УДК 539.3

Давыдов М.Г.

# ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПОНЯТИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ДВУМ МЕРАМ В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

*Abstract*

*The resalts of the theory of stability for distributedsystems are used for studying the stability of deformation processes. Stability definition for elasto-plastic process at finite time interval with respect to two metrics is formulated. The conditions of the theorem similar to that known in the theory of motion stability are considered. Stability criterion followed from energy proposition was obtained from the condithions of mentioned theorem.*

Использование при анализе устойчивости упругопластических процессов результатов, накопленных к настоящему времени в теории устойчивости систем с распределенными параметрами, имеет определенные перспективы. Это связано, в первую очередь, с тем, что, в теории устойчивости движения, как и в теории пластичности, ключевым является понятие процесса. Подчеркнем, что в последнем случае речь идет о квазистатических процессах с соответствующей историей деформации в каждой материальной частице рассматриваемого тела. Исследование упругопластической устойчивости при неоднородном и непропорциональном докритическом деформировании предполагает прослеживание развития процессов деформации при пошаговом решении задачи. Потеря устойчивости соответствует момент коренного изменения свойств рассматриваемой упругопластической системы, накопившегося в ходе предшествующей деформации.

Воспользуемся некоторыми положениями теории устойчивости на конечном интервале времени систем с распределенными параметрами [1]. Весь процесс нагружения будем представлять в виде последовательности связанных между собой интервалов, на каждом из которых устойчивость исследуется отдельно. Роль времени здесь играет параметр нагружения. Интегральной мере указанных процессов придадим энергетический смысл. Указание на место предложенного подхода в ряду известных в теории упругопластической устойчивости дано в работе [2].

Исследуем устойчивость равновесия и устойчивость процесса упругопластического деформирования на конечном интервале времени $[t_1, T]$ некоторого тела, занимавшего в отсчетной конфигурации объем $\mathring{V}$, ограниченный поверхностью $\mathring{S}$. Единичный вектор внешней нормали к $\mathring{S}$ обозначим $\mathring{N}$. Поскольку на уровень докритических деформаций не накладывается ограничений, рассматриваемая задача относится к проблемам геометрически нелинейной теории пластичности. Нагружение не предполагается пропорциональным. Указанную задачу сформулируем в терминах отсчетной конфигурации. Пусть $x^{\circ}(t)$ - поле перемещений от отсчетной конфигурации - основной, невозмущенный процесс деформирования, вызванный приложенной на части границы $\mathring{S}_T$ нагрузкой $T^{\circ} = T(x^{\circ}(t))$ и заданным полем перемещений на $\mathring{S}_u (\mathring{S} = \mathring{S}_T \cup \mathring{S}_u)$. Полагаем, что объемные силы отсутствуют. Для оценки устойчивости равновесия рассмотрим также возмущенный процесс $x(t)$, порожденный отклонениями от основного в начальный для данного интервала момент времени $t_1$. Процесс $x(t)$ удовлетворяет на $\mathring{S}_u$ тем же кинематическим граничным условиям, что и $x^{\circ}(t)$. Возмущенный процесс $x(t)$, как и основной $x^{\circ}(t)$, является равновесным. Используя обозначения, принятые в монографии [3], для определения поля $x(t)$, $t \in [t_1, T]$ запишем уравнения задачи нелинейной теории пластичности в терминах отсчетной конфигурации:

$$\mathring{\nabla} \cdot \mathcal{P}[x(t), R_o] = 0, \qquad R_o \in \mathring{V}; \qquad (1)$$

$$\mathring{N} \cdot \mathcal{P}[x(t), R_o] = T(x(t), R_o), \qquad R_o \in \mathring{S}_T; \qquad (2)$$

$$\mathcal{P} = \mathcal{L} : \mathring{\nabla}\mathbf{v} + \mathcal{R}, \qquad R_o \in \mathring{V} \cup \mathring{S}; \qquad (3)$$

$$x(t, R_o) = \int_0^t v(\tau, R_o)\,d\tau \ , \qquad R_o \in \mathring{V} \cup \mathring{S}; \qquad (4)$$

$$x(t, R_o) - x^{\circ}(t, R_o) = 0 \ , \qquad R_o \in \mathring{S}_u, \qquad (5)$$

где $\mathcal{P}$ – первый (несимметричный) тензор напряжений Пиола-Кирхгофа, тензоры четвертого ранга $\mathcal{L} = \mathcal{L}[\mathring{\nabla}x, \mathring{\nabla}v, R_o, \ldots]$ и второго ранга $\mathcal{R} = \mathcal{R}[\mathring{\nabla}x, \mathring{\nabla}v, R_o, \ldots]$ являются функционалами предшествующей деформации. В виду ограниченности объема работы вопросы, связанные с обоснованием определяющих соотношений (3), рассматриваться не будут.

Для формулировки определения устойчивости по двум мерам определим на классе смещений $u(t) = x(t) - x^{\circ}(t)$ в фиксированный момент времени $t \in [t_1, T]$ меру различия процессов $x(t)$ и $x^{\circ}(t)$ [2]:

$$\rho[u(t)] = \int_{\mathring{V}} \int_0^{u(t)} \mathcal{P} : \mathring{\nabla}(du)^{T}\, d\mathring{V} - \int_{\mathring{S}_T} \int_0^{u(t)} \mathbf{T} \cdot du \, d\mathring{S}, \qquad (6)$$

а для оценки возмущения в начальный момент времени $t_1$ меру

$$d(u(t_1)) = \left[ \int_{\mathring{V}} u(t_1) \cdot u(t_1) + a \mathring{\nabla} u(t_1) : \mathring{\nabla} u(t_1) ] \, d\mathring{V} \right]^{1/2}, \quad a > 0, \quad (7)$$

Заметим, что приводимые далее положения относятся как к устойчивости равновесия, так и к устойчивости процесса деформирования. На особенностях исследования устойчивости процесса упругопластического деформирования остановимся ниже.

Функционал $\rho[u(t)]$ может служить мерой, поскольку считаем, что работа возмущающих сил на соответствующих им ежемгновенных возмущения $u(t)$ положительна. Используя уравнения (1),(2) и соотношение (5), несложно показать, что указанная работа равна правой части выражения (6). Кроме того, $\rho[0] \equiv 0$.

Определение. Невозмущенный процесс $x^{\circ}(t)$ называется устойчивым на отрезке $[t_1,T]$ по мерам $\rho$ и $d$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon,t_1)>0$ такое, что для любого возмущенного процесса $x(t)$, удовлетворяющего системе уравнений (1)-(5), из условия

$$d(u(t_1)) \le \delta(\varepsilon,t_1) \tag{8}$$

для любого $t\in[t_1,T]$ следует

$$\rho[u(t)] < \varepsilon. \tag{9}$$

Одним из ключевых вопросов в использовании для исследования устойчивости второго метода А.М. Ляпунова является выбор функционала Ляпунова. В настоящей работе в качестве такого функционала примем $\rho[u(t)]$.

Функционал $\rho[u(t)]$ является определенно положительным, поскольку служит мерой. Далее будем предполагать, что $\rho[u(t)]$ является непрерывным по мере $d$ при $t=t_1$, то есть для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что оценка $|\rho| < \varepsilon$ выполняется при $d < \delta(\varepsilon)$ и $t=t_1$. И наконец, функционал $\rho[u(t)]$ является невозрастающим в силу уравнений краевой задачи для возмущенного процесса деформирования. Действительно, используя, что поверхностные силы $T$, а значит и напряжения $\mathcal{P}$ не зависят явно от времени, и приняв обозначения $du/dt = v-v^{\circ}=w$, по правилу Лейбница получим

$$d\rho/dt = \int_{\mathring{V}} \mathcal{P}:\mathring{\nabla}w^{T}d\mathring{V} - \int_{\mathring{S}_T} T\cdot w d\mathring{S} = 0. \tag{10}$$

Последнее следует из теоремы о дивергенции, уравнений (1), (2) и условия (5).

Таким образом, существование функционала Ляпунова $\rho[u(t)]$, имеющего указанные свойства, обеспечивает выполнение условий теоремы об устойчивости [1]. Критерий устойчивости дает одно из достаточных условий указанной теоремы: свойство положительной определенности $\rho$ обеспечивается выполнением условия

$$\rho[u(t)] > \varepsilon > 0, \quad \forall t\in[t_1,T] \tag{11}$$

и теряется, в частности, если имеет место равенство

$$\rho[u(\tau_{cr})]=0 \quad ,t_1\le \tau_{cr}\le T, \tag{12}$$

где $\tau_{cr}$ соответствует моменту потери устойчивости.

Условие (11) аналогично достаточному условию устойчивости, следующему из известной теоремы Лагранжа, обобщение которой предложено А.А.Мовчаном при исследовании устойчивости сплошных сред [4].

Рассмотрим устойчивость процесса деформирования. Следуя работе [5], с неустойчивостью в этом случае будем отождествлять возможность неединственного продолжения исследуемого, невозмущенного процесса деформирования $x^0(t)$. Обозначим $\Delta x^0$ – основное продолжение процесса $x^0(t)$. Моменту бифуркации процесса $\tau_{cr}$ соответствует [5] появление из той же точки процесса $x^0(t)$ другого, побочного продолжения $\Delta x\neq\Delta x^0$, являющегося началом возмущенного процесса $x(t)$. Введенное выше поле смещений $u(t)$ будет характеризовать различие указанных продолжений: $u=\Delta x-\Delta x^0$. Мера различия возмущенного и невозмущенного процессов (6) в этом случае будет описывать различие продолжений и с учетом того, что возмущенный и невозмущенный процессы до момента исследования на устойчивость совпадали, может быть приведена к следующей форме

$$\rho[u(t)] = \int\limits_{\mathring{V}} \int\limits_{0}^{u} \Delta\mathcal{P} : \mathring{\nabla}(du)^{T} d\mathring{V}, \qquad (13)$$

Здесь $\Delta\mathcal{P}$ – изменение поля напряженной при продолжении процесса. При записи (13) было использовано, что усилия на части поверхности $\mathring{S}_T$ и кинематические условия на $\mathring{S}_u$ считаются одинаково меняющимися в каждом из указанных продолжений.

В записи меры начальных возмущений (7) момент времени $t_1$ соответствует тому моменту, в который исследуется устойчивость процесса деформирования. Момент нагружения, соответствующий неединственности продолжения $x^{\circ}(t)$, есть $\tau_{cr}$. Уравнения задачи бифуркации, нетривиальное решение которой соответствует указанному моменту, в рамках гипотезы равноактивной бифуркации [5] имеют следующий вид:

$$\mathring{\nabla}\cdot\Delta\mathcal{P}[x^{\circ}+\Delta x, R_{o}] = 0, \quad R_{o}\in\mathring{V}; \qquad (14)$$

$$\mathring{N}\cdot\Delta\mathcal{P}[x^{\circ}+\Delta x, R_{o}] = 0, \quad R_{o}\in\mathring{S}_{T}; \qquad (15)$$

$$\Delta\mathcal{P} = \mathcal{L} : \mathring{\nabla}W \quad , \quad R_{o}\in\mathring{V}\cup\mathring{S}; \qquad (16)$$

$$u(\tau_{cr}) = \int\limits_{0}^{\tau_{cr}} W(\tau)d\tau, \quad R_{o}\in\mathring{V}\cup\mathring{S}; \qquad (17)$$

$$\Delta x(R_{o}) - \Delta x^{\circ}(R_{o}) = 0, \quad R_{o}\in\mathring{S}_{u}. \qquad (18)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае условие, аналогичное условию (10) при анализе устойчивости равновесия, следует из уравнений (14), (15) и соотношения (18). Некоторые иллюстрации использования сформулированного критерия устойчивости упругопластических процессов приведены в работе [2].

## Литература

1. Сиразетдинов Т.К. Устойчивость систем с распределенными параметрами. - Новосибирск.: Наука, 1987. 232 с.

2. Давыдов М.Г. О развитии энергетического подхода к исследованию устойчивости процесса упругопластического деформирования // Математ. моделир. систем и проц. - Пермь, ПермПИ. - 1992, N1(1). - С. 4-19.

3. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986. 232 с.

4. Мовчан А.А. Об устойчивости движения сплошных сред. Теорема Лагранжа и ее обраще // Инженерный сборник. -1960. -Т.29. -С.3 -20.

5. Клюшников В.Д. Устойчивость упруго-пластических систем. - М.: Наука, 1980. 240 с.

Пермский государственный технический университет