УДК 519.6

Калмыков А.А., Гайдар В.И.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ.

Abstract

Regularizing algorithm for ill-posed problem of educational measurement is considered. The problem is modelling by means of first kind operator equation.

В статье рассматривается задача оценивания знаний студентов, которую мы предлагаем моделировать операторным уравнением первого рода:

$$Az = u, \qquad (1)$$

определенным в пространстве $L_2(T,\mu)$, здесь T – множество контролируемых учебных элементов, причем о правой части и об операторе A известны лишь приближенные данные (u_δ, δ) и (A_η, η), $\rho(u_\delta, \delta) \le \delta$, $d(A_\eta, \eta) \le \eta$. Оператор $A: L_2(T,\mu) \to L_2(T,\mu)$ моделирует операцию контроля знаний. В уравнении (1) функция $z: T \to R$ моделирует контролируемые знания, а функция $u: T \to R$ является результатом контроля знаний.

Контролируемые знания могут быть представлены /1/, /2/, /3/ в виде логической, продукционной моделей, фреймов и семантической сети. Логическая модель представления знаний /1/ более удобна для постановки и доказательства теорем. Фреймы лучше всего использовать тогда, когда нет достаточно точной априорной информации, так как в построении фреймов используются слоты, при помощи которых можно расширить получаемую информацию о предмете. Семантические сети показывают взаимосвязь элементов предмета. Положительным в продукционной модели представления знаний является простота ее построения и возможность легко сосчитать элементы этой модели. С помощью нее мы можем представить любой учебный элемент. И таким образом, поставить учебному элементу в соответствие число, что позволит знания смоделировать в виде точек гильбертова пространства $L_2(T,\mu)$. Например, продукционная модель понятия "Образ множества" изображается следующим образом /рис.1/.

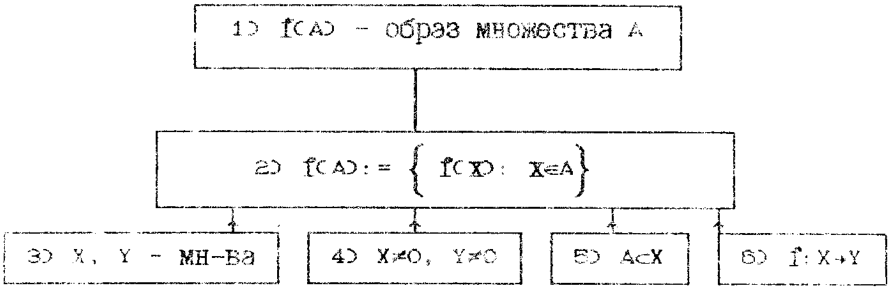

Рис.I.

Здесь 3), 4), 5), 6) - база данных; 2) - условная часть, соответствующая значению "Если ..." в правиле; 1) - заключительная часть, соответствующая значению" ... то" в правиле. Число $z(t)=6$. Оно вычисляется по числу различных элементов модели.

Моделью контролирующей операции является линейный интегральный оператор

$$(AZ)(t) = \int_T k(t,s)Z(s)(d\mu)(s), \quad t\in T, \qquad (2)$$

где T - множество (конечное) всех учебных элементов по теме; $T\in L_2(T,\mu)$; $\tilde{\mu}: T\to[0,+\infty]$ - поточечная мера важности учебных элементов; μ: $P(T)\to[0,+\infty]$ - мера важности учебного материала равна продолжению по аддитивности меры $\tilde{\mu}$); $k: T\times T\to R$ – функция, характеризующая взаимосвязь учебных элементов при контроле; $k(t,s)$ – коэффициент использования учебного элемента $s\in T$ при контроле учебного элемента $t\in T$; $z: T\to R$ – функция, моделирующая контролируемые знания обучаемых (или полные эталонные знания); $z(t)$ – знание учебного элемента $t\in T$; число $z(t)$ в нашей модели равно числу различных продукций в продукционной модели представления знаний. Пусть, например, дано множество $T=\left\{t_k\right\}_{k=1}^{n}$ учебных элементов и $n=3$. Здесь t_1 – лемма Цорна, t_2 – цепь, t_3 – частично упорядоченное множество. Введем поточечную меру важности учебных элементов $\mu: T\to R$. Для каждого класса учебных элементов она определяется неодинаково (зависит от важности учебного элемента). Так, мера какого либо вспомогательного определения может быть равна I. Например, $\mu(t_2)=1$. Мера же основного определения может быть равна двум. Например, $\mu(t_3)=2$. Теоремы тоже можно различать по важности и их меры могут достигать числа 30. Например, $\mu(t_1)=18$. Мера основного примера по теме может равняться 3. Меры же основных практических навыков могут достигать числа 20.

Определим $k: T\times T\to R$ – функцию взаимосвязи учебных элементов при контроле; $k(t,s)$ – коэффициент использования учебного элемента $s\in T$ при контроле учебного элемента $t\in T$. По всей видимости, этот коэффициент будет меньше при контроле определений и больше при контроле теорем и практических навыков. Например, пусть контролируемый учебный элемент t_2 – лемма Цорна. При формулировке этой леммы используются учебные элементы t_2, t_3, поэтому $k(t_1,t_2)=1$. Если бы эти учебные элементы встречались не один, а два или несколько раз, то коэффициент соответственно бы увеличился. При доказательстве же этой леммы, естественно используется больше учебных элементов, следовательно, коэффициент взаимосвязи будет больше.

Для учебного элемента t_1 продукционная модель представлена на рис.2.

Число $z(t_1)=7$. Аналогичным образом можно построить продукционную модель для любого $t_j\in T$ $(i=\overline{1,N})$ и определить его сложность.

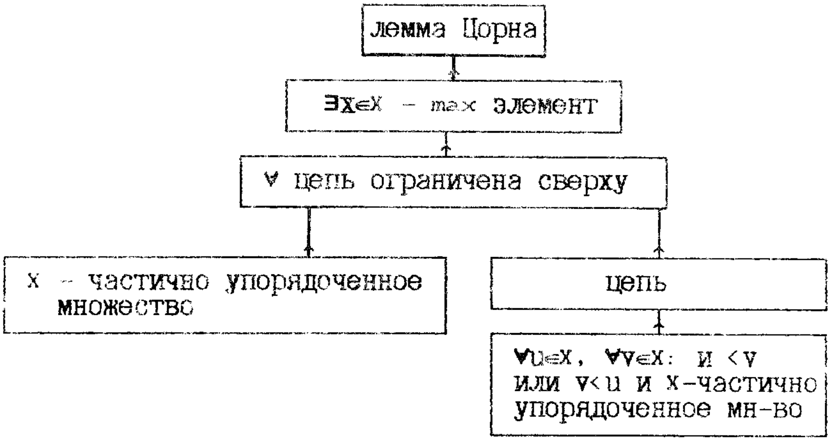

Рис.2.

Таким образом, для нашего примера мы получаем модель контролирующей операции:

$$(AZ)(t_j) = \sum_{i=1}^{n} k(t_j, s_i) Z(s_i)(d\mu)(s_i), \quad t_j \in T \qquad (3)$$

где оператор $A: L_2(T,\mu) \to L_2(T,\mu)$

Практический способ решения некорректных задач представляют регулирующие алгоритмы /4/. Для решения операторного уравнения первого рода можно построить регуляризующий алгоритм при помощи аппроксимирующего семейства, которое ищется в виде /4/:

$$R_a = \theta(A^* A,\ a) A^*, \quad a \in (0, a_0), \qquad (4)$$

где

$$\theta(A^* A,\ a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\chi, a) d\lambda(\chi).$$

Семейство R_a аппроксимирует отображение G на множестве D_a:

$$\lim_{a \to 0} \|R_a u - Gu\| = 0 \quad \forall u \in D_a ,$$

где G – однозначная ветвь многозначного отображения $G = A^{-1}$, $D_a = im(A)$, $\tilde{G}u \Rightarrow Gu$ – нормальное решение уравнения (1). Отображение $G: imA \subset L_2(T,\mu) \to L_2(T,\mu)$ можно считать математической моделью задачи контроля знаний. В случае $\eta=0$ регуляризацию некорректной математической модели G можно осуществить по формуле А.Н.Тихонова $R_\delta = (\delta T + A^* A)^{-1} A^*$, $a(\delta)>0$ параметр регуляризации (в нашем случае $a=\delta$). Регуляризованное значение $z_\delta = R_\delta u_\delta$ является оценкой истинных знаний студентов и стремится к истинным знаниям при $\delta \to 0$.

Литература

1. Х.Уэно, Т.Кояма и др. Представление и использование знаний. М.:Мир, 1989.

2. С.Осуга, Ю.Саэки и др. Приобретение знаний. М.:Мир, 1990.

3. Воронов Ю.П. Компьютеризация: шаг в будущее. Новосибирск: Наука, 1990.

4. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.

Пермский государственный университет