УДК 539.3

С.О. Саркисян

Гюмрийский государственный педагогический институт (Гюмри, Армения)

ОБЩИЕ МОДЕЛИ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Abstract

In present paper in the field of a thin plate the basic system of the equations and boundary conditions of three-dimensional asymmetrical, momental, micropolar static theory of elasticity is exposed to asymptotical analysis. On the basis of qualitative results of initial approximation of asymptotical method there are formulated assumptions (hypothesis) on the basis of which the general models (of the applied two-didimensional theory) are constructed, where all the angular-shift deformations are taken into account. Depending on values of dimensionless physical parameters of micropolar plates, models of plates with independent fields of tranzition and rotations, with the constraint rotation, “with small shift rigidity” are constructed.

В связи с новыми задачами изучения механики микро- и наноструктурных материалов актуально построение общих моделей для тонких стержней, пластин и оболочек на основе микрополярной, несимметричной, моментной теории упругости [1 – 8].

В работах [9–12] на основе асимптотического интегрирования трехмерных (двумерных) уравнений несиметричной теории упругости в трехмерной области тонкой пластинки или оболочки (в двумерной области тонкого прямоугольника) построены прикладные-двумерные теории микрополярных тонких пластин или оболочек (прикладная-одномерная теория микрополярных тонких стержней). Построены микрополярные погранслои, изучены их структура и свойства, и методом сращивания асимптотических разложений получены двумерные граничные условия (одномерные граничные условия) для соответствующих двумерных (одномерных) теорий. Получены также граничные условия для каждой погранслойной задачи. На основе рассмотрения конкретных задач [12] показаны эффекты при использовании микрополярных материалов.

В работах [9–12] показано, что в зависимости от значений безразмерных физических параметров указанных тонких тел, возможно построение прикладной двумерной теории микрополярных пластин или оболочек (прикладной одномерной теории микрополярных стержней) со свободным вращением; со стесненным вращением и теории «с малой сдвиговой жесткостью».

В данной работе построены общие (т.е. уточненные) математические модели микрополярных пластин со свободным вращением, со стесненным вращением и теории «с малой сдвиговой жесткостью», при которых по сравнению с работой [9] учитываются все угловые-сдвиговые деформации, возникающие при деформировании микрополярных тонких пластин.

1. Постановка задачи. Асимптотический подход

Рассмотрим изотропную пластинку постоянной толщины $2h$ как трехмерное упругое микрополярное тело. Введем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, совмещая плоскость Ox_1x_2 со срединной плоскостью пластинки. Будем исходить из основных уравнений пространственной статической задачи линейной несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [13]:

Уравнения равновесия:

$$\sigma_{ji,j} = 0 \ , \qquad \mu_{ji,j} + э_{ijk}\sigma_{jk} = 0 . \tag{1.1}$$

Физические соотношения:

$$\sigma_{ji} = (\mu+\alpha)\cdot\gamma_{ji} + (\mu-\alpha)\cdot\gamma_{ij} + \lambda\cdot\gamma_{kk}\cdot\delta_{ij}\ ,$$
$$\mu_{ji} = (\gamma+\varepsilon)\cdot\chi_{ji} + (\gamma-\varepsilon)\cdot\chi_{ij} + \beta\cdot\chi_{kk}\cdot\delta_{ij}\ . \qquad (1.2)$$

Геометрические соотношения:

$$\gamma_{ij} = u_{j,i} - э_{kij}\cdot\omega_k\ , \qquad \chi_{ij} = \omega_{j,i}\ . \qquad (1.3)$$

Здесь σ_{ij},μ_{ij} – компоненты несимметричных тензоров силового и моментного напряжений; γ_{ij} – компоненты несимметричного тензора деформаций; χ_{ij} – компоненты несимметричного тензора изгиба-кручения; $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \alpha,\beta,\gamma,\varepsilon$ – упругие постоянные микрополярного материала; u_i – компоненты вектора перемещения; ω_i – компоненты независимого вектора поворота в точках тела; $э_{kij}$ – символы Леви–Чивиты; индексы i, j после запятой означают дифференцирование по координате x_i, x_j соответственно. Идексы i, j, k здесь и в дальнейшем принимают значения 1,2,3.

На лицевых плоскостях пластинки $x_3 = \pm h$ заданы силовые и моментные граничные условия:

$$\sigma_{3i} = p_i^{\pm}\ ,\ \ \mu_{3i} = m_i^{\pm}\ , \qquad (1.4)$$

где $p_i^{\pm}$, $m_i^{\pm}$ – компоненты внешних заданных усилий и моментов.

На поверхности края пластинки $(\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ заданы граничные условия смешанного типа:

$$\sigma_{ji}\cdot n_j = p_i^*,\ \ \mu_{ji}\cdot n_j = m_i^*,\ \text{на}\ \Sigma_1\ , \qquad u = u_i^*,\quad \omega = \omega_i^*\ \ \text{на}\ \Sigma_2, \qquad (1.5)$$

где p_i^*, m_i^* – компоненты заданных внешних усилий и моментов; n_i – компоненты вектора нормали к поверхности края пластинки; u_i^*, ω_i^* – заданные компоненты векторов перемещения и независимого поворота.

Решение краевой задачи (1.1)–(1.5) складывается из суммы решений симметричной и обратно-симетричной по x_3 задач. В симметричной задаче (обобщенное плоское напряженное состояние пластинки) $\sigma_{nn},\sigma_{nm},\sigma_{33},\ \mu_{n3},\mu_{3n},u_n,\omega_3$ – четные по x_3 функции, а $\sigma_{n3},\sigma_{3n},\mu_{nn},\mu_{nm},\mu_{33},u_3,\omega_n$ – нечетные, в обратно-симметричной задаче (изгиб пластинки)– наоборот. Здесь и в дальнейшем индексы n,m принимают значения 1,2, притом $n \neq m$. В этой работе будем излагать общие теории изгиба микрополярных пластин.

Предполагается, что толщина пластины $2h$ мала по сравнению с ее характерным размером a в плане, т.е. $2h << a$, $\delta = h/a << 1$; δ – основной малый параметр задачи.

В основу рассуждений кладем свойство тонкой пластины, выражаемое структурной формулой

$$(\text{НДС})_{\text{полн}} = (\text{НДС})_{\text{ВН}} + (\text{НДС})_{\text{КР}}\ . \qquad (1.6)$$

В ней под $(\text{НДС})_{\text{полн}}$, $(\text{НДС})_{\text{ВН}}$ и $(\text{НДС})_{\text{КР}}$ подразумевается полное, внутреннее (охватывающего тело в целом) и краевое (локализованное вблизи поверхности края пластинки) напряженно-деформированное состояние. При таком подходе на результатах исходного приближения внутренней задачи возможно будет построение общей двумерной теории микрополярных пластин. Далее, изучая макрополярный погранслой и задачу сращивания внутренней задачи и погранслоев возможно получение двумерных граничных условий на граничном контуре срединной плоскости пластинки.

Для построения внутреннего итерационного процесса перейдем в уравнениях (1.1)–(1.3) к безразмерным координатам:

$$\xi = \frac{x_1}{a}, \quad \eta = \frac{x_2}{a}, \quad \zeta = \frac{x_3}{a} \tag{1.7}$$

и к безразмерным величинам:

$$\frac{u_i}{a} = \overline{u}_i, \ \frac{\sigma_{ij}}{\mu} = \overline{\sigma}_{\mathrm{ij}}, \ \frac{\mu_{ij}}{\mu} = \overline{\mu}_{\mathrm{ij}} \ . \tag{1.8}$$

Введем также безразмерные физические параметры:

$$\frac{\mu}{4\alpha}, \ \frac{a^2\mu}{\beta}, \ \frac{a^2\mu}{\gamma}, \ \frac{a^2\mu}{\varepsilon}. \tag{1.9}$$

Решение внутренней задачи представим в виде асимптотического разложения

$$Q = \delta^{-q} \sum_{s=0}^{S} \delta^s \cdot Q^{(s)}, \tag{1.10}$$

где s – номер асимптотического приближения, $Q -$ любое из напряжений (силовых и моментных), перемещений и независимых поворотов, $q -$ натуральное число разное для разных величин, которое определяется из условия непротиворечивой реккурентной системы уравнений после подстановки разложения (1.10) в преобразованную при помощи (1.7)–(1.9) систему уравнений (1.1)–(1.3).

В зависимости от порядковых значений безразмерных физических параметров (1.9) рассмотрим три разных случая.

2. Модель микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений

Предположим, что все безразмерные физические параметры микрополярной пластины (1.9) имеют порядок единицы:

$$\frac{\alpha}{4\mu} \sim 1, \quad \frac{a^2\mu}{\beta} \sim 1, \quad \frac{a^2\mu}{\gamma} \sim 1, \quad \frac{a^2\mu}{\varepsilon} \sim 1. \tag{2.1}$$

В этом случае для q в разложениях (1.10) получим для задачи изгиба микрополярной пластинки:

$$\begin{aligned} &q = 1 \text{ для } \overline{\sigma}_{m3}, \overline{\sigma}_{3m}, \overline{\mu}_{nn}, \overline{\mu}_{mn}, \overline{\mu}_{33}, \overline{u}_3, \omega_m, \\ &q = 0 \text{ для } \overline{\sigma}_{nn}, \overline{\sigma}_{mn}, \overline{\sigma}_{33}, \overline{\mu}_{m3}, \overline{\mu}_{3m}, \overline{u}_m, \omega_3. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Учитивая (2.1), (1.10) и (2.2), из основных уравнений трехмерной несиметричной теории упругости (1.1)–(1.3)(с учетом (1.7)–(1.9)) получим систему уравнений в асимптотических приближениях s, которая легко можно интегрировать по координате ζ. В исходном $(s = 0)$ асимптотическом приближения получим некоторые качественные результаты, что равносильно принятию определенных предположений (гипотез) для построения прикладной-двумерной теории микрополярных пластин.

Одно из специфических свойств построенного внутреннего итерационного процесса состоит в том, что повороты точек трехмерного тела пластинки, в том числе и для точек срединной плоскости пластинки, независимы от перемещений. Поэтому нижеприведенная двумерная теория названа теорией микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений (или теория микрополярных пластин со свободным вращением).

При построении теории изгиба микрополярных пластин со свободным вращением (т.е. при выполнении условий (2.1)) будем пользоваться предположениями (которые имеют асимптотическое обоснование), суть которых состоит в следующем:

1.Нормальное к срединной плоскости пластинки перемещение u_3 и повороты ω_1,ω_2 не зависят от координаты x_3;

2. Моментное напряжение μ_{33} не зависят от координаты x_3;

3. Сначала для силовых касательных напряжений σ_{31} и σ_{32} примем, что $\sigma_{31}=\overset{0}{\sigma}_{31}(x_1x_2)$, $\sigma_{32}=\overset{0}{\sigma}_{32}(x_1x_2)$ и определим тангенциальные перемещения u_1,u_2 силовые напряжения $\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12},\sigma_{21},\sigma_{13},\sigma_{23}$ по соответствующим формулам обобщенного закона Гука и моментные напряжения μ_{31},μ_{32} из четвертого и пятого уравнений равновесия. После этого окончательно определим σ_{31}, σ_{32}, прибавляя к $\overset{0}{\sigma}_{31}(x_1x_2)$, $\overset{0}{\sigma}_{32}(x_1x_2)$ слагаемые, получаемые, соответственно, интегрированием по x_3 первого и второго уравнений равновесия, для которых потребуем условие, что усредненые по толщине пластинки величины равны нулю.

На основе указанных предположений (или на основе исходного ($s=0$) приближения асимптотического метода внутренней задачи) из трехмерной теории приходим к основным двумерным уравнениям микрополярных пластин со свободным вращением.

Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{23}}{\partial x_2}=-\left(p_3^++p_3^-\right),\quad N_{31}-\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}-\frac{\partial M_{21}}{\partial x_2}=h\left(p_1^+-p_1^-\right),$$
$$N_{32}-\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}-\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2}=h\left(p_2^+-p_2^-\right),$$
$$\frac{\partial L_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{21}}{\partial x_2}+N_{23}-N_{32}=-\left(m_1^++m_1^-\right),\tag{2.3}$$
$$\frac{\partial L_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{22}}{\partial x_2}+N_{31}-N_{13}=-\left(m_2^++m_2^-\right).$$

Соотношения упругости:

$$M_{11}=\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left(K_{11}+\nu K_{22}\right)-\frac{h^2}{3}\frac{\nu}{1-\nu}\left(p_3^++p_3^-\right),\quad M_{12}=\frac{2h^3}{3}\left[(\mu+\alpha)K_{12}+(\mu-\alpha)K_{21}-2\alpha\iota\right],$$
$$M_{22}=\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left(K_{22}+\nu K_{11}\right)-\frac{h^2}{3}\frac{\nu}{1-\nu}\left(p_3^++p_3^-\right),\quad M_{21}=\frac{2h^3}{3}\left[(\mu+\alpha)K_{21}+(\mu-\alpha)K_{12}+2\alpha\iota\right],$$

$$L_{11}=2h\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}k_{11}+\frac{2\beta\gamma}{\beta+2\gamma}k_{22}+\frac{\beta}{2(\beta+2\gamma)}\left(m_3^+-m_3^-\right)\right],$$
$$L_{22}=2h\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}k_{22}+\frac{2\beta\gamma}{\beta+2\gamma}k_{11}+\frac{\beta}{2(\beta+2\gamma)}\left(m_3^+-m_3^-\right)\right],\tag{2.4}$$
$$L_{12}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)k_{12}+(\gamma-\varepsilon)k_{21}\right],\quad L_{21}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)k_{21}+(\gamma-\varepsilon)k_{12}\right],$$
$$N_{31}=2h(\mu+\alpha)\left[\gamma_{31}+\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\gamma_{13}\right],\quad N_{32}=2h(\mu+\alpha)\left[\gamma_{32}+\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\gamma_{23}\right],$$

$$N_{13} = 2h\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\gamma_{13} + \frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}N_{31}, \quad N_{23} = 2h\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\gamma_{23} + \frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}N_{32}.$$

Геометрические соотношения:

$$K_{11} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\psi_1(x_1,x_2) + \frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\Omega_2(x_1,x_2)\right), \quad K_{22} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\psi_2(x_1,x_2) - \frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\Omega_1(x_1,x_2)\right),$$

$$K_{12} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\psi_2(x_1,x_2) - \frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\Omega_1(x_1,x_2)\right), \quad K_{21} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\psi_1(x_1,x_2) + \frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\Omega_2(x_1,x_2)\right),$$

$$\iota(x_1,x_2) = \frac{1}{\beta+2\gamma}\left[\left(m_3^+ - m_3^-\right) - \beta\left(\frac{\partial\Omega_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial\Omega_2(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right)\right], \tag{2.5}$$

$$k_{11} = \frac{\partial\Omega_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}, \quad k_{22} = \frac{\partial\Omega_2(x_1,x_2)}{\partial x_2}, \quad k_{12} = \frac{\partial\Omega_2(x_1,x_2)}{\partial x_1}, \quad k_{21} = \frac{\partial\Omega_1(x_1,x_2)}{\partial x_2},$$

$$\gamma_{31} = \psi_1(x_1,x_2) - \frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\Omega_2(x_1,x_2), \quad \gamma_{32} = \psi_2(x_1,x_2) + \frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\Omega_1(x_1,x_2),$$

$$\gamma_{13} = \frac{\partial w(x_1,x_2)}{\partial x_1} + \Omega_2(x_1,x_2), \quad \gamma_{32} = \frac{\partial w(x_1,x_2)}{\partial x_2} - \Omega_1(x_1,x_2).$$

Здесь $w(x_1,x_2)$, $\Omega_1(x_1,x_2)$, $\Omega_2(x_1,x_2)$ соответственно нормальное перемещение (прогиб) и независимые повороты точек срединной плоскости пластинки; γ_{m3},γ_{3m} – сдвиговые деформации; $N_{3m}, N_{m3}, M_{nn}, M_{mn}, L_{nn}, L_{mn}$ – усредненые усилия и моменты в сечениях пластинки:

$$\begin{gathered} N_{3m} = \int_{-h}^{h}\sigma_{3m}dx_3, \; N_{m3} = \int_{-h}^{h}\sigma_{m3}dx_3, \; M_{nn} = \int_{-h}^{h}\sigma_{nn}x_3dx_3, \\ M_{nm} = \int_{-h}^{h}\sigma_{nm}x_3dx_3, \; L_{nn} = \int_{-h}^{h}\mu_{nn}dx_3, L_{nm} = \int_{-h}^{h}\mu_{nm}dx_3. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Пограничный слой около бокового края пластинки Σ при условии (2.1) построен в работе [9], где выявлена структура этого погранслоя и выведены условия его затухания. На основе сращивания асимптотических разложений, при $s=0$, внутренней и погранслойной задач определяются граничные условия на граничном контуре $\tilde{A}$срединной плоскости пластинки для системы двумерных уравнений (2.3)–(2.5) ($x_1 = 0$ считаем одной из границ срединной плоскости пластинки):

$$\begin{gathered} N_{13}\big|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h}p_3^*dx_3, \; M_{11}\big|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h}x_3p_1^*dx_3, \; L_{11}\big|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h}m_1^*dx_3, \\ M_{12}\big|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h}x_3p_2^*dx_3, \; L_{12}\big|_{x_1=0} = \int_{-h}^{h}m_2^*dx_3. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Таким образом, система двумерных уравнений (2.3)–(2.5) и граничные условия (2.7) определяют общую двумерную модель микрополярных пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

Если в уравнения (2.3)–(2.5) подставить все физические константы $\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon$, равные нулю, то получим уточненную теорию типа Тимошенко–Рейсснера в классической постановке [14].

3. Модель микрополярных упругих тонких пластин со стесненным вращением

Предположим теперь, что безразмерные физические параметры микрополярной пластинки (1.9) имеют значения

$$\frac{\alpha}{4\mu} \sim \delta^2\alpha^*, \text{ где } \alpha^* \sim 1, \ \frac{a^2\mu}{\beta} \sim 1, \quad \frac{a^2\mu}{\gamma} \sim 1, \quad \frac{a^2\mu}{\varepsilon} \sim 1. \tag{3.1}$$

При значениях (3.1) в разложениях (1.10) для q будем иметь для задачи изгиба микрополярных пластин:

$$\begin{aligned} &q = -1 \text{ для } \bar{u}_3, \omega_m, \bar{\sigma}_{m3}, \bar{\sigma}_{3m}, \bar{\mu}_{nn}, \bar{\mu}_{nm}, \bar{\mu}_{33}, \\ &q = 0 \text{ для } \bar{u}_m, \omega_3, \bar{\sigma}_{nn}, \bar{\sigma}_{mn}, \bar{\sigma}_{33}, \bar{\mu}_{m3}, \bar{\mu}_{3m}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Главная специфическая особенность построенного внутреннего итерационного процесса состоит в том, что повороты точек в трехмерной области пластинки выражаются через перемещения этих же точек. Поэтому теория, которую будем излагать ниже, названа теорией микрополярных упругих тонких пластин со стесненным вращением.

При построении теории микрополярнных пластин со стесненым вращением в основу кладем следующие предположения (которые имеют асимптотическое обоснование):

1. перемещение u_3 и повороты ω_1, ω_2 не зависят от координаты x_3;
2. повороты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ выражаются через перемещения u_1, u_2 и u_3 по формулам идентичным формулам классической теории упругости:

$$\omega_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right), \ \omega_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right), \ \omega_3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right). \tag{3.3}$$

3. для силовых напряжений σ_{31}, σ_{32} и для моментного напряжения μ_{33} сначала считаем, что они выражаются формулами $\sigma_{31} = \overset{0}{\sigma}_{31}(x_1, x_2)$, $\sigma_{32} = \overset{0}{\sigma}_{32}(x_1, x_2)$, $\mu_{33} = \overset{0}{\mu}_{33}(x_1, x_2)$, и из уравнений трехмерной теории определим перемещения u_1, u_2, поворот ω_3, силовые напряжения $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ и моментные напряжения $\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{31}, \mu_{32}, \mu_{13}, \mu_{23}$. После определения этих величин силовые напряжения σ_{31}, σ_{32} и моментное напряжение μ_{33} окончательно определим, соответственно прибавляя к $\overset{0}{\sigma}_{31}(x_1, x_2)$, $\overset{0}{\sigma}_{32}(x_1, x_2)$, $\overset{0}{\mu}_{33}(x_1, x_2)$ слагаемые, получаемые интегрированием по x_3 первого и второго уравнения равновесия в силовых напряжениях и шестого уравнения равновесия, потребовав условие, чтобы усредненые по толщине пластинки от указанных величин были равны нулю.

Указанные предположения (либо нулевое приближение асимптотического метода внутренней задачи) приводит к основным двумерным уравнениям микрополярных пластин со стесненным вращением.

Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} &N_{31} - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} = h\left(p_1^+ - p_1^-\right), \ N_{32} - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} = h\left(p_2^+ - p_2^-\right), \\ &\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} = -\left(p_3^+ + p_3^-\right), \ \frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2} - L_{33} + M_{12} - M_{21} = -h\left(m_3^+ - m_3^-\right), \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial L_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{21}}{\partial x_2}+N_{23}-N_{32}=-\left(m_1^{+}+m_1^{-}\right),\quad \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{22}}{\partial x_2}+N_{31}-N_{13}=-\left(m_2^{+}+m_2^{-}\right)$$

Соотношения упругости

$$N_{31}+N_{13}=8\mu h\gamma_{31},\quad N_{32}+N_{23}=8\mu h\gamma_{32},\quad L_{33}=4\gamma h\left(K_{12}-K_{21}\right)$$

$$M_{11}=\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left(K_{11}+\nu K_{22}\right)-\frac{h^2}{3}\frac{\nu}{1-\nu}\left(p_3^{+}+p_3^{-}\right),\ M_{12}+M_{21}=\frac{4\mu h^3}{3}\left[K_{12}+K_{21}\right]$$

$$M_{22}=\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left(K_{22}+\nu K_{11}\right)-\frac{h^2}{3}\frac{\nu}{1-\nu}\left(p_3^{+}+p_3^{-}\right),$$

$$L_{11}=2h\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}k_{11}+\frac{2\beta\gamma}{\beta+2\gamma}k_{22}\right]+\frac{\beta}{\beta+2\gamma}L_{33},\quad L_{12}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)k_{12}+(\gamma-\varepsilon)k_{21}\right]$$

$$L_{22}=2h\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}k_{22}+\frac{2\beta\gamma}{\beta+2\gamma}k_{11}\right]+\frac{\beta}{\beta+2\gamma}L_{33},\quad L_{21}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)k_{21}+(\gamma-\varepsilon)k_{12}\right]\tag{3.5}$$

$$\Lambda_{13}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_1^{+}+m_1^{-}}{2h}-\frac{1}{2}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(K_{21}-K_{12}\right)\right],$$

$$\Lambda_{23}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_2^{+}+m_2^{-}}{2h}-\frac{1}{2}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(K_{21}-K_{12}\right)\right].$$

Геометрические соотношения:

$$K_{11}=\frac{\partial\psi_1(x_1,x_2)}{\partial x_1},\quad K_{22}=\frac{\partial\psi_2(x_1,x_2)}{\partial x_2},\quad K_{12}=\frac{\partial\psi_2(x_1,x_2)}{\partial x_1},\quad K_{21}=\frac{\partial\psi_1(x_1,x_2)}{\partial x_2},$$

$$k_{11}=\frac{\partial\Omega_1(x_1,x_2)}{\partial x_1},\quad k_{22}=\frac{\partial\Omega_2(x_1,x_2)}{\partial x_2},\quad k_{12}=\frac{\partial\Omega_2(x_1,x_2)}{\partial x_1},\quad k_{21}=\frac{\partial\Omega_1(x_1,x_2)}{\partial x_2},$$

$$\gamma_{31}=\frac{1}{2}\left(\psi_1(x_1,x_2)+\frac{\partial w(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right),\quad \gamma_{31}=\frac{1}{2}\left(\psi_2(x_1,x_2)+\frac{\partial w(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right),\tag{3.6}$$

$$\Omega_1=-\frac{1}{2}\left(\psi_2(x_1,x_2)-\frac{\partial w(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right),\quad \Omega_2=\frac{1}{2}\left(\psi_1(x_1,x_2)-\frac{\partial w(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right).$$

Структура и свойства микрополярного погранслоя изучены в работе [8]. Изучая задачу сращивания построенной внутренней задачи и соответствующего погранслоя, получим двумерные граничные условия для системы уравнений (3.4)–(3.6):

$$N_{13}\big|_{x_1=0}=\int_{-h}^{h}p_3^{*}dx_3,\quad \left(M_{11}+L_{12}\right)\big|_{x_1=0}=\int_{-h}^{h}\left(x_3p_1^{*}+m_2^{*}\right)dx_3,$$

$$\left(M_{12}-L_{11}\right)\big|_{x_1=0}=\int_{-h}^{h}\left(x_3p_2^{*}-m_1^{*}\right)dx_3.\tag{3.7}$$

Двумерные уравнения (3.4)–(3.6) и граничные условия (3.7) определяют математическую модель микрополярных пластин со стесненным вращением.

Если в уравнения системы (3.4)–(3.6) подставить $\alpha=0,\ \ \beta=0,\ \ \gamma=0,\ \ \varepsilon=0$, то приходим к уточненной теории пластин типа Тимошенко–Рейсснера по классической теории упругости [14].

4.Модель микрополяных упругих тонких пластин «с малой сдвиговой жесткостью»

Построим третью, отличную от предыдующих асимптотику, принимая для безразмерных физических параметров (1.9) следующие представления:

$$\frac{\mu}{4\alpha}\sim\delta^{-2}\alpha^*,\quad \frac{a^2\mu}{\beta}\sim 1,\quad \frac{a^2\mu}{\gamma}\sim 1,\quad \frac{a^2\mu}{\varepsilon}\sim 1. \tag{4.1}$$

При значениях (4.1) в разложениях (1.10) будем иметь для задачи изгиба микрополярных пластин:

$$\begin{aligned} &q=4 \text{ для } \omega_1,\omega_2,\bar{\mu}_{nn},\bar{\mu}_{nm},\bar{\mu}_{33},\\ &q=3 \text{ для } \omega_3,\bar{\mu}_{3m},\bar{\mu}_{m3},\\ &q=2 \text{ для } \bar{u}_3,\bar{\sigma}_{3m},\bar{\sigma}_{m3},\\ &q=1 \text{ для } \bar{u}_m,\bar{\sigma}_{nn},\bar{\sigma}_{nm},\bar{\sigma}_{33}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Главная специфическая особенность этого внутреннего итерационного процесса состоит в том, что на уровне приближения $s=0$ «чисто моментная часть» задачи отделяется от «силовой части» задачи.

На основе главных особенностей внутреннего итериационного процесса ((4.1),(4.2),(4.10)) можем сформулировать следующие предположения:

1. Нормальное перемещение u_3 и независимые повороты ω_1,ω_2 не зависят от координаты x_3.

2. Моментное напряжение μ_{33} не зависит от координаты x_3.

3. Сначала для силовых напряжений σ_{31} и σ_{32} примем, что $\sigma_{31}=\overset{0}{\sigma}_{31}(x_1,x_2)$, $\sigma_{32}=\overset{0}{\sigma}_{32}(x_1,x_2)$, и на основе соответствующих уравнений трехмерной теории определим тангенциальные перемещения u_m, силовые напряжения $\sigma_{nn},\sigma_{mn},\sigma_{m3}$ и моментные напряжения μ_{3m}. После этого силовые напряжения σ_{31},σ_{32} окончательно определим, прибавляя к $\overset{0}{\sigma}_{31}(x_1,x_2)$, $\overset{0}{\sigma}_{32}(x_1,x_2)$ слагаемые, получаемые соответственно интегрированием по x_3 первых двух уравнений равновесия, для которых потребуем условие, что усредненные по толщине пластинки величины равны нулю.

4. В четвертом, пятом и шестом уравнениях равновесия присутствующими разностями от силовых напряжений можно пренебречь (это означает, что «моментная часть» отделяется от «силовой части» задачи, обратное, в общем случае, не имеет место).

5. В выражениях независимых поворотов вкладом поворотов от классического типа происхождения можно пренебречь.

При указанных предположениях в двумерных уравнениях микрополярных пластин величины «чисто моментного» происхождения отделяются и образуют автономную систему уравнений. Для «силовой части» задачи получим своеобразную сдвиговую теорию пластин, в которой присутствуют независимые повороты обусловленные «моментной частью» задачи. Сформулируем эти системы уравнений.

Уравнения «чисто моментной» части задачи

Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial L_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{21}}{\partial x_2}=-\left(m_1^+ + m_1^-\right),\quad \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{22}}{\partial x_2}=-\left(m_2^+ + m_2^-\right), \tag{4.3}$$

Соотношения упругости:

$$L_{11}=2h\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}k_{11}+\frac{2\beta\gamma}{\beta+2\gamma}k_{22}+\frac{\beta}{2(\beta+2\gamma)}\left(m_3^{+}-m_3^{-}\right)\right],$$

$$L_{22}=2h\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}k_{22}+\frac{2\beta\gamma}{\beta+2\gamma}k_{11}+\frac{\beta}{2(\beta+2\gamma)}\left(m_3^{+}-m_3^{-}\right)\right], \tag{4.4}$$

$$L_{12}=2h[(\gamma+\varepsilon)k_{12}+(\gamma-\varepsilon)k_{21}],\quad L_{21}=2h[(\gamma+\varepsilon)k_{21}+(\gamma-\varepsilon)k_{12}].$$

Геометрические соотношения:

$$k_{11}=\frac{\partial\Omega_1(x_1,x_2)}{\partial x_1},\ k_{22}=\frac{\partial\Omega_2(x_1,x_2)}{\partial x_2},\ k_{12}=\frac{\partial\Omega_2(x_1,x_2)}{\partial x_1},\ k_{21}=\frac{\partial\Omega_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}. \tag{4.5}$$

Уравнения «силовой» части задачи

Уравнения равновесия:

$$N_{31}-\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}-\frac{\partial M_{21}}{\partial x_2}=h\left(p_1^{+}-p_1^{-}\right),\ N_{32}-\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}-\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2}=h\left(p_2^{+}-p_2^{-}\right),$$

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{23}}{\partial x_2}=-\left(p_3^{+}+p_3^{-}\right). \tag{4.6}$$

Физические соотношения:

$$M_{11}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{11}+\nu K_{22})-\frac{h^2}{3}\frac{\nu}{1-\nu}\left(p_3^{+}+p_3^{-}\right),\ M_{12}=\frac{2h^3}{3}[\mu(K_{12}+K_{21})-2\alpha\iota],$$

$$M_{22}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{22}+\nu K_{11})-\frac{h^2}{3}\frac{\nu}{1-\nu}\left(p_3^{+}+p_3^{-}\right),\ M_{21}=\frac{2h^3}{3}[\mu(K_{21}+K_{12})+2\alpha\iota],$$

$$N_{31}=2\mu h[\gamma_{31}+\gamma_{13}]-4\alpha h\Omega_2,\quad N_{32}=2h\varepsilon[\gamma_{32}+\gamma_{23}]+4\alpha h\Omega_1, \tag{4.7}$$

$$N_{13}=N_{31}+8\alpha h\Omega_2,\quad N_{23}=N_{32}-8\alpha h\Omega_1.$$

Геометрические соотношения:

$$K_{11}=\frac{\partial\psi_1(x_1,x_2)}{\partial x_1},\ K_{22}=\frac{\partial\psi_2(x_1,x_2)}{\partial x_2},\ K_{12}=\frac{\partial\psi_2(x_1,x_2)}{\partial x_1},\ K_{21}=\frac{\partial\psi_1(x_1,x_2)}{\partial x_2},$$

$$\gamma_{31}=\psi_1(x_1,x_2)-\Omega_2(x_1,x_2),\quad \gamma_{32}=\psi_2(x_1,x_2)+\Omega_1(x_1,x_2),$$

$$\gamma_{13}=\frac{\partial w(x_1,x_2)}{\partial x_1}+\Omega_2(x_1,x_2),\quad \gamma_{23}=\frac{\partial w(x_1,x_2)}{\partial x_2}-\Omega_1(x_1,x_2), \tag{4.8}$$

$$\iota(x_1,x_2)=\frac{1}{\beta+2\gamma}\left[\left(m_3^{+}-m_3^{-}\right)-\beta\left(\frac{\partial\Omega_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}+\frac{\partial\Omega_2(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right)\right].$$

Погранслой при условии (4.1) построен и изучен в работе [9]. Задача сращивания построенной внутренней–двумерной задачи и соответствующего погранслоя приводит к двумерным граничным условиям для систем (4.3)–(4.5) и (4.6)–(4.8):

$$L_{11}\Big|_{x_1=0}=\int_{-h}^{h}m_1^{*}dx_3,\quad L_{12}\Big|_{x_1=0}=\int_{-h}^{h}m_2^{*}dx_3. \tag{4.9}$$

$$N_{13}\Big|_{x_1=0}=\int_{-h}^{h}p_3^{*}dx_3,\quad M_{11}\Big|_{x_1=0}=\int_{-h}^{h}x_3p_1^{*}dx_3,\quad M_{12}\Big|_{x_1=0}=\int_{-h}^{h}x_3p_2^{*}dx_3. \tag{4.10}$$

Совокупность систем двумерых уравнений (4.3)–(4.5), (4.6)–(4.8) и граничных условий (4.9),(4.10) определяют общую двумерную модель микрополярных пластин «с малой сдвиговой жесткостью», при которой учитываются все угловые-сдвиговые деформации. Построенная микрополярная теория пластин названа теорией «с малой сдвиговой жесткостью», имея ввиду, что α – это тоже модуль сдвига, как и классический модуль сдвига μ, а так же имея в виду значение безразмерного параметра $\frac{\mu}{4\alpha}$. Если в уравнения (4.6)–(4.8) подставить физические постоянные $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$, равные нулю, то опять, как в предыдующих случаях, приходим к уточненной классической теории пластин типа Тимошенко–Рейсснера [14].

Библиографический список

1. Palmov V.A., Uber eine cosseratsche theorie fur elastische platen / V.A. Palmov, H. Altenbach // Thechn. Mech. – 1982. – H. 3. – S. 5–9.

2. Жилин П. А. Основные уравнения неклассической теории упругих оболочек/ П. А. Жилин // Динамика и прочность машин: тр. Ленингр. политех. ин-та. – № 386. – 1982.– С.29–42.

3. Пальмов В. А. Простейшая непротиворечивая система уравнений теории тонких упругих оболочек / В. А. Пальмов // Механика деформируемого тела. – М.: Наука, – 1986. – С. 106–112.

4. Шкутин А. И. Механика деформаций гибких тел / А. И. Шкутин.–Новосибирск: Наука. – 1988. – 128 с.

5. Green A. E. The Linear Elastic Cosserat Surface and Shell Theory / A. E. Green, P. M. Naghdi // Intern. J. Solid and Struct. – 1968. – Vol.4. – № 6. – P.585 – 592.

6. Зубов Л.М. Механика упругих микрополярных оболочек / Л.М. Зубов, В.А. Еремеев // Дальневосточный математический журнал. – 2003. – Т.4. – № 2. – С.182 – 225.

7. Ванин Г. А. Моментная механика тонких оболочек / Г. А. Ванин // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 4. – С.116 – 138.

8. Амбарцумян С. А. Микрополярная теория оболочек и пластин / С. А. Амбарцумян. – Ереван: Изд-во НАН Армении, 1999. – 214 с.

9. Саркисян С. О. Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости / С. О. Саркисян // Прикладная математика и механика. – 2008. – Т.72. – № 1. – С. 129–147.

10. Sargsyan S.H. Dynamic Problem of Thin Plates on the Basis of Asymmetric Theory of Elasticity / S.H. Sargsyan // Proc. of XXXIV Summer School «Advanced Problems in Mechanics». – Saint-Petersbary: – IPME RAS, 2006. – P.447–458.

11. Саркисян С. О. Общая теория упругих тонких оболочек на основе несиметричной теории упругости / С. О. Саркисян // Прикладная математика и механика. – 2008. – Т.72 (в печати).

12. Саркисян С. О. Прикладные–одномерные теории балок на основе несиметричной теории упругости / С. О. Саркисян // Физическая мезомеханика. – 2008. – Т.11. – № 5.

13. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity / W. Nowacki. – Oxford, etc.: Pergamon Press. – 1986. – 383 p.

14. Перцев А. К. Динамика оболочек и пластин / А. К. Перцев, Э. Г. Платонов.– Ленинград: Судостроение, 1987. – 316 с.

Получено 25.08.2008