

Лутманов С.Е., Маймуст Д.В., Цветков Г.А.

**СТАБИЛИЗАЦИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ГОЛОВКИ, ПОДВЕШЕННОЙ
В ТРЕХСТЕПЕННОМ КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ**

Abstract

*Results from the theoretical study of the stabilization of
measurment mechanism are presented.*

В работе решается задача о стабилизации следующего механизма.

Измерительная головка А жестко связана с внутренней рамой В карданова подвеса (см. рис.1), которая может вращаться относительно оси o_1o_1 , связанной с рамой В, вращающейся относительно оси o_2o_2 , связанной с внешней рамой Г. В свою очередь внешняя рама Г может вращаться относительно оси o_3o_3 , связанной с неподвижным основанием.

С неподвижным основанием возьмем абсолютную систему отсчета $ox_0y_0z_0$. Ось ox_0 направим вертикально вниз, а оси oy_0 и oz_0 расположим в горизонтальной плоскости так, чтобы система координат была правой. С внешней рамой подвеса свяжем систему координат $ox_3y_3z_3$. Ось oz_3 направим по оси вращения внешней рамы, ось ox_3 по оси вращения средней рамы и осью oz_3 дополним систему до правой тройки. Со средней рамой свяжем систему координат $ox_2y_2z_2$. Ось ox_2 направим вдоль оси вращения средней рамы, ось oz_2 - вдоль оси вращения внутренней рамы и осью oz_2 дополним систему до правой тройки. С внутренней рамой свяжем систему координат $ox_1y_1z_1$. При этом ось oy_1 направим по оси вращения внутренней рамы, ось oz_1 направим таким образом, чтобы она была вертикальной («вниз») в положении, когда средняя рама горизонтальна, а внутренняя вертикальна. Ось ox_1 дополняет систему до правой тройки.

Через α , β , γ , обозначим углы поворота (против часовой стрелки) средней, внутренней и внешней рам соответственно.

Начало отсчета $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ определяется так, чтобы для него средняя рама занимала горизонтальное, внутренняя – вертикальное положения, а система отсчета $ox_3y_3z_3$ совпадала с абсолютной системой $ox_0y_0z_0$.

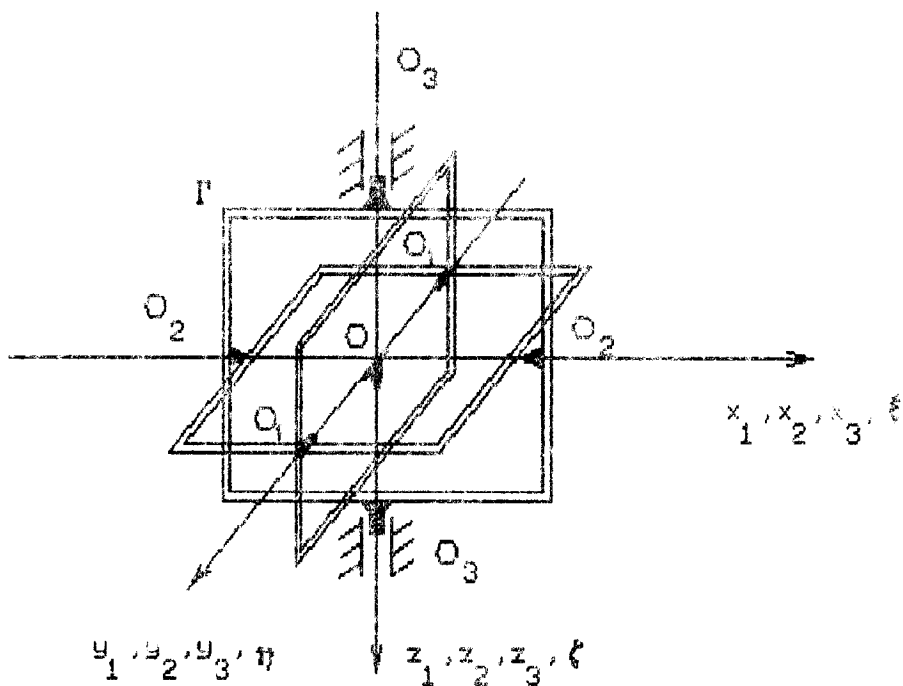


Рис. 1.

Принимается, что рамки подвеса абсолютно жесткие, общий центр тяжести головки и внутренней рамки, а также средней и внешней рамки расположены в центре карданова подвеса – в точке O . Координатные оси системы $ox_3y_3z_3$ совпадают с общими главными осями инерции измерительной головки и внутренней рамки, а оси координат систем $ox_2y_2z_2$ и $ox_1y_1z_1$ – с главными осями инерции

средней и внешней рамок, соответственно.

Управление механизмом осуществляется посредством вращательных моментов, действующих относительно осей вращения каждой из рамок.

Принимая углы α , β , γ за обобщенные координаты и следуя работе [1], выведем уравнения движения механизма. Заметим, что матрицы преобразования координат имеют следующий вид:

$$A_{03} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

(1)

$$A_{21} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Здесь

$$A_{03}: O_0 \eta \zeta \Rightarrow OX_3 Y_3 Z_3, \quad A_{32}: OX_3 Y_3 Z_3 \Rightarrow OX_2 Y_2 Z_2,$$

$$A_{21}: OX_2 Y_2 Z_2 \Rightarrow OX_1 Y_1 Z_1$$

Обозначим через $\bar{\Omega}_1^{(r)}$, $\bar{\Omega}_2^{(r)}$, $\bar{\Omega}_3^{(r)}$ — угловые скорости внутренней, средней и внешней рамок соответственно. Тогда абсолютные угловые скорости этих рамок $\bar{\Omega}_1$, $\bar{\Omega}_2$, $\bar{\Omega}_3$ будут вычисляться по формулам

$$\bar{\Omega}_3 = \bar{\Omega}_3^{(r)}, \quad \bar{\Omega}_2 = \bar{\Omega}_3 + \bar{\Omega}_2^{(r)}, \quad \bar{\Omega}_1 = \bar{\Omega}_2 + \bar{\Omega}_1^{(r)} \quad (2)$$

Пусть (r_1, r_2, r_3) — проекции вектора $\bar{\Omega}_1$ в системе координат $OX_1 Y_1 Z_1$. Выразим эти координаты через обобщенные координаты и обобщенные скорости. Последовательно имеем:

$$\begin{pmatrix} p_3 \\ q_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = A_{32} \begin{pmatrix} p_3 \\ q_3 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\gamma} \sin \alpha \\ \dot{\gamma} \cos \alpha \end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = A_{21} \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta - \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \beta \\ \dot{\gamma} \sin \alpha + \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix}$$

Обозначим через A_i , B_i , C_i главные моменты инерции соответствующих рамок относительно осей OX_i , OY_i , OZ_i , $i=1,2,3$. Запишем кинетические моменты каждой из рамок относительно центра карданова подвеса в проекциях на оси i -й системы координат. С учетом формул (4) имеем:

$$\vec{G}_0^{(3)} = \begin{pmatrix} G_{Ox_3}^{(3)} \\ G_{Oy_3}^{(3)} \\ G_{Oz_3}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3 & p_3 \\ B_3 & q_3 \\ C_3 & \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_3 \dot{\gamma} \end{pmatrix}$$

$$\vec{G}_0^{(2)} = \begin{pmatrix} G_{Ox_2}^{(2)} \\ G_{Oy_2}^{(2)} \\ G_{Oz_2}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & p_2 \\ B_2 & q_2 \\ C_2 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 \dot{\alpha} \\ B_2 \dot{\gamma} \\ C_2 \dot{\gamma} \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\vec{G}_0^{(1)} = \begin{pmatrix} G_{Ox_1}^{(1)} \\ G_{Oy_1}^{(1)} \\ G_{Oz_1}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & p_1 \\ B_1 & q_1 \\ C_1 & r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 (\dot{\alpha} \cos \beta - \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \beta) \\ B_1 (\dot{\gamma} \sin \alpha + \dot{\beta}) \\ C_2 (\dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} \cos \alpha \cos \beta) \end{pmatrix}$$

Обозначим через $\bar{N}^{(3)}$, $\bar{N}^{(2)}$, $\bar{N}^{(1)}$ главные моменты внешних по отношению, соответственно, ко всему механизму, средней и внутренней (совместно с измерительной головкой) рамке и внутренней (совместно с измерительной головкой) рамке сил.

Заметим, что

$$\bar{N}_{z3}^{(3)} = U_3, \quad \bar{N}_{x2}^{(2)} = U_2, \quad \bar{N}_{y1}^{(1)} = U_1, \quad (6)$$

а проекции $\bar{N}_{x3}^{(3)}$, $\bar{N}_{z3}^{(3)}$, $\bar{N}_{yz}^{(2)}$, $\bar{N}_{z2}^{(2)}$, $\bar{N}_{z1}^{(1)}$ представляет собой моменты нормальных реакций опор $O_3 O_3$, $O_2 O_2$, $O_1 O_1$ относительно соответствующих осей.

Запишем теорему об изменении кинетического момента по отношению к каждой из рамок. На основании 3-го закона Ньютона имеем:

$$\frac{d\bar{G}_o^{(3)}}{dt} = \bar{N}^{(3)} - \bar{N}^{(2)}, \quad \frac{d\bar{G}_o^{(2)}}{dt} = \bar{N}^{(2)} - \bar{N}^{(1)}, \quad \frac{d\bar{G}_o^{(1)}}{dt} = \bar{N}^{(1)}, \quad (7)$$

Используя понятие локальной производной, перепишем равенства (7):

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{d}\bar{G}_o^{(3)}}{dt} + \bar{\Omega}^{(3)} \times \bar{G}_o^{(3)} &= \bar{N}^{(3)} - \bar{N}^{(2)}, \\ \frac{\tilde{d}\bar{G}_o^{(2)}}{dt} + \bar{\Omega}^{(2)} \times \bar{G}_o^{(2)} &= \bar{N}^{(2)} - \bar{N}^{(1)}, \\ \frac{\tilde{d}\bar{G}_o^{(1)}}{dt} + \bar{\Omega}^{(1)} \times \bar{G}_o^{(1)} &= \bar{N}^{(1)}, \end{aligned} \quad (8)$$

На основании формул (4), (5) из уравнений (8) выводим:

$$O = \bar{N}_{x_3}^{(3)} - \bar{N}_{x_2}^{(2)},$$

$$O = \bar{N}_z^{(3)} - \cos\alpha \bar{N}_{y_2}^{(2)} + \sin\alpha \bar{N}_{z_2}^{(2)}$$

$$O_3 \bar{y}^{\circ} = \bar{N}_{z_3}^{(3)} - \sin\alpha \bar{N}_{y_2}^{(2)} - \cos\alpha \bar{N}_{z_2}^{(2)}$$

$$A_2 \bar{\alpha}^{\circ} + (C_2 - B_2) \bar{y}^{\circ} \cos\alpha \sin\alpha = \bar{N}_{x_2}^{(2)} - \bar{N}_{x_1}^{(1)} \cos\beta - \bar{N}_{z_1}^{(1)} \sin\beta$$

$$B_2 \bar{y}^{\circ} \sin\alpha + B_2 \bar{y}^{\circ} \cos\alpha + (A_2 - C_2) \bar{y}^{\circ} \alpha = \bar{N}_{y_2}^{(2)} - \bar{N}_{y_1}^{(1)}$$

$$C_2 \bar{y}^{\circ} \cos\alpha + C_2 \bar{y}^{\circ} \sin\alpha + (B_2 - A_2) \bar{y}^{\circ} \alpha \sin\alpha = \bar{N}_{z_2}^{(2)} + \bar{N}_{x_1}^{(1)} \sin\beta - \bar{N}_{z_1}^{(1)} \cos\beta$$

$$A_1 (\bar{\alpha}^{\circ} \cos\beta - \bar{\beta}^{\circ} \sin\beta - \bar{y}^{\circ} \cos\alpha \sin\beta + \bar{\alpha} \bar{y} \sin\alpha \sin\beta - \bar{\beta} \bar{y} \cos\alpha \cos\beta) +$$

$$+ (C_1 - B_1) (\bar{y} \sin\alpha + \bar{\beta} C \sin\beta + \bar{y} \cos\alpha \cos\beta) = N_{Ox}^{(1)}$$

$$B_1 (\bar{y} \sin\alpha + \bar{\alpha} \bar{y} \cos\alpha + \bar{\beta} C) + (A_1 - C_1) (\bar{\alpha} \sin\beta + \bar{y} \cos\alpha \cos\beta) \times$$

$$\times (\cos\beta - \bar{y} \cos\alpha \sin\beta) = N_{Oy_1}^{(1)}$$

$$C_1 (\bar{\alpha} \sin\beta + \bar{\alpha} \bar{y} \cos\beta - \bar{\alpha} \bar{y} \sin\alpha \cos\beta - \bar{\beta} \bar{y} \cos\alpha \sin\beta) +$$

$$+ (B_1 - A_1) (\bar{y} \sin\alpha + \bar{\beta} C \cos\beta - \bar{y} \cos\alpha \sin\beta) = N_{Oz_1}^{(1)} \quad (9)$$

Из уравнения (9) исключаем величины $N_{x_1}^{(1)}$, $N_{y_1}^{(1)}$, $N_{y_2}^{(2)}$, $N_{z_2}^{(2)}$, $N_{x_3}^{(3)}$, $N_{y_3}^{(3)}$ и полученные уравнения разрешаем относительно старших производных:

$$\gamma^{\circ\circ} = \frac{G P_{31} Q + N_{x_2}^{(2)} P_{31} Q - F P_{21} Q - N_{z_3}^{(3)} P_{21} Q + E Q_{32} P + N_{y_1}^{(1)} Q_{32} P}{Q_1 (C R_{23} P - R_{32} P_{21}) + Q_{32} P_{21}}$$

$$\beta^{\circ\circ} = \frac{-R_1 [G P_{31} Q + N_{x_2}^{(2)} P_{31} Q - F P_{21} Q - N_{z_3}^{(3)} P_{21} Q + E Q_{32} P + N_{y_1}^{(1)} Q_{32} P]}{Q_1 [Q_1 (C R_{23} P - R_{32} P_{21}) + Q_{32} P_{21}]}$$

$$+ \frac{(E + N_{y_1}^{(1)}) [Q_1 (C R_{23} P - R_{32} P_{21}) + Q_{32} P_{21}]}{Q_1 [Q_1 (C R_{23} P - R_{32} P_{21}) + Q_{32} P_{21}]} \quad (10)$$

$$\gamma^{\circ\circ} = \frac{(G + N_{x_2}^{(2)}) [Q_1 (C R_{23} P - R_{32} P_{21}) + Q_{32} P_{21}] - R_2 [G P_{31} Q + N_{x_2}^{(2)} P_{31} Q - F P_{21} Q - N_{z_3}^{(3)} P_{21} Q]}{P_2 [Q_1 (C R_{23} P - R_{32} P_{21}) + Q_{32} P_{21}]}$$

$$\frac{N_{z_3}^{(3)} P_{21} Q + Q_{32} P_{21} + N_{y_1}^{(1)} Q_{32} P}{P_2 [Q_1 (C R_{23} P - R_{32} P_{21}) + Q_{32} P_{21}]}$$

Здесь:

$$P_1 = 0, \quad Q_1 = B_1, \quad R_1 = B_1 \sin \alpha, \quad P_2 = A_2 + A_1 \cos^2 \beta + C_1 \sin^2 \beta, \quad Q_2 = 0,$$

$$R_2 = (C_1 - A_1) \cos \alpha \sin \beta \cos \beta, \quad P_3 = (C_1 - A_1) \cos \beta \sin \beta \cos \alpha, \quad C_3 = B_1 \sin \alpha,$$

$$R_3 = (B_2 + B_1) \sin^2 \alpha + C_3 + (C_2 + C_1 \cos^2 \beta + A_1 \sin^2 \beta) \cos^2 \alpha,$$

$$E = -B_1 \dot{\gamma} \dot{\alpha} - (A_1 - C_1) (\dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\gamma} \cos \alpha \cos \beta) (\dot{\alpha} \cos \beta - \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \beta)$$

$$G = \dot{\gamma}^2 [B_1 + B_2 - C_2 - C_1 \cos^2 \beta - A_1 \sin^2 \beta] \cos \alpha \sin \alpha + 2 \dot{\alpha} \dot{\beta} [A_1 - C_1] \times$$

$$\times \cos \beta \sin \beta + \dot{\gamma} \dot{\beta} [\cos^2 \beta (A_1 - C_1 + R_1) + \sin^2 \beta (C_1 + B_1 - A_1)] \cos \alpha$$

$$F = -2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \alpha \cos \alpha [B_2 - C_2 + B_1 - A_1 \sin^2 \beta - C_1 \cos^2 \beta] - \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \alpha \times$$

$$\begin{aligned} & \times (B_1 + C_1 - A_1)(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) - 2\beta \dot{\gamma} \cos \beta \sin \beta \cos^2 \alpha (A_1 - C_1) - \\ & - \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta \sin \alpha (A_1 - C_1) \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения (10), (11) будем называть полной моделью механизма.

Сформулируем задачу стабилизации.

Задача: определить управления U_i , $i=1,2,3$ как функции фазового вектора $(\alpha, \beta, \gamma, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$ так, чтобы система дифференциальных уравнений (10), (11) после подстановки в нее найденных управлений, была асимптотически устойчива. При этом дополнительно требуется, чтобы отклонение фазовых координат от нуля уменьшилось в заданное число раз по отношению к начальному по истечению фиксированного промежутка времени.

Решение этой задачи проведем на базе анализа линеаризованных в окрестности начала координат уравнений (10), (11), которые после отбрасывания членов высшего порядка малости принимают вид:

$$J_2 \ddot{\alpha} = U_2, \quad J_1 \ddot{\beta} = U_1, \quad J_3 \ddot{\gamma} = U_3, \quad (12)$$

где

$$J_2 = A_2 + A_1, \quad J_1 = B_1, \quad J_3 = C_1 + C_2 + C_3. \quad (13)$$

Положим

$$U_2 = -\varepsilon_2 \ddot{\alpha} - \Delta_2 \dot{\alpha}, \quad U_1 = -\varepsilon_1 \ddot{\beta} - \Delta_1 \dot{\beta}, \quad U_3 = -\varepsilon_3 \ddot{\gamma} - \Delta_3 \dot{\gamma}, \quad (14)$$

В выражении (14) величины ε_i, Δ_i , $i=\overline{1,3}$ — суть постоянные коэффициенты, найденные из условия отрицательности мнимых частей корней характеристических уравнений для системы (12), в которой управления U_i , $i=1,2,3$ заменены по формулам (14), а также условия достаточной малости отклонения фазового вектора от нуля к заданному моменту времени.

В частности, для случая, когда $T=0.1$ сек., начальные

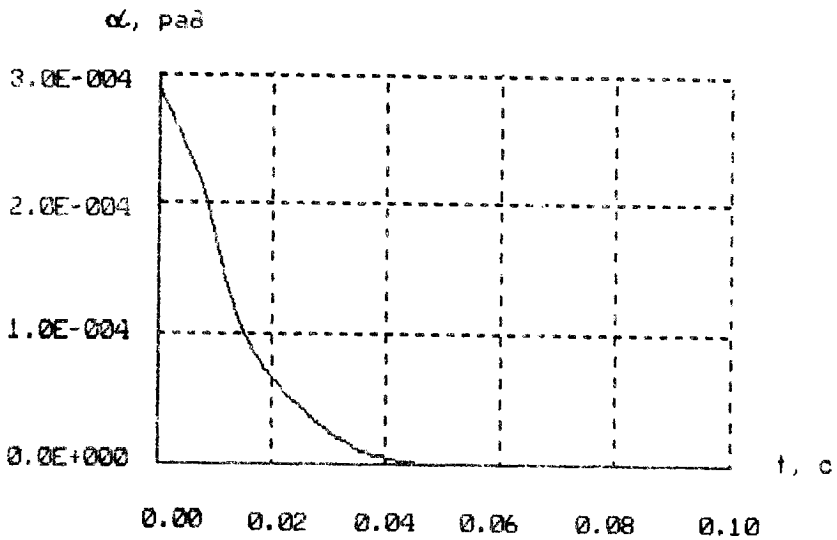


Рис. 2а

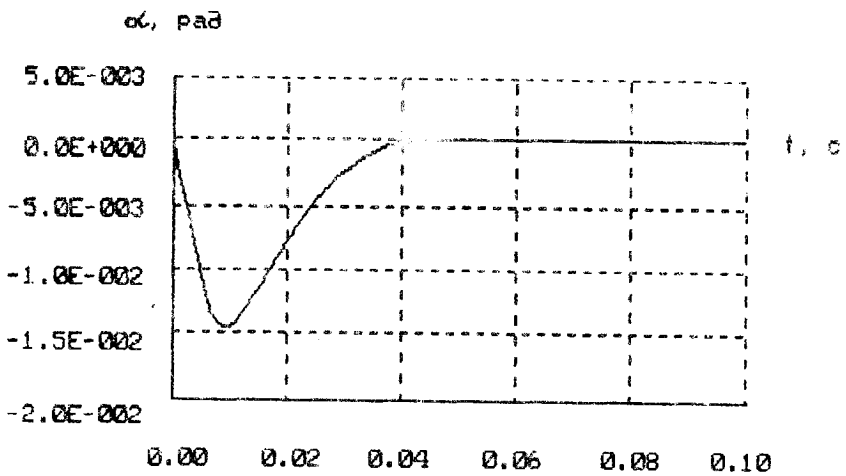


Рис. 2б

отклонения $|\alpha_0|$, $|\beta_0|$, $|\gamma_0|$, $|\dot{\alpha}_0|$, $|\dot{\beta}_0|$, $|\dot{\gamma}_0|$ не превосходят 1, 1°/сек. ($1^\circ = 2,90888 \cdot 10^{-4}$ рад), а отклонение фазового вектора 1% от начальной величины ϵ_1 , Δ_1 , $i = \sqrt{1,3}$ можно задать формулой:

$$\epsilon_1 = 10 \cdot Z \cdot J_1, \quad \Delta_1 = W \cdot 10^2 \cdot J_1, \quad Z = 20, \quad W = 150 \quad (15)$$

Из теории устойчивости известно (см. например [2]), что если корни характеристического уравнения линеаризованной задачи имеют строго отрицательные мнимые части, то и нелинейная задача асимптотически устойчива. Это предложение было подтверждено численными расчетами с полной моделью (10), (11), в которой управления $U_i(t = \sqrt{1,3})$ определялись по формулам (14), (15).

Численное решение указанной задачи иллюстрируется графическими зависимостями угловых координат и соответствующих скоростей (см. рис. 2а-б). В качестве примера приводятся графики координат α , а две другие пары обобщенных координат имеют аналогичную качественную интерпретацию.

Из графиков 2а-б видно, что где-то в районе $t = 0,05$ сек. (расчетное время стабилизации положения измерительной головки $t = 0,1$ сек.) численные значения обобщенных координат укладываются в требуемую по отклонениям погрешность (напомним, что она составляет 1% от начальных условий) и в точке $t = 0,1$ сек. имеет значение порядка 10^{-7} , что соответствует решению поставленной задачи.

Таким образом, выбранные для линеаризованной системы управления вида (14) с коэффициентами (15) обеспечивают решение задачи стабилизации для исходной нелинейной модели.

Литература

1. Лурье А. И. Аналитическая механика. - М.: Физматгиз, 1961.
2. Велдман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. - М.: Иностранная литература, 1954.

Пермский государственный университет