УДК 539.214

ДОПОЛНЕНИЕ К ТЕОРИИ БИШОПА-ХИЛЛА ПЛАСТИЧЕСКОГО ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ МОНОКРИСТАЛЛА

Келлер И.Э., Трусов П.В. (Пермь)

Abstract

The shear minimum principle and the plastic work maximum principle were proved in the limits of any generalization of the Schmid law to an arbitrary strain state. Isotropic hardened rigid-plastic FCC single crystals deformed by the crystallographic slip mechanism were considered. Theory of continuous linear functionals on normed spaces was used. A particular form of the yield criterion with a power norm was considered and its properties and a certain energetic sense were analysed. The associated flow-rule for a rigid-plastic single crystal media was derived and investigated on the base of the proved extremal principles.

Введение

Многие современные работы, посвященные теоретическому анализу и моделированию пластического поведения металлических поликристаллов, в значительной степени опираются на классический анализ пластического формоизменения монокристалла, выполненный G.I. Taylor [1], J.F.W. Bishop и R. Hill [2-3] и J.F.W. Bishop [4]. В этих работах рассматривались ГЦК-монокристаллы с жестко-пластическими свойствами, деформирующиеся путем кристаллографического скольжения. Закон Шмида, установленный в опытах на единичное скольжение монокристалла, авторы [2] обобщили на случай произвольного деформированного состояния и с помощью полученного критерия текучести (называемого критерием Бишопа-Хилла) и закона течения в терминах связанных с системами скольжения переменных обосновали локальный принцип максимума и принцип минимума суммарного сдвига Тейлора [1]. Указанный принцип максимума был использован в работе [3] для нахождения тензора напряжений, соответствующего заданному тензору приращений пластических деформаций, а принцип минимума — в работе [1] для нахождения набора приращений сдвигов, реализующих заданный тензор приращения деформаций.

Более поздняя публикация R. Hill [5], однако, позволяет дополнить этот анализ. Выбирая обобщение закона Шмида на произвольное деформированное состояние с использованием любой достаточно точно согласующейся с экспериментом нормы, мы получим соответствующий принцип минимума сдвига и следующие из него законы пластического течения, с помощью которых представляется возможным построить определяющие соотношения. В настоящей работе подробно исследуется семейство степенных норм; классический анализ в рамках такого предположения будет являться предельным случаем, т. е. справедливым при стремлении показателя степени к бесконечности.

Экстремальные принципы[1]

Ограничимся случаем малых градиентов перемещений, в рамках которого пластическое формоизменение среды может быть описано девиатором $\boldsymbol{\epsilon}^p$ тензора скорости деформаций Эйлера. В таком случае функционалами удельной мощности пластического формоизменения на элементах пространства симметричных девиаторов $\boldsymbol{\epsilon}^p$ являются девиаторы $\boldsymbol{s}$ тензоров напряжений Коши (см. приложение). Тензор $\boldsymbol{\epsilon}^p$ реализуют скорости сдвигов γ^k по системам скольжения ГЦК-монокристалла

$$\boldsymbol{\epsilon}^p = \gamma^k \boldsymbol{m}_k, \tag{1}$$

где $k = 1...12$ (здесь и далее в работе используется соглашение о суммировании по "немым" индексам), $\boldsymbol{m}_k$ – симметризованная диада, состоящая из векторов, характеризующих k-ю систему скольжения, $\boldsymbol{m}_k = \frac{1}{2}(\boldsymbol{n}_k \otimes \boldsymbol{b}_k + \boldsymbol{b}_k \otimes \boldsymbol{n}_k)$, где $\boldsymbol{n}_k$ и $\boldsymbol{b}_k$ – единичные векторы соответственно нормали к плоскости скольжения и направления скольжения, а "$\otimes$" обозначает диадное произведение; величины γ^k в (1) могут быть любого знака. Набор $\boldsymbol{m}_k$ для ГЦК-решетки содержит базис пространства симметричных девиаторов $\mathcal{H}_5$, то есть

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{m}_1, .., \boldsymbol{m}_{12}) = \mathcal{H}_5, \tag{2}$$

где $\mathcal{L}(\cdot)$ есть символ линейной оболочки. Движущими силами кристаллографического скольжения являются приведенные напряжения

$$\tau_k = \boldsymbol{s}\boldsymbol{m}_k \tag{3}$$

(свободные индексы k здесь и далее в работе принимают значения 1...12). Поскольку заданный тензор $\boldsymbol{\epsilon}^p$ в силу (1) может порождаться различными наборами скоростей сдвигов γ^k, рассмотрим пространство $\mathcal{A}_{12}$ векторов $\boldsymbol{\gamma}$ с компонентами γ^k в некотором базисе $\boldsymbol{e}_k \in \mathcal{A}_{12}$. Поскольку в силу (1) и (3) $\boldsymbol{s}\boldsymbol{\epsilon}^p = \tau_k\gamma^k$, можно рассмотреть сопряженное пространство $\mathcal{A}_{12}^*$ векторов $\boldsymbol{\tau}$ с компонентами τ_k в сопряженном базисе $\boldsymbol{e}^k \in \mathcal{A}_{12}^*$. Заметим, однако, что интересующие нас векторы $\boldsymbol{\tau}$ согласно (3) образуют пятимерное подпространство$\mathcal{A}_5^* \subset \mathcal{A}_{12}^*$. Далее, элементы из $\mathcal{A}_5$, порожденные некоторым тензором $\boldsymbol{s}$, будем обозначать $\boldsymbol{\tau}_s$ (не путать с компонентами $\boldsymbol{\tau}$!).

[1] Рекомендуется предварительно ознакомиться с приложением.

В пространстве $\mathcal{A}_{12}^*$ определим выпуклую однородную первой степени функцию $\phi(\boldsymbol{\tau})$, равноправную относительно координат аргумента, с помощью которой может быть записан критерий текучести монокристалла

$$\phi(\boldsymbol{\tau}_s) = r_{cr}, \tag{4}$$

где r_{cr} – некоторый критический параметр размерности напряжения ($\phi(\cdot)$ как функцию $\boldsymbol{s}$ будем обозначать $\phi'(\boldsymbol{s}) = \phi(\boldsymbol{\tau}_s)$, тогда критерий (4) может быть записан в форме $\phi'(\boldsymbol{s}) = r_{cr}$ (4′)).

Пусть задан $\boldsymbol{\epsilon}^p$, параллельный внешней нормали к поверхности текучести (4′) в $\mathcal{A}_5^*$ в точке $\boldsymbol{s}$. Вектор $\boldsymbol{\gamma}$ назовем геометрически возможным, если он удовлетворяет ограничению (1) при заданном $\boldsymbol{\epsilon}^p$. Физически возможным назовем вектор $\boldsymbol{\gamma}$, нормальный поверхности текучести (4) (в $\mathcal{A}_{12}^*$) в точке $\boldsymbol{\tau}_s$. Задача нахождения геометрически и физически возможного $\boldsymbol{\gamma}$ эквивалентна задаче нахождения продолжения $\boldsymbol{\epsilon}^p$ на все пространство $\mathcal{A}_{12}^*$ с сохранением нормы, поскольку $\boldsymbol{\gamma}$ есть продолжение $\boldsymbol{\epsilon}^p$, а сформулированное условие нормальности эквивалентно условию сохранения нормы $\boldsymbol{\epsilon}^p$. Норма $\boldsymbol{\epsilon}^p$ находится в терминах $\mathcal{A}_5^*$ согласно определению (A1) приложения; обозначим ее $\psi'(\boldsymbol{\epsilon}^p)$.

Имеет место следующий принцип минимума сдвига: *геометрически и физически возможный $\boldsymbol{\gamma}$ находится как решение задачи*

$$\psi(\boldsymbol{\gamma}) \ \to \ \min, \qquad \boldsymbol{\epsilon}^p = \gamma^k \boldsymbol{m}_k. \tag{5}$$

Действительно, условие $(5)_2$ есть условие геометрической возможности $\boldsymbol{\gamma}$, а согласно неравенству (A2) приложения

$$\psi(\boldsymbol{\gamma}) \geq \frac{\boldsymbol{\tau}_s \boldsymbol{\gamma}}{\phi(\boldsymbol{\tau}_s)} = \frac{\boldsymbol{s}\boldsymbol{\epsilon}^p}{\phi'(\boldsymbol{s})} = \psi'(\boldsymbol{\epsilon}^p) \tag{6}$$

и условие $(5)_1$ обеспечивает физическую возможность $\boldsymbol{\gamma}$. Очевидно, что по определению физически и геометрически возможного $\boldsymbol{\gamma}$ связь $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\tau}_s$ может быть записана в виде следующего принципа максимума:

$$\boldsymbol{\tau}_s \boldsymbol{\gamma} \ \to \ \max, \qquad \phi(\boldsymbol{\tau}_s) = r_{cr}, \tag{7}$$

из которого в силу (3) следует так называемый локальный принцип максимума

$$\boldsymbol{s}\boldsymbol{\epsilon}^p \ \to \ \max, \qquad \phi'(\boldsymbol{s}) = r_{cr}. \tag{8}$$

Заметим, однако, что общность приведенных здесь результатов ограничена случаем изотропного упрочнения, что связано с ограничениями на функцию $\phi(\boldsymbol{\tau})$.

Полагая $\phi(\boldsymbol{\tau}) = \max\limits_k |\tau_k|$, как авторы [1-4], из (7) следует принятый в этих работах закон пластического течения. Очевидно, что этот закон удовлетворяет локальному принципу максимума (8) и принципу минимума сдвига (5) (с нормой $\psi(\boldsymbol{\gamma}) = \sum\limits_k |\gamma^k|$, являющейся двойственной к $\phi(\boldsymbol{\tau})$); последний был сформулирован в работе [1] и доказан в работе [2]. Кроме того, на основе приведенной здесь теории может быть элементарно доказана рассмотренная в работе [4] теорема существования.

Степенной критерий текучести

Рассмотрим в качестве функций текучести семейство степенных норм

$$\phi(\boldsymbol{\tau}) = \Big(\sum_k |\tau_k|^q\Big)^{1/q}, \qquad 2 \leq q < \infty. \tag{9}$$

Потребуем, чтобы критерий (4) сводился к критерию Шмида, то есть предсказывал текучесть при единичном скольжении $\boldsymbol{s} = \tau_{cr}\boldsymbol{m}_l$, где τ_{cr} – критическое сдвиговое напряжение, а индекс "l" фиксирован и может быть любым. Тогда условие (4) принимает вид

$$\phi'(\boldsymbol{s}) = \tau_{cr}\phi'(\boldsymbol{m}_l), \tag{10}$$

причем, очевидно, что $\phi'(\boldsymbol{m}_l)$ не зависит от l, а зависит от q; обозначим $\phi'(\boldsymbol{m}_l) = \nu(q)$.

Может быть показано, что уравнение (10) задает ограниченную, гладкую и строго выпуклую поверхность в пространстве напряжений $\boldsymbol{s}$, причем ограниченность обеспечивается условием (2). Также можно доказать, что поверхности (10) при $q \to \infty$ стремятся к поверхности многогранника Бишопа-Хилла, находясь внутри него.

Наложенное на τ_{cr} требование обеспечивает наличие 24 общих точек поверхности (10) при любом q и многогранника Бишопа-Хилла, соответствующих единичному скольжению. В случае деформирования, отличного от единичного скольжения, текучесть согласно (10) может наступить, когда ни на одной системе скольжения не выполняется закон Шмида, однако в этом случае он выполняется приближенно. Точность приближения может быть выбрана сколь угодно высокой увеличением q. Отличием построенного критерия от формулировки Бишопа-Хилла является то, что он учитывает вклад всех приведенных напряжений в условие текучести.

Построенному критерию может быть придан энергетический смысл. С этой целью рассмотрим класс металлов с сильно нелинейной кривой обратимого деформирования, предшествующего состоянию текучести, нелинейность которой вызвана дислокационным механизмом. Данный механизм представляет собой упругое смещение локальных дефектов решетки, поджатых к барьерам. Нелинейность зависимости напряжений от деформаций в такой модели объясняется стохастическим распределением упругих свойств дислокаций, вызванным хаотической ориентацией дислокаций в плоскостях залегания, а также наличием в кристалле спектра барьеров с различными упругими характеристиками.

В предположении, что поджатые дислокации залегают в плоскостях скольжения, в качестве потенциала таких ("обратимых") деформаций выбирается $U(\boldsymbol{s})$, так что

$$\boldsymbol{\epsilon}^r = \nabla U(\boldsymbol{s}), \tag{11}$$

где $\boldsymbol{\epsilon}^r$ есть девиатор тензора обратимых деформаций, а ∇ есть градиент с частными производными по компонентам $\boldsymbol{s}$. Выберем функцию $U(\boldsymbol{s})$ в виде

$$U(\cdot) \equiv \frac{e}{(q-1)\tau_{cr}^q} f(\cdot), \qquad f(\cdot) \equiv \phi'(\cdot)^q, \quad q > 2, \tag{12}$$

где e – параметр истории пластического формоизменения, как самый простой случай, качественно согласующийся с экспериментальными данными. Тогда, рассчитывая энергию обратимых деформаций $W(\boldsymbol{s})$, получим, что в состоянии текучести согласно (10) $W(\boldsymbol{s}) = e$, то есть параметр e имеет смысл предельного значения энергии. Критерий (10), следовательно, предсказывает начало текучести в момент, когда энергия обратимых деформаций достигает предельного значения. В пределе при $q \to \infty$ рассматриваемый закон гиперупругости сводится к классическому закону течения жестко-пластической среды.

Определяющие соотношения

Получим на основе сформулированного критерия и экстремальных принципов ряд определяющих соотношений, могущих быть использованными для вывода определяющих соотношений поликристалла, а также для непосредственного использования в расчетах монокристаллических изделий.

Примем гипотезу

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^p, \tag{13}$$

где $\boldsymbol{\epsilon}$ символизирует девиатор скоростей полных деформаций, и предположим также, что среда не упрочняется. Для данной жестко-идеально-пластической среды с помощью принципа (7) и соотношений (10) и (A3) получим законы

$$\gamma^k = \frac{\lambda}{\nu(q)^{q-1}} \frac{\boldsymbol{s}\boldsymbol{m}_k}{\tau_{cr}} \left|\frac{\boldsymbol{s}\boldsymbol{m}_k}{\tau_{cr}}\right|^{q-2}, \qquad \phi'(\boldsymbol{s}) = r_{cr}, \tag{14}$$

с помощью которых покоординатным умножением на соответствующие диадики $\boldsymbol{m}_k$ и суммированием по k получаем закон в терминах тензоров $\boldsymbol{\epsilon}$ и $\boldsymbol{s}$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{r_{cr}\lambda}{\nu(q)^q} \sum_k \frac{\boldsymbol{m}_k}{\tau_{cr}} \left|\frac{\boldsymbol{s}\boldsymbol{m}_k}{\tau_{cr}}\right|^{q-2} \frac{\boldsymbol{s}\boldsymbol{m}_k}{\tau_{cr}}, \qquad \phi'(\boldsymbol{s}) = r_{cr} \tag{15}$$

или, выделив тензор $\boldsymbol{A}$ четвертого ранга (зависящий от $\boldsymbol{s}$),в виде

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{r_{cr}\lambda}{\nu(q)^q} \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}, \qquad \phi'(\boldsymbol{s}) = r_{cr}. \tag{16}$$

Заметим, что законы (14) следуют также из принципа минимума (5), поскольку геометрически и физически возможный γ существует, а физически возможный γ в силу строгой выпуклости $\phi(\cdot)$ единственный и есть (14). Также отметим, что (15) непосредственно следует из локального принципа максимума. С помощью законов (14) можно выяснить роль параметра q в тензоре пластических свойств $\boldsymbol{A}$. Рассматривая напряженное состояние $\boldsymbol{s} = \tau_{cr}\boldsymbol{m}_l$ (l фиксирован), вызывающее единичное скольжение, из (14) можно найти модули относительных сдвигов

$$|\gamma'^k| = r_{cr}^{q-1}\lambda^{-1}\,|\gamma^k| = |\boldsymbol{m}_l\boldsymbol{m}_k|^{q-1}. \tag{17}$$

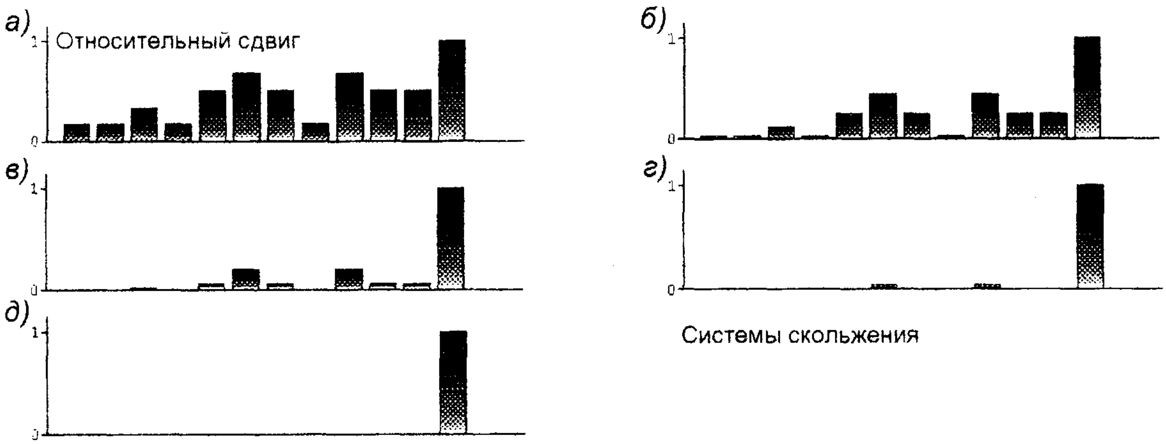

Рис. 1: Относительное распределение сдвига по всем системам скольжения при единичном скольжении согласно (14): а) $q=2$, б) $q=3$, в) $q=5$, г) $q=9$, д) $q\to\infty$.

Распределение $|\gamma'^k|$ по всем системам скольжения монокристалла для $q = 2, 3, 5$ и 9 показано на рис.1, а-г. На рис.1, д для сравнения показан случай единичного скольжения, соответствующего течению на грани многогранника Бишопа-Хилла согласно закону Шмида. Параметр q управляет относительным распределением сдвигов; при увеличении q уменьшается количество фактически действующих систем скольжения, а деформация концентрируется по системам с наибольшими приведенными напряжениями. В пределе при $q \to \infty$ активны только системы скольжения с максимальным приведенным напряжением.

Сделаем обобщение модели на случай изотропного упрочнения. Примем закон течения в форме

$$\epsilon = g\,\nabla\phi'(\boldsymbol{s})\;\nabla\phi'(\boldsymbol{s})\,\dot{s}, \quad \phi'(\boldsymbol{s}) = r_{cr}, \quad d(\phi'(\boldsymbol{s}) - r_{cr}) = 0, \tag{18}$$

где g – функция упрочнения. Из последнего условия системы (18) получим

$$\nabla\phi'(\boldsymbol{s})\,\dot{s} = \nu(q)\dot{\tau}_{cr}. \tag{19}$$

Умножая $(18)_1$ скалярно на $\boldsymbol{s}$, используя критерий $(18)_2$ и равенство (19), получим

$$\boldsymbol{s}\boldsymbol{\epsilon} = g\;r_{cr}\;\nu(q)\;\dot{\tau}_{cr}. \tag{20}$$

Согласно (1) и (3) $\boldsymbol{s}\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\tau}_s\boldsymbol{\gamma}$; поскольку $\boldsymbol{\tau}_s$ соответствует $\boldsymbol{\gamma}$ и доставляет равенство в (A1), то (20) приводится к виду

$$\psi(\boldsymbol{\gamma}) = g\;\nu(q)\;\dot{\tau}_{cr}. \tag{21}$$

Считая известным закон упрочнения $\tau_{cr}(\psi(\boldsymbol{\Gamma}))$, где $\boldsymbol{\Gamma}$ есть вектор сдвигов (не скоростей сдвигов !), получим $d\tau_{cr} = \tau'_{cr}\;d\psi(\boldsymbol{\Gamma})$ (здесь символ "$'$" обозначает производную).

При условии пропорционального деформирования $d\psi(\boldsymbol{\Gamma}) = \psi(d\boldsymbol{\Gamma})$ и из (21) может быть найден вид функции упрочнения

$$g = r_{cr}^{\prime -1}. \tag{22}$$

Заметим, что аналогичный закон был сформулирован в работе [2] для рассматривавшегося там потенциала.

В заключение, не приводя формулировок, заметим, что рассматривая упруго-иде- ально-пластическую среду, где в качестве упругих приняты обратимые деформации, и строя типовым способом определяющие соотношения, получим модель, обладающую рядом достоинств. Во-первых, критерий в рамках такой модели будет иметь естественный энергетический смысл, а во-вторых, при достижении текучести будет отсутствовать излом направления деформирования, что достигнуто в рамках настоящей работы выбором эквипотенциалей обратимых деформаций, подобных поверхности текучести.

Литература

1. Taylor G.I. B *Timoshenko Anniversary Volume.* - New York: Macmillan, 1938. - p.218.
2. Bishop J.F.W., Hill R. *Phil. Mag. ser. 7.* - 1951, v.42. - p.414.
3. Bishop J.F.W., Hill R. *Phil. Mag. ser. 7.* - 1951, v.42. - p.1298.
4. Bishop J.F.W. *Phil. Mag. ser. 7.* - 1953, v.44. - p.51.
5. Hill R. *J. Mech. Phys. Solids.* - 1987, v.35. - p.23.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* - М.: Наука, 1972.

Приложение

Приведем необходимые сведения из теории непрерывных линейных функционалов на нормированных пространствах [6], дополняющие изложенную в работе [5] теорию.

Пусть $\mathcal{A}_n$ - исходное нормированное пространство с нормой $\phi(\cdot)$, а $\mathcal{A}_n^*$ - пространство непрерывных линейных функционалов на $\mathcal{A}_n$ с нормой

$$\psi(\boldsymbol{\eta}) = \max\ \boldsymbol{\eta\xi}, \qquad \phi(\boldsymbol{\xi}) = 1, \qquad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{A}_n^*, \tag{A1}$$

называемое сопряженным ($\boldsymbol{\eta\xi}$ обозначает значение функционала $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{A}_n^*$, действующего на элемент $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{A}_n$). Данные пространства в таком случае оказываются взаимно сопряженными, то есть по образцу (A1) для $\phi(\cdot)$ может быть записано аналогичное двойственное равенство. Из (A1) или двойственного равенства следует неравенство

$$\boldsymbol{\eta\xi} \leq \phi(\boldsymbol{\xi})\psi(\boldsymbol{\eta}), \tag{A2}$$

справедливое для любых $\boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\xi}$. Далее в работе расположенные рядом векторы (тензоры) из сопряженных пространств будут символизировать значение функционала на заданном элементе, подобно как в только что рассмотренном случае.

Всегда существует элемент $\boldsymbol{\xi}$, доставляющий значение норме заданного $\boldsymbol{\eta}$ согласно (A1). Будем называть все такие $\boldsymbol{\xi}$ сопряженными заданному $\boldsymbol{\eta}$. (Подобным образом можно рассмотреть элементы $\boldsymbol{\eta}$, сопряженные заданному $\boldsymbol{\xi}$). Очевидно, что сопряженные элементы доставляют равенство в (A2). В случае гладкости и строгой выпуклости сферы $\phi(\boldsymbol{\xi}) = 1$ сопряженный элемент $\boldsymbol{\xi}$ единственный и находится из системы

$$\boldsymbol{\eta} = \lambda \, \nabla\phi(\boldsymbol{\xi}), \qquad \phi(\boldsymbol{\xi}) = 1, \tag{A3}$$

где λ – неопределенный скалярный множитель, а ∇ символизирует градиент. Отметим, что сфера $\psi(\boldsymbol{\eta}) = 1$ в таком случае также гладкая и строго выпуклая и единственный сопряженный $\boldsymbol{\xi}$ элемент $\boldsymbol{\eta}$ находится из подобной двойственной системы.

Пусть подпространство $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_n$, тогда подпространство $\mathcal{A}_k^* \subset \mathcal{A}_n^*$; норму $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{A}_k$, определенную согласно (A1), обозначим $\psi_o(\cdot)$. Функционал $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{A}_n^*$ называется продолжением $\boldsymbol{\eta}_o \in \mathcal{A}_k^*$, если $\boldsymbol{\eta\xi} = \boldsymbol{\eta}_o\boldsymbol{\xi}$ для любых $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{A}_k$. Всегда существует продолжение $\boldsymbol{\eta}$ функционала $\boldsymbol{\eta}_o$ на все пространство $\mathcal{A}_n^*$ с сохранением (точнее, без увеличения) его нормы, то есть $\psi_o(\boldsymbol{\eta}_o) = \psi(\boldsymbol{\eta})$. В случае гладкости и строгой выпуклости сферы $\phi(\boldsymbol{\xi}) = 1$ в $\mathcal{A}_n$ такое продолжение единственно. Очевидно, что справедлив и двойственный аналог теоремы существования.