

В.Г.Захаров, П.Г.Фрик

**ПРИМЕНЕНИЕ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА К ЗАДАЧАМ ИССЛЕДОВАНИЯ
ЗАГРЯЗНЕНИЯ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ**

Abstract

Recently a new type of functional basis has been introduced in analysis, wavelets, which permit an analysis both in physical space and in scale space. A short review of main properties of wavelet-transform is done. The method is applied to data of atmosphere pollution. The choice of best basis to obtain a minimal number of basis functions is discussed.

Среди задач по метеорологическим аспектам загрязнения атмосферы наибольший интерес представляют вопросы краткосрочного и долгосрочного прогноза состояния окружающей среды. Задачи прогноза требуют построения модели сложной нелинейной системы, зависящей как от многочисленных метеорологических, так и техногенных факторов. В этой связи большое значение приобретают исследования закономерностей пространственно-временного распределения концентраций примесей, что стимулирует в свою очередь использование разнообразных методов для анализа аэрометрических данных. Среди прочих используется и спектральный анализ, но его возможности в таких задачах весьма скромны и сводятся к выявлению достаточно очевидных периодических составляющих, соответствующих суточным, недельным или годовым циклам [2]. На практике встречаются ситуации, когда чередуются различные типы суточной изменчивости концентраций и необходимо разделить соответствующие временные интервалы, либо требуется выделить разовые выбросы, происходящие на фоне периодических и квазипериодических сигналов. При построении математической модели процесса заманчиво иметь базис, подстраивающийся под текущую структуру сигнала.

Альтернативой фурье-анализу становится возникший совсем

недавно математический аппарат, названный вейвлет-анализом и уже успешно конкурирующий с анализом Фурье в таких областях, как обработка и синтез сигналов и изображений, распознавание образов, исследование функциональных операторов и сложных многомерных полей, изучение турбулентности и др. В основе вейвлет-анализа лежит представление исследуемой функции по базису, каждая функция которого характеризует как определенную временную (пространственную) частоту, так и место ее локализации во времени (пространстве). Это достигается за счет выбора специальных функций - вейвлетов (wavelet - небольшая волна, рябь), локализованных как в физическом пространстве, так и в пространстве частот и получаемых друг из друга путем масштабного преобразования и сдвига.

Идеи использования функций, попадающих под определение вейвлета, высказывались в разное время разными авторами и восходят по сути к работам Хаара 1900 года, но целенаправленное развитие теории вейвлетов началось после работ А. Гроссмана и Ж. Морле [1] (1984г.), стимулированных проблемами обработки результатов сейсмических наблюдений. К настоящему времени число статей по вейвлетам превысило 1000, имеются обзоры [2] и монографии [6,12]. К сожалению, вейвлет-анализ мало известен в нашей стране, хотя после работы Зиминой [3], предложившего для описания турбулентности иерархический базис (фактически вейвлет-базис), еще до появления теории вейвлетов была выполнена большая серия работ, в которых система разномасштабных функций использовалась не только для анализа, но и для моделирования нелинейных процессов в развитой турбулентности. (Обзор этих работ см. в [4,8])

Цель данной статьи состоит в том, чтобы, кратко изложив основные идеи вейвлет-анализа, рассмотреть возможности его применения к задачам исследования аэрометрических данных. Особое внимание уделяется проблеме выбора базиса, оптимального с точки зрения описания системы с помощью минимального числа функций.

ВЕЙВЛЕТЫ. Любая вейвлет-функция $\psi_{a,b}$ данного семейства получается из единственной "материнской" функции ψ путем сжатия (растяжения) и сдвига:

$$\psi_{a,b} = a^{-1/2} \psi(a^{-1}(x - b)) \quad (1)$$

где параметр $a \in \mathbb{R}^+$ - масштабный множитель, отвечающий за ширину вейвлета и $b \in \mathbb{R}$ - параметр сдвига, соответствующий положению вейвлета. Таким образом, все функции базиса должны быть самоподобны и, в частности, имеют постоянное число осцилляций. Благодаря этому условию, вейвлет-преобразование дает хорошее пространственное разрешение при малых масштабах и хорошее частотное разрешение при больших.

С формальной точки зрения семейство вейвлетов может строиться на основе любой функции ψ , удовлетворяющей условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0. \quad (2)$$

На практике вейвлет должен также быть хорошо локализован как в физическом пространстве, так и в пространстве частот. Для этого достаточно, чтобы функция ψ была сконцентрирована в некоторой конечной области и была достаточно гладкой. Специфика локализации различных функций в физическом и Фурье-пространствах показана на рис. 1.

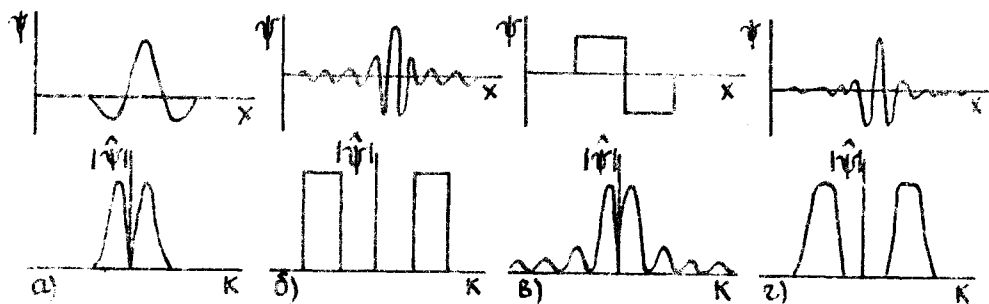


Рис. 1 (а) Вейвлет мексиканская шляпа; (б) функция Литтлвуда-Пейли; (в) функция Хаара; (г) вейвлет Мейера.

Необходимо отметить особенности вейвлет-преобразования, выгодно отличающие его от преобразования Фурье. Последнее распределяет сингулярные возмущения по всему спектру частот, тем самым делая очень трудным или даже невозможным изучение локальных свойств сигнала из его фурье-образа. Если эти возмущения имеют случайный характер, то их практически невозможно отфильтровать. Вейвлет-преобразование сохраняет локальность представления сигнала и позволяет локально его и восстановить. Возможно реконструировать только часть сигнала или выделить вклад определенного масштаба. Если вейвлет-коэффициенты подвержены случайным ошибкам, они будут действовать на реконструируемый сигнал локально вблизи положения возмущения. Свойства вейвлет-анализа обуславливают его эффективность для выделения в сигнале непериодических и квазипериодических структур различного временного и/или пространственного масштаба.

НЕПРЕРЫВНОЕ И ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ. Непрерывное вейвлет-преобразование $w(a, b)$ функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ есть

$$w(a, b) = (\psi_{a,b}, f) = \int_{-\infty}^{\infty} a^{-1/2} e^{-i\pi \left(\frac{x-b}{a}\right)^2} f(x) dx, \quad (3)$$

Условие (3) гарантирует обратимость преобразования: должна существовать по крайней мере одна формула для точной реконструкции сигнала из его вейвлет-образа. В качестве примера функции, используемой для непрерывного преобразования, приведем вейвлет Марра (мексиканская шляпа), который является второй производной функции Гаусса: $\psi(x) = (1-x^2) \exp(-x^2/2)$ (рис. 1).

Характерной особенностью непрерывного преобразования является его избыточность, вытекающая из того, что пространство функций одного переменного отображается в двумерное пространство «масштаб-координата», и проявляющаяся в наличии корреляции между вейвлет-коэффициентами. Непрерывное преобразование эффективно применяется для анализа многомерных полей, обработки изображений и звуковых сигналов. Избыточность делает его устойчивым к возможным случайным возмущениям, однако корреляции

между коэффициентами могут привести к неверной интерпретации результатов преобразования исследуемого сигнала. Кроме того, его реализация требует значительных вычислительных ресурсов.

В случае дискретного вейвлет-преобразования масштабный параметр a и параметр сдвига b принимают дискретные значения:

$a = a_0^m$, $b = nb_0 a_0^m$, ($m, n \in \mathbb{Z}$; $a_0 > 1$; $b_0 > 0$). Тогда

$$\psi_{m,n}(x) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}(x - nb_0 a_0^m)) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}x - nb_0).$$

Дискретное вейвлет-преобразование позволяет избавиться от избыточности непрерывного благодаря существованию функций, образующих полные ортонормированные базисы пространства $L^2(\mathbb{R})$ в случае, если $a_0 = 2$ и $b_0 = 1$. Кроме того, в рамках дискретного преобразования при выполнении некоторых дополнительных требований удается построить быстрый алгоритм получения вейвлет-коэффициентов - так называемый анализ с переменным разрешением (multiresolution analysis) [10].

Анализ с переменным разрешением основывается на рассмотрении последовательности вложенных друг в друга аппроксимирующих функциональных пространств

$$\dots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots, \quad (4)$$

таких, что

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R}), \quad \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}. \quad (5)$$

Дополнительным требованием, непосредственно связанным с понятием переменного разрешения, является то, что все пространства являются масштабированной версией центрального пространства V_0 , т.е.

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_0. \quad (6)$$

И наконец, требуется существование функции $\phi \in V_0$, такой, что

множество $\langle \phi_{0,n} = \phi(x - n) \rangle; n \in \mathbb{Z}$ образует ортонормированный базис в V_0 . Тогда $\langle \phi_{j,n}(x) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}x - n) \rangle; n \in \mathbb{Z}$ образует ортонормированный базис для V_j , при любых $j \in \mathbb{Z}$. Функцию ϕ называют масштабной функцией.

Таким образом, подпространство V_j является подпространством функций, аппроксимирующих $L^2(\mathbb{R})$ с разрешением 2^j и переход от пространства V_{j-1} к пространству V_j соответствует переходу к большим масштабам, т.е. огрублению функции с естественной потерей некоторой информации, содержащейся в исходной функции.

Основная идея анализа с переменным разрешением состоит в построении алгоритма, использующего разность информации, содержащейся в различных масштабах. Для любого $j \in \mathbb{Z}$, определяется подпространство W_j — ортогональное дополнение V_j в V_{j-1} :

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j, \quad V_j \perp W_j \text{ и } W_j \perp W_{j'}, \text{ при } j \neq j'. \quad (7)$$

Кроме того, из свойства (5) следует, что $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$, где все W_j ортогональны друг другу. Очевидно, подпространствам W_j также присуще масштабное свойство (6). Для любой последовательности замкнутых подпространств, удовлетворяющих условиям (4-6), существует вейвлет-функция ψ , такая, что множество $\langle \psi_{j,k} = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k) \rangle; k \in \mathbb{Z}$ образует ортонормированный базис подпространства W_j для любого j . Полное множество $\langle \psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z} \rangle$ есть ортонормированный базис для $L^2(\mathbb{R})$.

Дополнительное упрощение, введенное Малла [10] позволяет вычислять коэффициенты разложения исследуемой функции, используя дискретные фильтры h_n и g_n . Фильтр h_n можно получить из вложенности подпространств $V_n \subset V_{-1}$ и того, что $\phi_{-1,n}$ — ортонормированный базис подпространства V_{-1} : $\phi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi_{-1,n}$, отсюда $h_n = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle$. Ортонормированность масштабных функций налагает на h_n условие: $\sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n h_{n+2k} = \delta_{k0}$ (δ_{k0} — символ Кронекера). Другой фильтр g_n связан с вейвлет-функцией ψ и вытекает из вложенности подпространств $W_0 \subset V_{-1}$: $\psi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \phi_{-1,n}$, причем существует простая связь между h_n и g_n : $g_n = (-1)^n h_{-n+1}$ или иногда $g_n = (-1)^n h_{-n+1+2N}$ с подходящим выбором $N \in \mathbb{Z}$.

Анализ с переменным разрешением приводит к быстрой иерархической схеме для вычисления вейвлет-коэффициентов исследуемой функции f (10).

$$c_k^j = \langle f, \phi_{j,k} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-zk} \langle f, \phi_{j-1,n} \rangle \quad (9)$$

$$d_k^j = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n-zk} \langle f, \psi_{j-1,n} \rangle \quad (10)$$

Начиная с коэффициентов разложения c_k^0 исследуемого сигнала для самого мелкого масштаба (самого высокого разрешения) легко получить, используя (9), коэффициенты c_k^j ($j = 1, 2, 3, \dots$), а по формулам (10) и вейвлет-коэффициенты d_k^j ($j = 0, 1, 2, \dots$). Алгоритм можно рассматривать как вычисление последовательно огрубляемых аппроксимаций f , определяемых коэффициентами c_k^j , с одновременным учетом информации, теряемой при переходе к более крупному масштабу. Эта информация и отражается в вейвлет-коэффициентах d_k^j . На практике наименьший возможный масштаб определяется числом дискретных значений l анализируемого сигнала (удобно, чтобы $l = 2^j$, $j \in \mathbb{Z}$). При переходе от данного масштаба к следующему число вейвлет-коэффициентов уменьшается в два раза и процесс останавливается после конечного числа уровней. Так как масштабная функция хорошо локализована в пространстве, то в качестве коэффициентов $c_k^0 = \langle f, \phi_{0,k} \rangle$ можно взять сами дискретные значения исходной функции.

В терминах функциональных пространств этот алгоритм соответствует разложению пространства V_0 на сумму ортогональных подпространств вейвлет-функций последовательно огрубляемых масштабов: $V_0 = W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_{j-1} \oplus W_j \oplus V_j$.

Хотя условия (4-5) кажутся весьма сложными, предложено достаточно большое число функций, удовлетворяющих требованиям анализа с переменным разрешением, например, вейвлеты Майера, имеющие ограниченный спектр в фурье-пространстве, вейвлеты Баттл-Лемари, основанные на сплайн-функциях, и вейвлеты Дробани

(6) - гладкие функции отличные от нуля лишь на конечном интервале, поэтому соответствующие им фильтры h и g имеют конечное число ненулевых членов. Приведем значения коэффициентов фильтров для функции Хаара: $h_0 = h_1 = 2^{-1/2}$, и для функции Добеши 3-го порядка: $h_0 = 0.33267055$, $h_1 = 0.80689151$, $h_2 = 0.45987750$, $h_3 = -0.13501102$, $h_4 = -0.08544127$, $h_5 = 0.03522629$.

ВЕЙВЛЕТ-ПАКЕТЫ. Описанный выше алгоритм оставляет открытым вопрос выбора самого базиса, ответ на который обычно не однозначен и зависит от характера исследуемого сигнала. При анализе аэрометрической информации весьма перспективным может оказаться использование предложенного недавно Вискерхаузером [13] метода вейвлет-пакетов. Пакеты расширяют класс базисных функций и предоставляют целые "библиотеки" базисов, которые подстраиваются под конкретные масштабные и частотные особенности анализируемого сигнала. Грубо говоря, вейвлет-пакет есть множество функций из пространства $L^2(\mathbb{R})$ с модулированными колебаниями, хорошо локализованных как в пространстве, так и по частоте. С каждой функцией можно связать три параметра: масштаб, местоположение и частоту. Семейство вейвлет-пакетов получается посредством растяжения, переноса и модуляции "материнского" вейвлета.

Построение пакетов можно осуществить с использованием тех же дискретных фильтров h и g , с помощью которых выполняется анализ с переменным разрешением. Определим последовательность функций:

$$\Phi_{2n}(x) = 2^{1/2} \sum_j h_j \Phi_n(2x - j) \quad (11)$$

$$\Phi_{2n+1}(x) = 2^{1/2} \sum_j g_j \Phi_n(2x - j) \quad (12)$$

$\Phi_0(x)$ можно отождествить с масштабной функцией ϕ , а $\Phi_1(x)$ - с вейвлет-функцией ψ . Определим функциональное пространство

$$\Omega_n = \{f: f = \sum_j \omega_j \Phi_n(x - j), \omega_j \in \mathbb{R}\}.$$

Тогда множество функций $\Phi_n(x-j)$, $j \in Z$ является ортонормированным базисом пространства Ω_n . Доказано [13], что функции $\Phi_n(x-j)$, $j \in Z$, $n \geq 0$ образуют ортонормированный базис $L^2(\mathbb{R})$. Далее, введем пространство $\delta^k \Omega_n$, получаемое масштабным преобразованием Ω_n :

$$\delta^k \Omega_n = \{f: f = \sum_j \omega_j 2^{k/2} \Phi_n(2^k x - j), \omega_j \in \mathbb{R}\}.$$

Множество функций $\{2^{k/2} \Phi_n(2^k x - j), j \in Z\}$ образует вейвлет-пакет. Из этого пакета функций можно выделить большое число различных ортонормированных базисов пространства $L^2(\mathbb{R})$. Например, если взять в качестве исходной функцию Хаара, то вейвлет-пакет будут образовывать функции Уолша различного порядка. Вейвлет-базис является частным случаем вейвлет-пакет базисов. Соответствующая ему последовательность подпространств имеет вид:

$$\Omega_0 \oplus \Omega_1 \oplus \delta \Omega_1 \oplus \dots \oplus \delta^k \Omega_1 \oplus \dots$$

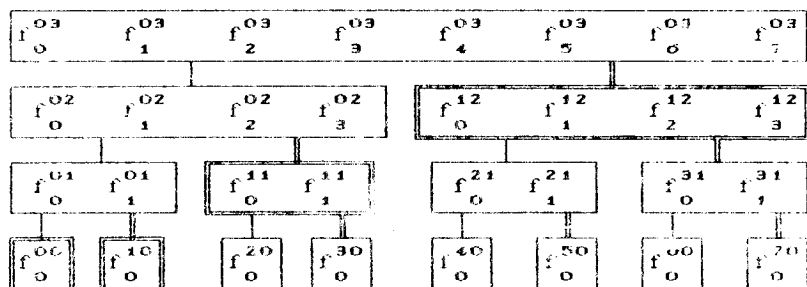
Пусть $f = f(x)$ - функция из пространства $L^2(\mathbb{R})$ и $\{f_p, p \in Z\}$ коэффициенты проекции f на пространство $\delta^L \Omega_0$ самого мелкого масштаба: $f_p = \langle f, 2^{L/2} \Phi_0(2^L x - p) \rangle$. Тогда вводя обозначения $f_p^{nk} = \langle f, 2^{k/2} \Phi_n(2^k x - p) \rangle, p \in Z, 0 \leq k \leq L, 0 \leq n < 2^{L-k}$, получаем рекуррентные соотношения:

$$f_p^{2n,k-1} = \sum_j h_{j-2p} f_j^{nk}; \tag{13}$$

$$f_p^{2n+1,k-1} = \sum_j g_{j-2p} f_j^{nk}. \tag{14}$$

Используя эти соотношения легко получить все возможные коэффициенты f_p^{nk} , $p \in Z$ - соответствует положению базисной функции.

$0 \leq k \leq L$ – масштабу (отметим, что здесь большим k соответствует малые масштабы), $0 \leq n < 2^{L-k}$ – частоте. Коэффициенты разложения удобно представить в виде векторов $\{f_r^{nk}, r \in \mathbb{Z}\}$, организованных в бинарное дерево. Корню дерева соответствует пространство $\mathcal{E}^L \Omega_0$, а потомкам $L-k$ -го поколения – подпространства $\mathcal{E}^k \Omega_n$, $n = 0, \dots, 2^{L-k} - 1$. Алгоритм вычисления векторов коэффициентов можно рассматривать как построение дерева начиная от корня: коэффициенты следующего уровня получаются из предыдущего путем применения соотношений (13) и (14). Ниже приведена схема этой процедуры для восьмиточечного сигнала: одинарная вертикальная линия обозначает применение фильтра h (формула 13), а двойная вертикальная линия – фильтра g (14). Для примера выделены двойной рамкой коэффициенты, соответствующие вейвлет-базису.



Из данного вейвлет-пакета можно выделить очень большое число ортонормированных вейвлет-базисов. Нужно из этого множества базисов выделить наиболее подходящий для разложения данного сигнала. Например, Векерхаузер [13] предложил быстрый алгоритм поиска базиса, минимизирующего некоторую ценовую функцию коэффициентов, например информационную энтропию. С практической точки зрения такой базис минимизирует число существенных коэффициентов (т.е. коэффициентов, которые превосходят некоторое пороговое значение). Базисные функции, соответствующие этим коэффициентам, содержат почти всю информацию о сигнале и могут позволить выделить его характерные моды.

Первый этап этого алгоритма состоит в вычислении ценовой

функции для всех узлов дерева. Затем, проходя дерево снизу вверх, отбрасываем нижележащие ветви, если значение ценовой функции отца меньше суммы ценовых функций сыновей. Тогда для данного сигнала и ценовой функции получается вполне определенный ортонормированный базис.

Для сигнала, представленного в виде $1 = 2^k$ дискретных значений, алгоритм Визерхаузера ищет оптимальный базис из множества, содержащего 2^k различных ортонормированных базисов. Однако этот алгоритм определяет далеко не все возможные базисы, но эффективный способ просмотра полного множества неизвестен. Кроме того, оптимальный базис с точки зрения минимума энтропии не всегда является подходящим для выделения конкретных особенностей сигнала. Например, хорошо идентифицируя главные гармоники сигнала, такой базис может "игнорировать" мелкомасштабную структуру сигнала. Эту проблему можно решать введением некоторых эмпирических требований на вид базиса, например ограничивать максимальный используемый масштаб, или варьировать длину анализируемого сегмента сигнала.

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ. Объем статьи позволяет продемонстрировать возможности вейвлет анализа лишь на нескольких характерных примерах. Первый пример не имеет отношения к аэрометрическим данным, но хорошо демонстрирует возможности подхода (рис.2). Сигнал представляет собой сумму двух периодических составляющих, каждая с линейно меняющейся частотой. В нижней части рисунка приведен сам сигнал, верхняя часть - фазовая плоскость время-частота. Отметим, что наглядное представление результатов вейвлет-преобразования является самостоятельной проблемой. В нашем случае при построении рисунков фазовая плоскость разбивается на прямоугольники ($t_1 = t_2$), соответствующие областям локализации базисных функций. В силу принципа неопределенности прямоугольники имеют равную площадь, ширина прямоугольника характеризует временной интервал, а высота - диапазон частот, интенсивность окраски пропорциональна квадрату коэффициента r_p^{nk} , индексы p и n - определяют координаты центра прямоугольника, а k - его ширину. Ортогональность и полнота

базиса гарантируют, что фазовая плоскость будет покрыта прямоугольниками без перекрытий и пропусков. Базис для данного сигнала выбран из условия минимума энтропии с применением алгоритма быстрого поиска.

Второй пример ближе к проблемам экологии и соответствует сигналу, включающему две гармонические компоненты и три случайных выброса (рис.3б). Причем, если два из них хорошо видны на графике самой функции, то третий, имеющий такую же амплитуду, почти не заметен. В поле вейвлет-представления постоянной частоте соответствует горизонтальная периодическая структура, а локальному выбросу - вертикальная. К сожалению, качество печати не позволяет передать видимую на экране дисплея мелкомасштабную структуру рисунка.

Третий пример касается суточной изменчивости концентрации примеси в атмосфере. Известно [1,2], что для окиси углерода почти во все сезоны наблюдаются два вида суточной изменчивости, либо с одним, либо с двумя максимумами. Сигнал на рис.4 сформирован из фрагментов, точно соответствующих этим двум типам изменчивости, взятым из [1], плавно сменяющих друг друга. Задача состоит в разделении интервала времени, в которые доминирует тот или иной тип зависимостей.

Приведенные примеры лишь иллюстрируют возможности подхода. Остается много проблем как общего плана, связанных с выбором базиса, оптимизацией алгоритмов, представлением результатов, так и специфических, возникающих при работе с аэрометрическими данными. К последним относится в первую очередь проблема пробелов в выборках - замеры на постах наблюдения проводятся, как правило, три раза в сутки, в 7, 13 и 19 часов и не проводится в ночное время, а также в выходные и праздничные дни. В то же время именно этот аппарат дает надежду на выделение из достаточно сложных временных последовательностей данных. Это могут быть как отдельные метеопараметры или концентрации примесей, так и интегральные показатели состояния атмосферы характерных временных структур с целью их использования для дальнейшего прогноза состояния системы.

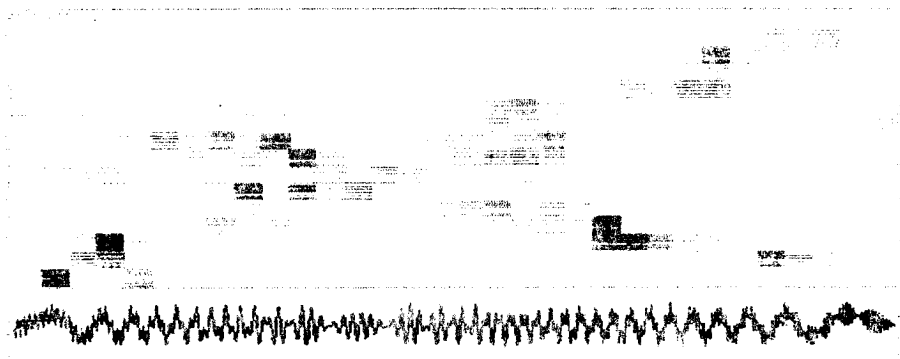


Рис. 2

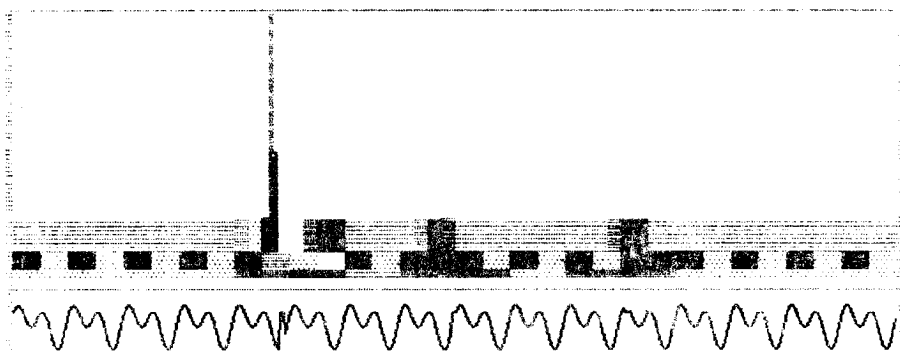


Рис. 3

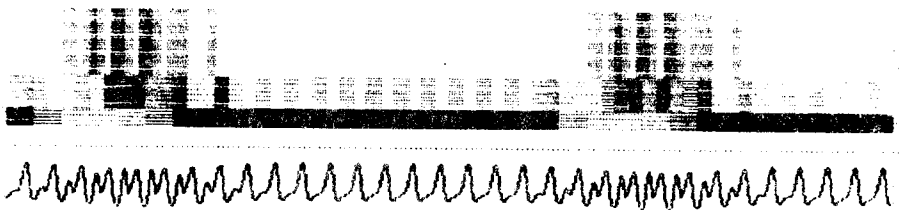


Рис. 4

Литература

1. Безуглая Э.Ю. Мониторинг состояния загрязнения атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1986.
2. Берлянд М.Е. Прогноз и регулирование загрязнений атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1985.
3. Зимин В.Д. Иерархическая модель турбулентности // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1981. н. 12. С.1265-1273.
4. Зимин В.Д., Фрик П.Г. Турбулентная конвекция. М.:Наука, 1988.

5. Фрик П.Г. Вейвлет-анализ и иерархические модели турбулентности. - ИМСС Уро РАН. Пермь, 1992.

6. Daubechies I. Ten lectures on wavelets. // *CBMS Lecture Notes Series*. SIAM. 1991.

7. Farge M. Wavelet transform and their applications to turbulence. // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1992. N.24 P.395-457.

8. Frick P.G., Zimin V.D. Trans. Int.Conf. "Wavelets, fractals and Fourier transforms: new developments and new applications", Cambridge, Dec.1990. - Oxford Press, 1991.

9. Grossmann A., Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. // *SIAM J. Math. Anal.* 1984 V. 15. N.4 P. 723-736.

10. Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. // *IEEE, Trans. on Pattern Anal. Machine Intell.* 1989. N.2. P.7.

11. Meneveau C. Analysis of turbulence in the orthonormal wavelet representation. // *J. Fluid Mech.* 1991.

12. Meyer Y. *Ondelettes et operateurs*. Paris: Hermann. 1990.

13. Wickerhauser M. V. INRIA lectures on wavelet packet algorithms. // *Roquencourt*. Jun. 17-21. 1991. P. 31-99.

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД