УДК 519.2

В.В.Ившин

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ НАДЕЖНОСТИ В МОДЕЛИ "НАГРУЗКА - ПРОЧНОСТЬ" В СЛУЧАЯХ ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА

Abstract

The unbiased estimating of the probabilities of the linear inequalities is the problem useful in many practical applications, such as the complicated technical systems reliability checking in the stress-strength model. The random variables "strength" can have the various distributions laws. In the paper presented the unbiased estimators for P(X<Y) are constructed for the cases of Gamma and Veibull distributions.

Многие статистические задачи, имеющие важное практическое значение, сводятся к нахождению несмещенных оценок вероятностей линейных неравенств. Одна из таких задач, получившая широкое освещение в отечественной и зарубежной литературе, состоит в оценивании надежности функционирования технической системы в модели "нагрузка-прочность" (см. [6], [11]).

Пусть X - "нагрузка", а Y - "прочность" являются случайными величинами, имеющими плотность распределения, принадлежащую некоторому известному параметрическому семейству распределений. Проводится n наблюдений "нагрузки" и r наблюдений "прочности", в результате которых получаются две независимые повторные выборки $X_1, X_2, \dots, X_n$ и $Y_1, Y_2, \dots Y_r$. На основании имеющихся данных требуется получить несмещенные оценки вероятности отказа системы $\hat{P}(Y<X)$ и надежности системы

$$\hat{P}(X<Y) = 1 - \hat{P}(Y<X) \qquad (1)$$

Другая задача, приводящая к той же математической модели, получается, если принять за X время работы функционирующей системы, а за Y время работы контрольной системы, причем, если контрольная система выйдет из строя раньше функционирующей, то возможны нежелательные последствия.

В случае нормального распределения оценки (1) находятся в работах [1], [7], [9], [10], [12]. Несмещенная оценка (1) для усеченного экспоненциального распределения построена в [5]. В работах [3], [4], [8] оценка (1) была обобщена на случай многомерного нормального закона.

В настоящей статье находятся данные оценки в случаях гамма-распределения и распределения Вейбулла, которые часто используются при построении математических моделей для описания функционирования технических систем.

Для нахождения искомых оценок нам понадобится следующая

Лемма. Предположим, что существует несмещенная оценка плотности $p(u/t)=\hat{p}_\theta(u)$ случайного элемента $u\in U$, выраженная через достаточную статистику $t\in T$. Тогда несмещенная оценка для линейного функционала $L(\theta)=\int\limits_U \varphi(u)p_\theta(u)d\nu(u)$, если она существует, дается формулой

$$\hat{L}(\theta)=\int\limits_U \varphi(u)\hat{p}_\theta(u)d\nu(u) \qquad (2)$$

Следствие. Пусть x и y — независимые случайные величины, плотности распределения которых имеют несмещенные оценки $\hat{p}(x)$ и $\hat{p}(y)$ соответственно. Тогда несмещенная оценка вероятности $P(X<Y)$ дается выражением

$$\hat{P}(X<Y) \equiv \iint\limits_{x<y} \hat{p}(x)\hat{p}(y)dxdy. \qquad (3)$$

Случайная величина u имеет гамма-распределение, если ее плотность распределения имеет вид

$$f(u,\theta,p) = \frac{1}{\Gamma(p)\theta^{p}} u^{p-1} e^{-u/\theta}, \ u\geq 0, \qquad (4)$$

где $\theta > 0$, $p > 0$ – известно. Наиболее важным для приложений является случай целого положительного значения известного параметра p. Все дальнейшие построения сделаны для этого случая.

Полной достаточной статистикой в случае неизвестного параметра θ_1, построенной по независимой повторной выборке x_1, $x_2,\ldots,x_n$ из распределения $f(u,\theta_1,p)$ является $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Несмещенная оценка плотности (4), выраженная через достаточную статистику [2] есть

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(np)x^{p-1}(S-x)^{(n-1)p-1}}{\Gamma(p)\Gamma(np-p)S^{np-1}}, & 0 \leq x \leq S, \quad n > 1, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} & \end{cases} \qquad (5)$$

Пусть $T = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ – полная достаточная статистика в случае неизвестного параметра θ_2, построенная по независимой повторной выборке Y_1, $Y_2,\ldots, Y_r$ из распределения $f(y,\theta_2,q)$.

Теорема 1. Единственная несмещенная оценка для вероятности $P(X<Y)$ в случае гамма-распределения, выраженная через достаточные статистики, имеет вид

$$\hat{P}(X<Y) = 1 - \frac{\Gamma(np)\Gamma(rq)}{\Gamma(p)\Gamma(np-p)\Gamma(q)\Gamma(rq-q)} \times \qquad (6)$$

$$\times \sum_{k=0}^{rq-q-1} \frac{(rq_k-q-1)}{rq-k-1} \left[S/T\right]^{rq-k-1} \times \sum_{l=0}^{np-p-1} \frac{(-1)^{k+l}\binom{np-p-1}{l}}{np+rq-2-k-l},$$

если $s<T$. В случае $s\geq T$ следует воспользоваться (1).

<u>Доказательство</u>. Пользуясь следствием из леммы, запишем искомую несмещенную оценку в виде (3) и преобразуем двойной интеграл (3) в повторный в случае $s<T$:

$$\hat{P}(X<Y) = \int_0^s \hat{f}(x)\int_x^T \hat{f}(y)dy dx = \int_0^s \hat{f}(x)J(x)dx. \quad (7)$$

Найдем значение функции $J(x)$:

$$J(x) = C\int_x^T y^{q-1}(T-y)^{rq-q-1}dy =$$

$$= C\int_x^T \sum_{k=0}^{rq-q-1}(-1)^k T^k \binom{rq-q-1}{k} y^{rq-2-k} = \quad (8)$$

$$= 1 - C\sum_{k=0}^{rq-q-1}(-1)^k \binom{rq-q-1}{k}\frac{T^k x^{rq-1-k}}{rq-1-k},$$

где $C = \dfrac{\Gamma(rq)}{\Gamma(q)\Gamma(rq-q)T^{rq-1}}$. При нахождении интеграла мы учли, что значение несмещенной оценки функции распределения в точке T равно единице. Подставив (8) в (7), преобразовав бином в сумму и проинтегрировав, получим (6). Найденная несмещенная оценка единственна в силу полноты достаточных статистик.

Случайная величина u имеет распределение Вейбулла, если ее плотность распределения имеет вид

$$f(u,\theta,p) = p\theta^{-p}u^{p-1}\exp\left\{-(u/\theta)^p\right\}, \quad u \geq 0, \quad (9)$$

где $\theta > 0$, $p > 0$ - известно.

Полной достаточной статистикой в случае неизвестного параметра θ_1, построенной по независимой повторной выборке X_1, $X_2, \ldots, X_n$ из распределения $f(x,\theta_1,p)$ является $S = \sum_{i=1}^{n} X_i^p$. Несмещенная оценка плотности (9), выраженная через достаточную статистику, дается [2] формулой

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{(n-1)p x^{p-1}(S-x^p)^{n-2}}{S^{n-1}}, & 0 \le x \le S^{1/p}, \quad n > 1, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} & \end{cases} \qquad (10)$$

Пусть $T = \sum_{i=1}^{n} Y_i^q$ – полная достаточная статистика в случае неизвестного параметра θ_2, построенная по независимой повторной выборке $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ из распределения $f(y,\theta_2,q)$.

Теорема 2. Единственная несмещенная оценка для вероятности $P(X<Y)$ в случае распределения Вейбулла, выраженная через достаточную статистику, имеет вид

$$\hat{P}(X<Y) = (n-1)p \sum_{l=0}^{r-1} \binom{r-1}{l} \left(\frac{S^{q/p}}{T}\right)^{r-1-l} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^{k+l}\binom{n-2}{k}}{p(n-1-k)+q(r-1-l)} \qquad (11)$$

если $S^{1/p} < T^{1/q}$. Если $S^{1/p} \ge T^{1/q}$ следует воспользоваться (1).

Теорема 2 доказывается аналогично предыдущей.

Возможны случаи, когда X и Y принадлежат различным параметрическим вероятностным семействам. Пусть X имеет распределение $f(x,\theta_1,p)$ вида (4), а Y имеет распределение $f(y,\theta_2,q)$ вида (10). В этом случае единственная несмещенная оценка вероятности $P(X<Y)$, выраженная через соответствующие достаточные статистики, имеет в случае $S < T^{1/q}$ вид

$$\hat{P}(X<Y)=\frac{\Gamma(np)}{\Gamma(p)\Gamma(np-p)}\sum_{l=0}^{r-1}\binom{n-1}{l}\left(\frac{S^{q}}{T}\right)\sum_{k=0}^{np-p-1}\frac{(-1)^{k+l}\binom{np-p-1}{k}}{np-1-k+q(r-1-l)}. \quad (12)$$

Если X имеет распределение Вейбулла, а Y имеет гамма-распределение, то искомая несмещенная оценка в случае $S^{1/p} < T$ дается формулой

$$\hat{P}(X<Y) = 1 - \frac{\Gamma(rq)(n-1)p}{\Gamma(q)\Gamma(rq-q)}\sum_{k=0}^{rq-q-1}\frac{\binom{rq-q-1}{k}\left(\frac{S^{1/p}}{T}\right)^{rq-1-k}}{rq-1-k}\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{n-2}\frac{(-1)^{k+l}\binom{n-2}{k}}{(n-1-l)p+rq-1-k}. \quad (13)$$

При реализации формул (6), (11)-(13) на ЭВМ в случае объемов выборок больше 40-50 могут возникнуть трудности в обеспечении точности вычислений из-за сложения чисел разных порядков.

Литература

1. Воинов В.Г. О несмещенном оценивании P(X<Y) в нормальном случае.// Исследования по математической статистике. VI: Записки научных семинаров ЛОМИ. Наука, Ленинград, 1984, т. 136, с. 5-12.

2. Воинов В.Г., Никулин М.С. Несмещенные оценки и их применения. М., Наука, 1989.

3. Лумельский Я.П., Пенская М.Я. Несмещенное оценивание характеристик случайных величин. // Математическая статистика и

ее приложения. Томский унив., Томск, 1989, с. 114-122.

4. Пенская М.Я. Несмещенное оценивание вероятностей, задаваемых линейными неравенствами. // Применения случайного поиска. Кемеровский унив., Кемерово, 1982, с. 124-132.

5. Beg M. On the estimation of Pr{Y<X} for the two-parameter exponential distribution. // Metrika, 1980, v.27, N 1, p. 29-34.

6. Church J.D., Harris B. The estimation of probability from stress-strength relationship. // Technometrics, 1970, v. 12, p. 49-54.

7. Downtown F. On the estimation of Pr(Y<X) in the normal case. // Technometrics, 1973, v. 15, p. 551-558.

8. Gupta R.D., Guptai R.C. Estimation of Pr(a'x>b'y) in themultivariate normal case. // Statistics, 1990, v. 21, N 1, p. 9[illegible]-97.

9. Reiser B., Guttman I. Statistical inference for Pr{Y<X}: the normal case. // Technometrics, 1986, v. 28, N 3, p. 253-257.

10. Reiser B., Guttman I. A comparison of three point estimators for P (Y<X) in the [illegible]mal case. // Comput. Stat. and Data Anal, 1987., v. 5, N 1, p. 59-66.

11. Reiser B., Guttman I. Sample choice for reliability verification in stress-strength models. // Can. J. Statist. 1989, v. 17, N 3, p. 253-259.

12. Woodward W.A., Kelley G.D. Minimum variance unbiased estimation of P (X<Y) in the normal case. // Technometrics, 1987, v. 19, p. 95-98.

Пермский государственный университет