \frac{\omega^4}{C_3^2 C_4^2} - \frac{4A^2}{C_2^2} \omega^2 = 0. \quad (2.2)$$

Это дисперсионное уравнение имеет два корня:

$$k_3(\omega) = \sqrt{A_p}, \quad k_4(\omega) = \sqrt{A_m},$$

где

$$\begin{aligned} A_p &= \frac{C_4^2 + C_3^2}{2C_3^2 C_4^2} \omega^2 - 2A^2 + \\ &+ \sqrt{\omega^4 \frac{C_3^4 + C_4^4 - 2C_4^2 C_3^2}{4C_3^4 C_4^4} - 2\omega^2 \frac{A^2 (C_3^2 C_2^2 + C_4^2 C_2^2 - 2C_4^2 C_3^2)}{C_3^2 C_4^2 C_2^2} + 4A^4}, \\ A_m &= \frac{C_4^2 + C_3^2}{2C_3^2 C_4^2} \omega^2 - 2A^2 - \\ &- \sqrt{\omega^4 \frac{C_3^4 + C_4^4 - 2C_4^2 C_3^2}{4C_3^4 C_4^4} - 2\omega^2 \frac{A^2 (C_3^2 C_2^2 + C_4^2 C_2^2 - 2C_4^2 C_3^2)}{C_3^2 C_4^2 C_2^2} + 4A^4}, \\ A^2 &= L^2 \frac{\mu \alpha}{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)}, \quad C_2^2 = \frac{C_t^2}{L^2 \omega_0^2} = \frac{\mu}{\rho L^2 \omega_0^2}, \quad C_3^2 = \frac{\mu + \alpha}{\rho L^2 \omega_0^2}, \quad C_4^2 = \frac{\gamma + \varepsilon}{jL^2 \omega_0^2}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

C_t – скорость распространения поперечных волн в упругой среде.

В поперечной волне, в отличие от продольной волны, компоненты перемещений и поворотов связаны друг с другом:

$$W_y = iU_z \frac{\rho\omega^2 - k^2\mu - k^2\alpha}{2k\alpha}, \quad U_z - \text{любое},$$

$$W_z = -iU_y \frac{\rho\omega^2 - k^2\mu - k^2\alpha}{2k\alpha}, \quad U_y - \text{любое}.$$

Раздельное существование этих компонент возможно лишь при $\alpha = 0$, что следует из уравнения (2.2).

2.3. Общее решение для поверхностной волны

Основным отличительным признаком поверхностных волн является то, что амплитуда волны изменяется (например, затухает) с глубиной. Поэтому, в отличие от предыдущего случая, в решении систем (1.8)–(1.9) для поверхностных волн присутствуют все шесть амплитудных функций $U_n(z)$, $W_n(z)$, $n = x, y, z$. Поэтому оно состоит из двух частей, одна из которых описывает продольно-поперечную эллиптическую волну, а вторая соответствует горизонтально-поперечной волне, затухающей с глубиной.

Таким образом, общее безразмерное решение в перемещениях имеет следующий вид:

для продольно-поперечной эллиптической волны:

$$u_x(x, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ D_1 i k e^{-v_1 z} + D_2 v_2 e^{-v_2 z} + D_3 v_3 e^{-v_3 z} + D_4 i k e^{v_1 z} - \right. \\ \left. - D_5 v_2 e^{v_2 z} - D_6 v_3 e^{v_3 z} \right\} e^{i(kx + \omega t)} \hat{S}_0(\omega) d\omega,$$

$$u_z(x, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ -D_1 v_1 e^{-v_1 z} + D_2 i k e^{-v_2 z} + D_3 i k e^{-v_3 z} + D_4 v_1 e^{v_1 z} + \right. \\ \left. + D_5 i k e^{v_2 z} + D_6 i k e^{v_3 z} \right\} e^{i(kx + \omega t)} \hat{S}_0(\omega) d\omega, \quad (2.4)$$

$$\theta_y(x, z, t) = \frac{B}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ D_2 \left(A_m - \frac{\omega^2}{C_3^2} \right) e^{-v_2 z} + D_3 \left(A_p - \frac{\omega^2}{C_3^2} \right) e^{-v_3 z} + \right. \\ \left. + D_5 \left(A_m - \frac{\omega^2}{C_3^2} \right) e^{v_2 z} - D_6 \left(A_p - \frac{\omega^2}{C_3^2} \right) e^{v_3 z} \right\} e^{i(kx + \omega t)} \hat{S}_0(\omega) d\omega,$$

для горизонтально-поперечной волны:

$$u_y(x, z, t) = \frac{F}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ E_2 \left(A_m - \frac{\omega^2}{C_4^2} + \frac{4}{F} \right) e^{-\xi_2 z} + E_3 \left(A_p - \frac{\omega^2}{C_4^2} + \frac{4}{F} \right) e^{-\xi_3 z} + \right. \\ \left. + E_5 \left(A_m - \frac{\omega^2}{C_4^2} + \frac{4}{F} \right) e^{\xi_2 z} + E_6 \left(A_p - \frac{\omega^2}{C_4^2} + \frac{4}{F} \right) e^{\xi_3 z} \right\} e^{i(kx + \omega t)} \hat{S}_0(\omega) d\omega,$$

$$\theta_x(x, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ E_1 i k e^{-\xi_1 z} + E_2 \xi_2 e^{-\xi_2 z} + E_3 \xi_3 e^{-\xi_3 z} + E_4 i k e^{\xi_1 z} - \right. \\ \left. - E_5 \xi_2 e^{\xi_2 z} - E_6 \xi_3 e^{\xi_3 z} \right\} e^{i(kx + \omega t)} \hat{S}_0(\omega) d\omega, \quad (2.5)$$

$$\theta_z(x, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ -E_1 \xi_1 e^{-\xi_1 z} + E_2 i k e^{-\xi_2 z} + E_3 i k e^{-\xi_3 z} + E_4 \xi_1 e^{\xi_1 z} + \right. \\ \left. + E_5 i k e^{\xi_2 z} + E_6 i k e^{\xi_3 z} \right\} e^{i(kx + \omega t)} \hat{S}_0(\omega) d\omega,$$

где константы D_j и E_j ($j=1,\dots,6$) определяются из граничных условий, а экспоненциальные показатели v_j и ξ_j ($j=1,\dots,3$) даются соотношениями:

$$v_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{C_1^2}}, \quad \xi_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{C_5^2} + \frac{4C_4^2}{FC_5^2}},$$

$$v_2 = \xi_2 = \sqrt{k^2 - A_m}, \quad v_3 = \xi_3 = \sqrt{k^2 - A_p},$$

где безразмерные материальные константы B и F имеют вид:

$$B = \frac{\alpha + \mu}{\alpha}, \quad F = \frac{B - 1}{A^2 B}.$$

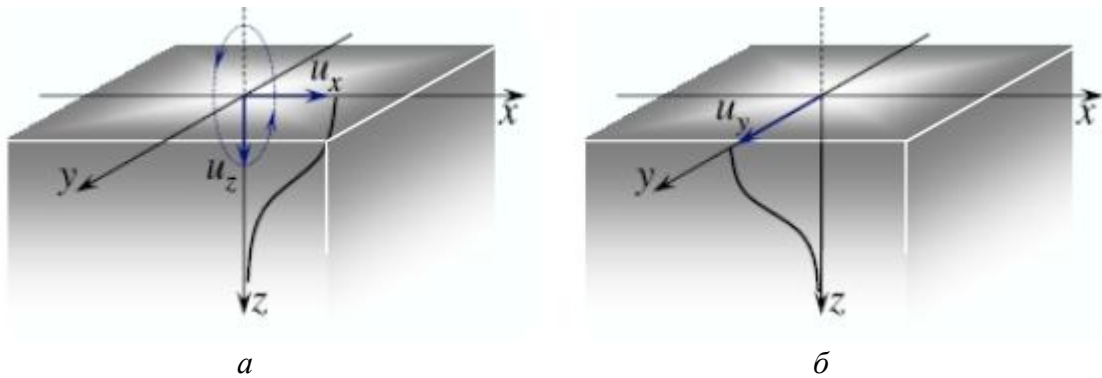


Рис. 2. Поверхностные волны в упругом полупространстве: (а) – волна Рэлея, (б) – поперечная поверхностная волна

2.4. Волна Рэлея и поперечная поверхностная волна

Решения (2.4)–(2.5) описывают в частном случае хорошо изученные решения для поверхностной волны Рэлея (рис. 2а), а также для новой поперечной поверхностной волны в упругом полупространстве (рис. 2б). Данные решения описываются функциями, затухающими с глубиной, то есть константы при экспонентах с положительными показателями равны нулю: $D_4 = D_5 = D_6 = 0$ и $E_4 = E_5 = E_6 = 0$.

Граничные условия определяют отсутствие сил и моментов на поверхности полупространства:

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} |_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zy} |_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz} |_{z=0} = 0, \\ \mu_{zx} |_{z=0} = 0, \quad \mu_{zy} |_{z=0} = 0, \quad \mu_{zz} |_{z=0} = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

При подстановке решений (2.4)–(2.5) в граничные условия (2.6) получим две однородные системы алгебраических уравнений, из условия разрешимости которых получим далее дисперсионные уравнения для двух типов волн.

Эллиптическая волна Рэлея с компонентами u_x, u_y, θ_y определяется дисперсионным уравнением [11]

$$\det[M_r(v_1, v_2, v_3)] = 0, \quad (2.7)$$

Поперечная поверхностная волна с компонентами u_y, θ_x, θ_z определяется дисперсионным уравнением [13]

$$\det[M_t(\xi_1, \xi_2, \xi_3)] = 0. \quad (2.8)$$

В приведенных выше дисперсионных уравнениях матрицы $M_r(p_1, p_2, p_3)$ и $M_t(p_1, p_2, p_3)$ определяются выражениями:

$$M_r(p_1, p_2, p_3) = \begin{bmatrix} 2k^2 - \frac{\omega^2}{C_2^2} & -2ikp_2 & -2ikp_3 \\ 2ikp_1 & 2k^2 - \frac{\omega^2}{C_2^2} & 2k^2 - \frac{\omega^2}{C_2^2} \\ 0 & p_2 \left(A_m - \frac{\omega^2}{C_3^2} \right) & p_3 \left(A_p - \frac{\omega^2}{C_3^2} \right) \end{bmatrix},$$

$$M_t(p_1, p_2, p_3) = \begin{bmatrix} \frac{2ik}{1-B} & p_2 \left(2 + \frac{A_m C_4^2 - \omega^2}{2A^2 C_4^2} \right) & p_3 \left(2 + \frac{A_p C_4^2 - \omega^2}{2A^2 C_4^2} \right) \\ ikp_1(1+C) & p_2^2 + k^2 C & p_3^2 + k^2 C \\ \left(\frac{C_3^2}{C_4^2} - C - 1 \right) k^2 - p_1^2 \frac{C_3^2}{C_4^2} & ikp_2(1+c) & ikp_3(1+C) \end{bmatrix}.$$

Здесь C – безразмерный параметр,

$$C = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}.$$

2.5. Волна Лэмба в тонком слое

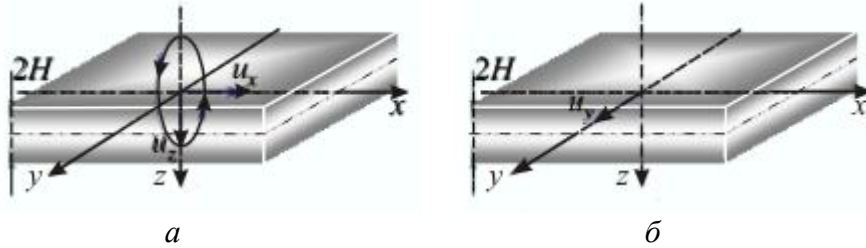


Рис. 3. Распространение волны Лэмба

Для построения решения, описывающего распространение волны Лэмба, в качестве характерного размера выберем половину толщины слоя $L = H$ (рис. 3). Граничные условия определяют отсутствие сил и моментов на обеих поверхностях слоя:

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} |_{z=\pm 1} = 0, \quad \sigma_{zy} |_{z=\pm 1} = 0, \quad \sigma_{zz} |_{z=\pm 1} = 0, \\ \mu_{zx} |_{z=\pm 1} = 0, \quad \mu_{zy} |_{z=\pm 1} = 0, \quad \mu_{zz} |_{z=\pm 1} = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Так же как и ранее, подставляя решения (2.4)–(2.5) в граничные условия (2.9), получим две однородные системы алгебраических уравнений, из условия разрешимости которых получим дисперсионные уравнения для двух типов волн [14].

Волна Лэмба с компонентами u_x, u_z, θ_y определяется дисперсионным уравнением

$$\det[M_l] = 0,$$

$$M_l = \begin{bmatrix} M_r(v_1, v_2, v_3)\varepsilon(v_1, v_2, v_3) & M_r(-v_1, -v_2, -v_3)\varepsilon(-v_1, -v_2, -v_3) \\ M_r(v_1, v_2, v_3)\varepsilon(-v_1, -v_2, -v_3) & M_r(-v_1, -v_2, -v_3)\varepsilon(v_1, v_2, v_3) \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Поперечная волна с компонентами u_y, θ_x, θ_z определяется дисперсионным уравнением

$$\det[M_S] = 0, \quad (2.11)$$

$$M_S = \begin{bmatrix} M_t(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\varepsilon(\xi_1, \xi_2, \xi_3) & M_t(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3)\varepsilon(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3) \\ M_t(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\varepsilon(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3) & M_t(-\xi_1, -\xi_2, -\xi_3)\varepsilon(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{bmatrix}.$$

В приведенных выше соотношениях диагональная матрица $\varepsilon(p_1, p_2, p_3)$ имеет следующий вид:

$$\varepsilon(p_1, p_2, p_3) = \begin{bmatrix} e^{-p_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-p_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-p_3} \end{bmatrix}$$

3. Анализ решений

Во всех приведенных ниже зависимостях используются гипотетические значения материальных параметров:

$$\lambda = 2.8 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad \mu = 4.0 \cdot 10^9 \text{ Ё/м}^2, \quad \rho = 10^5 \text{ ё/м}^3,$$

$$\alpha = 2.0 \cdot 10^9 \text{ Ё/м}^2, \quad \beta = 10^8 \text{ Ё}, \quad \gamma = 1.936 \cdot 10^8 \text{ Ё},$$

$$\varepsilon = 3.0464 \cdot 10^9 \text{ Ё}, \quad j = 10^4 \text{ ё/м}.$$

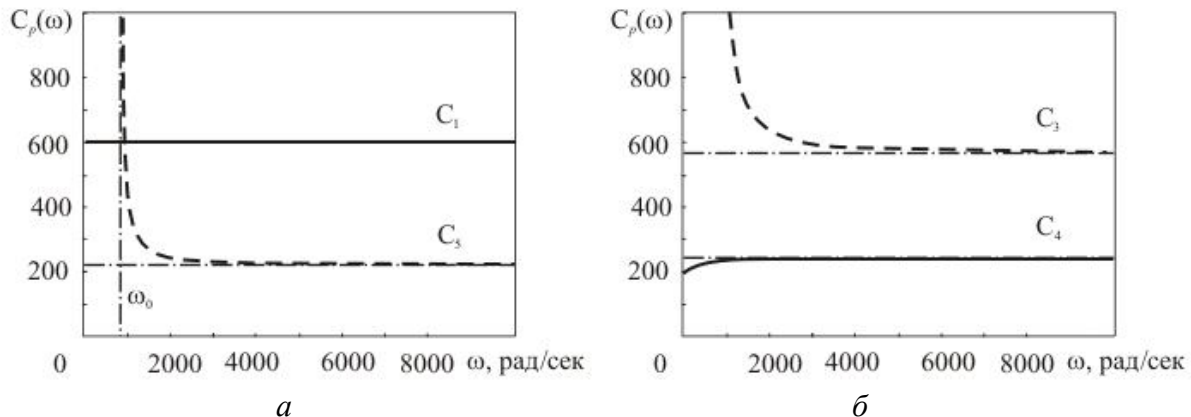


Рис. 4. Зависимости фазовых скоростей от частоты в среде Коссера (а) – продольная волна, (б) – поперечная волна

3.1. Объемные продольные волны (см. соотношения 3.1–3.3)

На рис. 4, а, 4, б приведены зависимости фазовых скоростей от частоты соответственно для продольной и поперечной волн в среде Коссера. На рис. 4, а сплошной линией обозначена фазовая скорость объемной волны перемещения, штриховой – фазовая скорость объемной волны поворотов, имеющая асимптотическое значение, равное C_5 при $\omega \rightarrow \infty$, а также вертикальную асимптоту при $\omega \rightarrow \omega_0$. На рис. 4, б сплошной и штриховой линией обозначены две фазовые скорости для двух объемных сдвиговых мод. Они имеют соответственно два асимптотических значения C_3 и C_4 при $\omega \rightarrow \infty$.

3.2. Поверхностные волны (см. соотношения 3.4–3.8)

На рис. 5, а, 5, б приведены зависимости относительных фазовых скоростей от частоты соответственно для волны Рэлея и продольно-поперечной волны. На этих рисунках C_i – фазовая скорость сдвиговой объемной волны для классической упругой среды. На рис. 5, а сплошной линией изображена фазовая скорость волны Рэлея для среды Коссера, штриховой линией – фазовая скорость волны Рэлея для классической

упругой среды. На рис. 5 б сплошная линия изображает фазовую скорость горизонтально-поперечной волны для среды Коссера, штриховая линия – фазовую скорость для объемной сдвиговой волны.

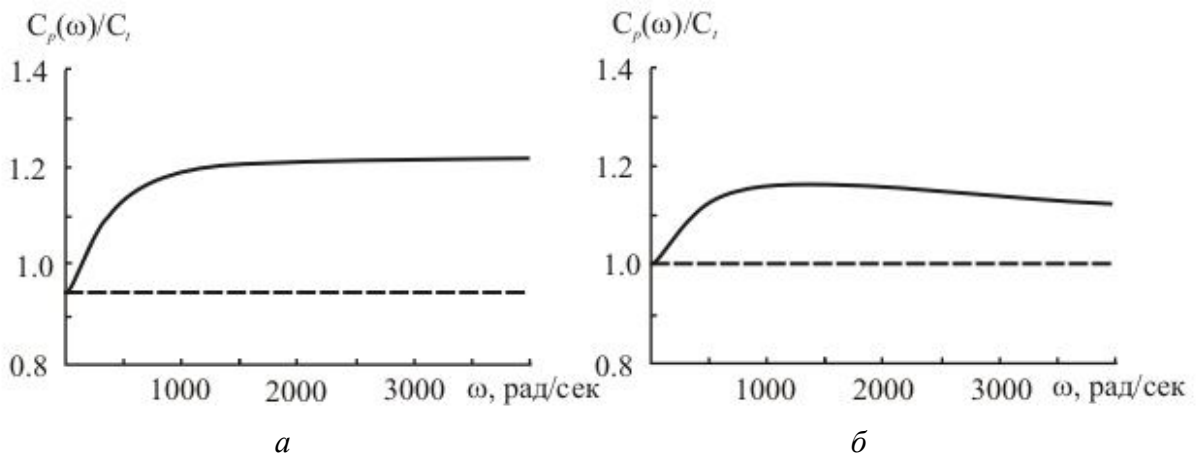


Рис. 5. Зависимости относительных фазовых скоростей от частоты (а) – для волны Релея, (б) – для продольно-поперечной

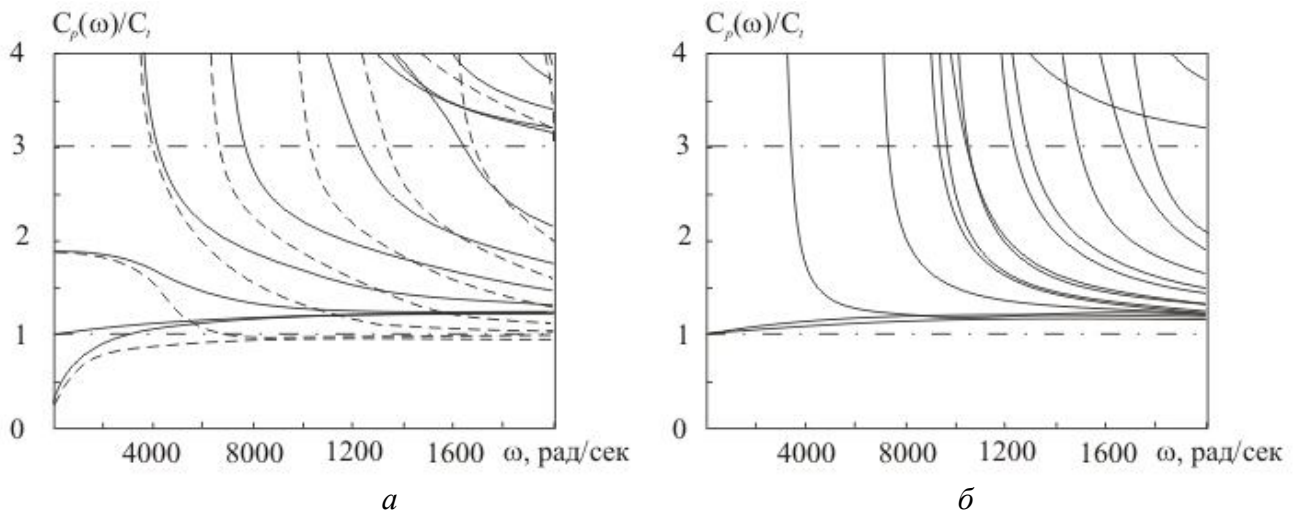


Рис. 6. Зависимости относительных фазовых скоростей от частоты (а) – для мод с компонентами u_x, u_z, θ_y , (б) – для мод с компонентами u_y, θ_x, θ_z

3.3. Волны в упругой пластине (см. соотношения 3.10–3.11)

На рис. 6, а, б, в приведены зависимости относительных фазовых скоростей от частоты соответственно для мод с компонентами u_x, u_z, θ_y и для мод с компонентами u_y, θ_x, θ_z . На рис. 6а сплошные линии изображают фазовые скорости волновых мод с компонентами u_x, u_z, θ_y для среды Коссера, штриховые линии – фазовые скорости волновых мод с компонентами u_x, u_z для классической упругой среды. На рис. 6, б сплошные линии изображают фазовые скорости волновых мод с компонентами u_y, θ_x, θ_z для среды Коссера. Для классической упругой среды имеет место только бездисперсионная объемная сдвиговая волна, амплитуда которой не зависит от координаты z . Штрихпунктирные линии на рис. 6, а, б, в определяют асимптотические значения семейств фазовых скоростей при $\omega \rightarrow \infty$.

Результаты численного анализа объемных, поверхностных волн и волн Лэмба в среде Коссера в сопоставлении с соответствующими волнами в классической среде позволили сделать следующие выводы.

Все рассмотренные волны в среде Коссера обладают ярко выраженными дисперсионными свойствами. Особенно ярко это проявляется в объемных и поверхностных волнах, тогда как для классической среды в этих волнах дисперсия отсутствует.

Для поверхностных волн в среде Коссера обнаружен новый тип поверхностных волн с продольно-горизонтальной поляризацией, которые отсутствуют в классической упругой среде.

Анализ волн Лэмба в среде Коссера позволил установить существенные отличия их от соответствующих волн в классической упругой среде. Представленные на рис. 6, б результаты позволяют предсказать новые волновые моды с компонентами u_y , θ_x , θ_z . В рамках классической теории упругости амплитуда этой волны не зависит от глубины, имеет место бездисперсная объемная сдвиговая волна. Несимметричная теория упругости предсказывает значительно более сложное поведение этой поперечной волны: она обладает дисперсией, имеет много волновых мод и ее амплитуда зависит от глубины.

Выявленные отличительные особенности волновых процессов в среде Коссера по сравнению с классической средой могут использоваться и будут использованы в динамических экспериментах по обнаружению фактов проявления моментных свойств в упругих материалах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 07-01-96029-р-Урал-а, 07-01-12041-офи, 07-01-97613-р-офи).

Библиографический список

1. Cosserat E. The'orie des corps d'eformables / E. Cosserat, F. Cosserat. – Hermann, Paris, 1909.
2. Михайлов Д.Н. Тектонические волны ротационного типа с излучением сейсмических сигналов / Д.Н. Михайлов, В.Н. Николаевский// Физика Земли. – 2000. – № 10. – С. 3–10.
3. Nigbor R.L. Six-degree-of-freedom ground-motion measurement / R.L. Nigbor // Bulletin of the Seismological Society of America. – 1994. – Vol. 84. – № 5. – P. 1665–1669.
4. Igel H. Rotational motions induced by the M8.1 Tokachi-oki earthquake, September, 25, 2003 / H. Igel, U. Schreiber, A. Flaws, B. Schuberth, A. Velikoseltsev, A. Cochard.// Geophysical research letters. – 2005. – Vol. 32. – L08309. – P. 1–5.
5. Савин Г.Н. Распространение упругих волн в континууме Коссера со стесненным вращением / Г.Н. Савин, А.А. Лукашов, Е.М. Лыско, С.В. Времеенко, Г.Г. Агасьев// Прикладная механика. – 1970. – Т. 6. – № 6. – С. 37–41.
6. Новацкий В. Теория упругости/ В. Новацкий. – М.: Мир. – 1975. – 872 с.
7. Schwartz, L.M. Vibrational modes in granular materials / L.M. Schwartz, D.L. Johnson, S. Feng// Physical Review Letters. – 1984. – Vol. 52. – № 10. – P. 831–834.
8. Grekova E.F. Wave propagation in rocks modeled as reduced Cosserat continuum / E.F. Grekova, G.C. Herman// Proceedings of 66th EAGE (European Association of Geoscientists and Engineers) conference, Paris. – 2004. – P098. – P. 1–4.
9. Eringen A.C. Microcontinuum Field Theories. I. Foundation and Solids/ A.C. Eringen. – Springer-Verlag New York, 1998. 319 p.

10. Лялин А.Е. О распространении поверхностных волн в среде Коссера / А.Е. Лялин, В.А. Пирожков, Р.Д. Степанов // Акустический журнал. – 1982. – Т. 28. – № 6. – С. 838–840.
11. Кулеш М.А. Построение и анализ аналитического решения для поверхностной волны Рэлея в рамках континуума Коссера / М.А. Кулеш, В.П. Матвеев, И.Н. Шардаков // Прикладная механика и техническая физика. – 2005. – Т. 46. – № 4. – С. 116–124.
12. Кулеш М.А. Дисперсия и поляризация поверхностных волн Рэлея для среды Коссера / М.А. Кулеш, В.П. Матвеев, И.Н. Шардаков // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2007. – № 4. – С. 100–113.
13. Кулеш М. А. О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера / М.А. Кулеш, В.П. Матвеев, И.Н. Шардаков // Акустический журнал. – 2006. – Т. 52. – № 2. – С. 227–235.
14. Кулеш М.А. Построение аналитического решения волны Лэмба в рамках континуума Коссера / М.А. Кулеш, В.П. Матвеев, И.Н. Шардаков // Прикладная механика и техническая физика. – 2007. – Т. 48. – № 1. – С. 143–150.
15. Корн Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – СПб.: Лань, 2003. – 832 с.
16. Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных диспергирующих системах. / П. Бхатнагар – М.: Мир, 1983. – 134 с.

Получено 10.11.2008.